

ATTI
DELLA
ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXLIX

1952

SERIE OTTAVA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

VOLUME XIII.

(2° semestre 1952)



ROMA

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1952

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Ferie 1952 - Luglio-agosto

NOTE DI SOCI

(Ogni Nota porta a piè di pagina la data di arrivo o di presentazione)

Astronomia. — *Sulla opportunità di direttive generali nella ricerca di leggi di coordinamento fra i moti stellari.* Nota I^(*) del Corrisp. VITTORIO NOBILE.

Superata una prima fase dell'astronomia di precisione nella quale i casi di « moto proprio » furono considerati come rari e anormali, rimanendo gli astronomi ancora attaccati alle concezioni del passato sulle *stelle fisse*, si aprì un altro periodo nella storia di quella scienza nel quale, col perfezionarsi di mezzi e metodi di osservazione, si vide crescere indefinitamente il numero di quei casi e si comprese che il fenomeno era generale e che il concetto della immobilità (sia assoluta che relativa) delle stelle doveva essere abbandonato.

Di fronte alla comprovata esistenza dei moti propri relativi poteva bensì la mente dello studioso orientarsi verso l'ipotesi che attrazioni newtoniane mutue fra le stelle concorressero a determinare il fenomeno in questione, ma gli astronomi considerarono in un primo tempo quelle attrazioni come del tutto inapprezzabili, ciò che portava ad assegnare alle stelle traiettorie rettilinee e movimenti uniformi, a norma della legge di inerzia. Questa ipotesi però non implica che fra i moti propri debba esistere un coordinamento: rimaneva pertanto ammissibile una distribuzione *casuale* ed è su tale presupposto che sorsero talune concezioni e si svilupparono procedimenti di ricerca nei quali gli astronomi riponevano piena fiducia al fine di risolvere importanti problemi, primo fra i quali quello di definire in base a criteri sufficientemente rigorosi i riferimenti fondamentali dell'astronomia di posizione, riguardo ai quali urgeva evidentemente la necessità di profonde modifiche dopo il riconoscimento della inesistenza di stelle *immobili*.

(*) Presentata nella seduta del 14 giugno 1952.

Non è mia intenzione di portare qui la discussione sul problema del riferimento del quale ebbi in passato ad indicare una soluzione del tutto nuova e indipendente da qualunque ipotesi sulla distribuzione dei moti propri⁽¹⁾. Credo invece opportuno rilevare, a proposito della supposta distribuzione casuale, come le obiezioni che io formulavo allora contro quella ipotesi conservino tutto il loro peso nei riguardi di quei procedimenti e metodi che rimangono ancora fondati, in modo più o meno sostanziale, sulla medesima. Era ed è mio convincimento che l'introduzione del concetto di *caso* nella indagine scientifica possa solo, provvisoriamente, giustificarsi quando per la ricerca delle leggi dei fenomeni osservati risulti impossibile tanto la deduzione rigorosa da principi e postulati generali quanto l'esame metodico delle varie ipotesi attraverso una sperimentazione razionalmente organizzata.

Non ritengo che l'astronomia moderna si trovi, di fronte ai predetti problemi, in tali condizioni.

2. Se il concetto di *caso* è, per quanto si è osservato, da evitarsi come tipicamente anti-scientifico e disadatto a dar vita a teorie sicuramente definitive, è da notare che l'abbandono di esso nello studio dei moti stellari si è di fatto imposto in questa prima metà del nostro secolo a seguito della profonda evoluzione verificatasi durante il periodo stesso nel complesso delle nostre conoscenze e vedute sulla struttura dell'universo. Accertata l'esistenza di un « ammasso galattico » il quale comprende tutte le stelle individualmente distinguibili coi nostri mezzi ottici (visuali o fotografici) e le racchiude in uno spazio finito e limitato da una superficie chiusa abbastanza ben definita, si è condotti con ciò ad immediate deduzioni di carattere dinamico, dalle quali consegue la impossibilità della supposta indipendenza fra i moti propri delle stelle. Qualora, infatti, si voglia supporre che stelle isolate in grandissimo numero e provenienti da regioni diverse dello spazio abbiano potuto, percorrendo traiettorie rettilinee mutuamente indipendenti, venire a conglomerarsi in modo da costituire l'ammasso quale a noi appare, dovrebbe considerarsi tale fase del movimento come del tutto singolare e transitoria ed estremamente esigua la probabilità del verificarsi della configurazione osservata,

(1) Potrà peraltro presentare qualche interesse la indicazione delle due mie Memorie dove la questione dei moti propri e quella dei riferimenti sono approfondite e dove è indicata la soluzione a cui qui mi riferisco.

I. - *La nozione di moto proprio solare e il suo valore come elemento per lo studio dell'evoluzione dell'ammasso galattico*. (Memorie della Soc. Astron. italiana, 1921).

II. - *Postulati fondamentali e sistemi di riferimento per la dinamica dell'ammasso galattico*. (Memorie della Soc. Astron. italiana, vol. IV, n. 2).

In questi lavori sostanzialmente si mostra come sia vano ogni tentativo di definire riferimenti ai quali corrisponda un significato chiaro e scientificamente utile della nozione di moto proprio finché si operi esclusivamente su dati concernenti posizioni e velocità (e pertanto essenzialmente *relativi*) e non si deducano dalle misure elementi riferentisi alle accelerazioni, senza i quali rotazioni assolute - ai sensi della dinamica newtoniana - non sono riconoscibili.

mentre al fenomeno non si potrebbe assegnare alcun'altra causa determinante quando si ritengano trascurabili le attrazioni mutue.

Esclusa l'anzidetta ipotesi, si deve considerare come già avvenuta la stabilizzazione dell'ammasso nel suo insieme: con ciò viene esclusa la possibilità di traiettorie rettilinee, dal che segue la necessaria presenza di accelerazioni e quindi l'esistenza di attrazioni newtoniane non insensibili sulle singole stelle, attrazioni le quali non possono dipendere che dalle altre stelle dell'ammasso stesso, dovendosi escludere come praticamente nulle quelle che potrebbero provenire dalle altre « isole » dell'universo.

È dunque il problema degli n corpi, con n immenso e del tutto ignoto, che si trova di fronte chi voglia tentare di costruire una teoria dinamica dei moti stellari nella Galassia. Ma se le insormontabili difficoltà di tale problema portano ad escludere la possibilità di trattarlo in maniera rigorosa coi metodi della meccanica classica, il considerarlo nel suo aspetto integrale è cosa indubbiamente utile al fine di precisare certe esigenze fondamentali di natura teorica che è necessario tenere ben presenti in ogni tentativo per costruire una teoria semplificata che sia provvisoriamente accettabile.

3. Due vie sono state finora ritenute praticabili per avanzare in qualche modo. Seguendo un primo ordine di idee si è tentato di costruire dei *modelli* dinamici speciali costituiti da sistemi di punti materiali soggetti a mutue attrazioni newtoniane, in modo che per la conformazione stabile in ammassi globulari e per la speciale distribuzione della materia nonchè per la forma delle traiettorie si potessero riprodurre senza troppo grandi scostamenti le caratteristiche che l'osservazione rivela per l'ammasso galattico. Questi schemi sono costruiti attraverso una semplice *verifica* che con essi sono soddisfatte le condizioni imposte dalle equazioni del moto; le traiettorie sono dunque necessariamente *prestabilite* e i casi così scelti corrispondono a soluzioni particolarissime delle predette equazioni, rispondenti a valori ben determinati di quelle costanti le quali si presenterebbero come arbitrarie in un processo di integrazione, ma che sono stati già implicitamente precisati con la indicazione delle traiettorie. Poichè la costruzione di questi modelli si rende possibile solo per la loro grande semplicità, è senz'altro chiaro che non vi è luogo a grandi speranze di poter vedere in qualcuno fra essi rispecchiato il caso dell'ammasso galattico, dove – salvo un eventuale coordinamento di cui diremo più oltre – pei vettori delle velocità corrispondenti ai diversi corpi ad una data epoca non sussiste, riguardo alle direzioni, alcuna condizione assegnabile a priori. È sostanzialmente per tali ragioni che l'attività degli studiosi rivolta alla ricerca dei predetti schemi si è ben presto fermata.

Un altro indirizzo di ricerca, meno ambizioso ma, almeno in apparenza, più pratico, consiste nel saggiare successivamente, sulla base di abbondanti e precisi dati di osservazione, quelle varie ipotesi sulla distribuzione delle velocità che possono esser suggerite da analogie rilevate fra elementi riferentisi alle stelle di determinati aggruppamenti più o meno considerevoli. Ma le leggi alle quali si può per tal via pervenire sono di necessità troppo semplici e troppo

ristrette e determinate perchè possa confidarsi nella loro piena validità e soprattutto nel loro carattere definitivo. La indagine deve quindi esser portata sopra un piano di maggior rigore e generalità e deve continuare, finchè non si riesca ad escludere le leggi empiriche trovate o a farle rientrare, eventualmente corrette, nella teoria, sia pure semplificata, a cui bisogna pervenire.

4. Le considerazioni che precedono portano a riconoscere la necessità di una chiara definizione di ciò che debba intendersi per *coordinamento* delle velocità stellari, ai fini di una utile e metodica ricerca. Una relazione finita intravista come possibile, a mezzo della osservazione, fra le coordinate delle stelle e le componenti delle velocità ha soprattutto interesse quando si può ritenere che valga per ogni tempo. Ciò premesso, se in tale relazione, supposta rigorosa, l'osservatore credesse di poter comprendere *tutte* le stelle essa non potrebbe che rappresentare *un integrale delle $6n$ equazioni del moto* del sistema degli n corpi e pertanto dovrebbe o identificarsi con uno degli integrali noti (o con una combinazione fra essi) oppure fornire un integrale nuovo. Del primo caso è inutile parlare e in quanto al secondo esso può con sicurezza escludersi, essendo estremamente improbabile che si possa riuscire a scoprire un integrale nuovo a mezzo dell'osservazione.

Se la relazione eventualmente scoperta involge soltanto dati relativi ad un aggruppamento parziale di stelle, le variabili che vi figurano (coordinate e componenti delle velocità) si potrebbero immaginare espresse, quando l'integrale generale del sistema si considerasse noto, in funzione delle $6n$ costanti di integrazione $C_1, C_2, C_3, \dots, C_{6n}$ e *del tempo* e si arriverebbe così ad una condizione la quale, supposta verificata per l'epoca delle osservazioni, non lo sarebbe più, in generale, per un'epoca diversa.

Se dunque uno stato di coordinamento delle velocità stellari è da ricercarsi - ciò che non sembra dubbio data la conformazione limitata e ben definita dell'ammasso nel quale si svolge il moto e data la naturale ipotesi che in un remoto passato una causa di indole *generale* abbia agito, con l'effetto di imporre velocità « iniziali » speciali - dovrà il ricercatore rivolgere particolarmente il suo esame a quei caratteri delle velocità dei quali possa ritenersi sicura la conservazione nella successiva evoluzione dell'ammasso e che non siano pertanto espressi da vere e proprie *equazioni di condizione* ma rivelati dalla esistenza di taluni legami funzionali.

5. Alle ipotesi del tipo innanzi accennato e riconosciute inammissibili ai fini di una ricerca sulle leggi di coordinamento delle velocità si può vantaggiosamente sostituire un'altra che si conforma ai criterî qui espressi in ultimo e che, mentre non può incontrare aprioristiche obiezioni, consente, per la sua grande larghezza, e per la semplicità dell'algoritmo matematico necessario pel raffronto coi dati delle osservazioni, un esame vasto e sistematico nelle migliori condizioni.

Se si ammette, come si è detto, che si sia determinata in un lontano passato, per cause imprecisabili, una azione il cui effetto sia stato quello

di imprimere alle diverse parti della materia velocità differenti, si presenta con forte grado di probabilità l'ipotesi che tale velocità (vettore) sia *funzione del posto* (in quell'epoca che diremo iniziale).

Rimane in tal caso pienamente individuata, nell'intorno di ciascun punto P , la omografia di deformazione e quindi l'altra $d\mathbf{v}/dP$ e pertanto definito in tutto lo spazio un vettore $\mathbf{v}(P, t)$, ossia un campo vettoriale. Tale omografia è quella che caratterizza la deformazione di un mezzo *continuo* di cui faccia parte il sistema discontinuo dei punti materiali (stelle) considerato e in cui la continuità si immagini ottenuta con la considerazione di masse fittizie. Il vettore $\mathbf{v}(P, t)$, che non ha significato fisico nei punti ai quali corrispondono queste masse, ne ha però uno matematico preciso, ciò che è necessario e sufficiente perchè la omografia sia definita e abbiano un senso le operazioni occorrenti per calcolare gli elementi della matrice dell'omografia stessa, i quali intervengono nelle equazioni che passeremo ora a scrivere. A tal fine osserviamo che valgono senz'altro, dopo quanto si è premesso, le equazioni indefinite dell'idrodinamica; le stelle prendono il posto che nella trattazione generale hanno le molecole del fluido, gli sforzi interni sono qui inesistenti (pressione nulla) e rimane così esclusa da quelle equazioni anche la *densità*, cosicchè le medesime bastano da sole a caratterizzare tutte le soluzioni che il problema comporta.

In quanto al potenziale delle forze di massa esso può, data l'ipotesi (ben giustificata come innanzi si è detto) della avvenuta stabilizzazione dell'ammasso, suppersi rimpiazzato da quello corrispondente ad una distribuzione continua della massa, con stratificazione omogenea e quindi esprimibile con una funzione algebrica quadratica U delle coordinate del punto sollecitato. Le equazioni predette si possono allora compendiare nell'unica (vettoriale)

$$(1) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{v} = \text{grad } U^{(2)}$$

la quale può scriversi, se si indica con $K \frac{d\mathbf{v}}{dP}$ l'omografia coniugata di $d\mathbf{v}/dP$,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} + K \frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{v} = \text{grad } U,$$

ovvero, poichè $K \frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{v}$ è il gradiente di $\frac{v^2}{2}$,

$$(2) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = \text{grad} \left(U - \frac{v^2}{2} \right).$$

(2) Sarà bene rilevare come il procedimento di dedurre le equazioni di questo problema da quelle della dinamica dei mezzi continui non sia imposto da considerazioni aventi carattere essenziale. L'equazione (1) non è altro, in sostanza, che quella del moto di una massa unitaria sollecitata da una forza derivante dal potenziale U ; nella forma in cui è qui scritta è però messa in evidenza la condizione che le velocità di tutti i punti del sistema considerato debbano rientrare in un unico e ben definito *campo vettoriale*, ciò che trasforma il problema del moto del punto isolato in altro che conduce ad un sistema di equazioni alle de-

Questa dà luogo a tre equazioni a derivate parziali fra le componenti della velocità, equazioni le quali sono, subordinatamente alle ipotesi ammesse, rigorose e fanno conoscere con le loro soluzioni tutti i campi vettoriali della velocità compatibili con la forma assegnata al potenziale delle attrazioni newtoniane (funzione del solo punto P).

Una condizione indipendente dalle forze agenti sul sistema, purchè conservative, si ha poi immediatamente dalla (2) e può scriversi, dopo aver notato che i simboli $\frac{\partial}{\partial t}$ e rot sono permutabili,

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{v} + \text{rot} (\text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{v}) = 0.$$

Tale relazione, la quale porta a tre equazioni a derivate parziali di secondo ordine in coordinate cartesiane, caratterizza, nel caso dei sistemi particellari, tutti i campi vettoriali della velocità corrispondenti a sollecitazioni conservative di qualunque tipo. La validità della (3) non è dunque limitata, nel caso particolare che ci interessa, dalle ipotesi restrittive innanzi formulate sulla distribuzione della materia stellare nell'interno dell'ammasso galattico. La relazione stessa, evidentemente necessaria in una prima fase della ricerca qui in vista, non è però sufficiente ad accertare la effettiva compatibilità delle corrispondenti distribuzioni con speciali tipi di potenziale. Deve quindi intervenire la (2) in cui la forma del potenziale è necessariamente precisata.

Partendo dai risultati qui indicati sarà possibile fissare le direttive più appropriate per intraprendere una razionale e promettente indagine sul coordinamento delle velocità stellari.

Un ulteriore sviluppo di questi concetti darà argomento ad una successiva Nota.

rivate parziali. Tale concetto è quello che completamente e correttamente esprime la nozione, finora vaga, di *coordinamento* delle velocità.

Non è senza interesse il porre formalmente in evidenza come, ammesso che al tempo generico t abbia luogo il predetto coordinamento delle velocità, l'omografia di deformazione al tempo t $\delta \mathbf{v} / \delta \mathbf{P}$ possa rappresentarsi in forma semplice e concisa in funzione delle variabili lagrangiane x_0, y_0, z_0, t .

Dette P_0 e P le posizioni di uno stesso punto materiale ai tempi t_0 e t e $P_0 + \delta P_0$ e $P + \delta P$ le due posizioni, negli stessi tempi, di un punto materiale vicino a P e inoltre, $\delta \mathbf{v}_0$ e $\delta \mathbf{v}$ le differenze vettoriali fra le velocità corrispondenti alle posizioni sincrone, e infine indicata con β l'omografia $\delta P / \delta P_0$ (funzione del tempo), risultano individuate rispettivamente le due $\partial \beta / \partial t$ e β^{-1} (inversa di β) e il prodotto di queste. Si ha allora successivamente

$$\delta \mathbf{v} = \frac{d}{dt} \delta \mathbf{P} = \frac{d}{dt} \beta \delta P_0 = \frac{\partial \beta}{\partial t} \delta P_0 = \left(\frac{\partial \beta}{\partial t} \beta^{-1} \right) \delta \mathbf{P},$$

coscicchè l'omografia $\delta \mathbf{v} / \delta \mathbf{P}$ è data dal prodotto indicato in parentesi.

Fisica. — *Un nuovo esemplare di mesone τ .* Nota di M. CECCARELLI, N. DALLAPORTA, M. MERLIN e A. ROSTAGNI (*), presentata (**) dal Corrisp. A. ROSTAGNI.

1. L'interpretazione di tutta una serie di eventi caratteristici, rivelati negli ultimi anni dalla camera di Wilson e dalle lastre fotografiche nucleari, ha portato ad immaginare l'esistenza di parecchie nuove particelle, di massa compresa fra qualche centinaio e qualche migliaio di masse elettroniche, cariche o neutre. Dopo i mesoni μ e π , si sono così venuti a considerare i « mesoni » τ , κ , ζ , χ , ..., in base ad osservazioni fatte colle lastre fotografiche, e le « particelle » V^\pm , V_1^0 , V_2^0 , ..., in base ad osservazioni colla camera di Wilson. Tutto fa pensare che la serie non sia chiusa; d'altra parte si ritiene probabile, allo stato attuale delle conoscenze, che fra le particelle dei due gruppi, distinte per il diverso aspetto dei fenomeni a cui danno origine nelle rispettive condizioni d'osservazione, si possano avere delle sovrapposizioni, vale a dire che qualcuno dei « mesoni » nominati si identifichi con qualcuna delle « particelle V ».

Questa fioritura di particelle, in qualche modo legate alle azioni nucleari, fa apparire più che mai provvisori ed incompleti gli schemi teorici sinora proposti per i campi delle forze nucleari, e suggerisce di moltiplicare le osservazioni in vista di una migliore determinazione delle masse, vite medie ed altre caratteristiche delle singole particelle, e della scoperta di eventuali regolarità fra di esse.

Particolarmente rare sono state sino ad oggi le osservazioni relative al mesone τ , una particella carica con massa dell'ordine di 1000 volte quella dell'elettrone, la quale si disintegra spontaneamente in 3 particelle cariche con masse confrontabili fra loro, fra le 200 e le 300 masse elettroniche. Il primo caso osservato risale alla fine del 1948, alla prima esposizione di lastre sensibili al minimo di ionizzazione specifica, effettuata dal gruppo di Bristol al Jungfraujoch (1). L'analisi di codesto evento condusse già a supporre che esso fosse dovuto ad una particella di massa poco inferiore a 1000 m_e , che dà origine a 3 mesoni ordinari, dei quali uno almeno dovrebbe essere un π^- (in quanto produce arrestandosi una disintegrazione nucleare).

Un secondo esempio dello stesso fenomeno fu osservato oltre un anno dopo da Harding, seguito a breve distanza da un terzo incerto, o comunque non utilizzabile a scopi di misura (2). Infine, nel 1951, furono osservati

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica dell'Università di Padova.

(**) Nella seduta del 14 giugno 1952.

(1) R. BROWN, U. CAMERINI, P. H. FOWLER, H. MUIRHEAD, C. F. POWELL, D. M. RITSON, « Nat. », 163, 82 (1949).

(2) J. B. HARDING, « Phil. Mag. », 41, 405 (1950).

altri due casi, sempre in lastre esposte al Jungfrauoch⁽³⁾. Praticamente si tratta dunque di quattro eventi utili finora conosciuti.

2. Un quinto evento di codesto tipo, che presenta delle caratteristiche particolarmente favorevoli alle misure, è stato recentemente osservato a Padova, su una lastra Ilford G 5 con emulsione di 1200 μ di spessore, esposta verticalmente per 14 giorni al M. Rosa (4550 m s. m., settembre 1951),

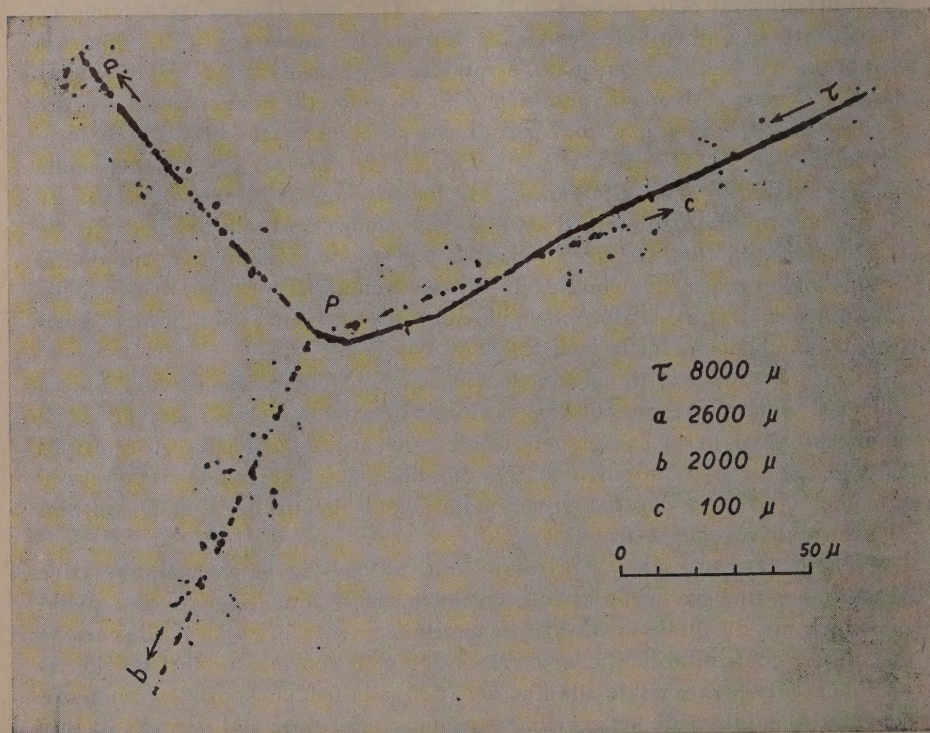


Fig. 1.

schermata con 5 cm d'alluminio. La traccia del mesone τ proviene dal vetro in direzione prossima all'orizzontale e si arresta nell'emulsione in P (fig. 1), dopo un percorso di 8 mm., dando origine qui a 3 particelle ionizzanti di tracce a b c , delle quali le prime due escono attraverso il vetro dopo percorsi di 2,6 e 2,0 mm. rispettivamente, mentre la terza esce nell'aria dopo 0,1 mm.

Le tre tracce secondarie sono abbastanza lunghe e rettilinee da consentire accurate misure angolari. Gli angoli di esse col piano della lastra

(3) P. H. FOWLER, M. G. K. MENON, C. F. POWELL, O. ROCHAT, « Phil. Mag. », 42, 1040 (1951); P. E. HODGSON, « Phil. Mag. », 42, 1060 (1951).

(dip), ricondotti allo spessore iniziale dell'emulsione, sono rispettivamente: $\vartheta_a = -29^\circ$, $\vartheta_b = -36^\circ$, $\vartheta_c = +49^\circ$, mentre gli angoli fra le proiezioni rispettive nel piano della lastra risultano: $\varphi_{ab} = 115^\circ 0'$, $\varphi_{ac} = 114^\circ 30'$. In base a questi dati si può stabilire che le tracce, entro l'approssimazione di $\pm 1^\circ$, sono contenute in un piano, inclinato di 51° rispetto al piano della lastra; e che gli angoli veri fra di esse, misurati su codesto piano, sono rispettivamente: $\psi_{ab} = 91^\circ$, $\psi_{ac} = 127^\circ$.

La complanarità, già constatata, entro i limiti delle rispettive precisioni, nelle osservazioni precedenti, implica che il mesone τ si sia disintegrato in

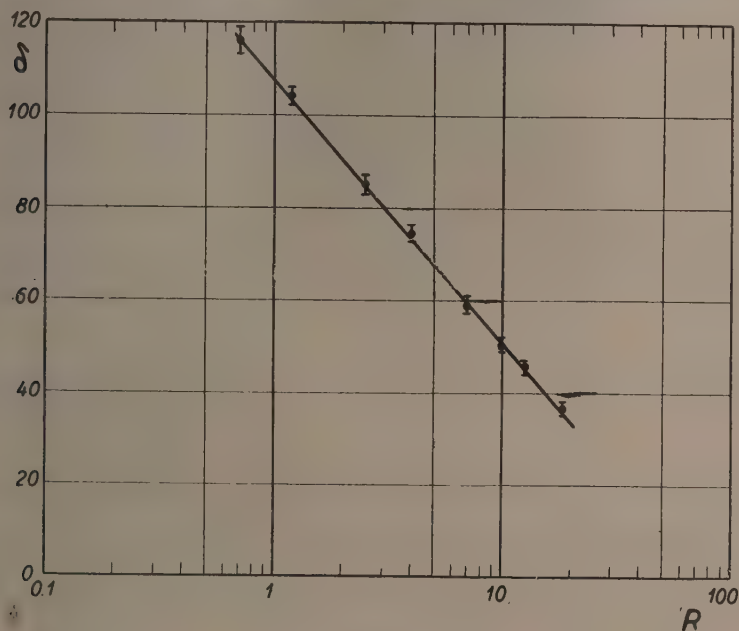


Fig. 2.

δ = numero di grani su 100 μ . R = range in mm.

quiete, e che dalla disintegrazione non abbiano origine altre particelle (neutre e perciò non osservabili) con quantità di moto apprezzabile (o almeno con una componente normale al piano stesso).

Determinazioni particolarmente accurate di densità dei granuli d'argento si sono potute compiere sulle tracce a e b ; meno precise su c . Si sono ottenuti valori di $68,5 \pm 1,9$ grani in 100 μ su a , $49,1 \pm 1,8$ su b , $37 \pm 4,3$ su c . Si è poi determinata la densità di grani in funzione del range su tracce di mesoni μ che si arrestano nella regione interessata dell'emulsione (fig. 2). Si trova così che le densità di grani delle tracce a , b , c , corrispondono rispettivamente a mesoni μ con range di 4,8 mm, 10,3 mm, 17,5 mm. Poichè sono note le relazioni range-energia cinetica per l'emulsione in questione, si possono tradurre questi dati in dati d'energia, sia nella

ipotesi che si tratti effettivamente di mesoni μ , sia in quella che si tratti invece di mesoni π . Nella seconda ipotesi otteniamo rispettivamente per a , b , c energie di $17,4 \pm 0,7$ MeV, $27,3 \pm 1,2$ MeV, 37 ± 5 MeV.

Determinazioni dell'angolo medio di scattering, compiute sulle tracce a e b , hanno dato rispettivamente i valori $\bar{\alpha}_{100\mu} = 0^{\circ},98 \pm 0^{\circ},16$ e $\bar{\alpha}_{100\mu} = 0^{\circ},47 \pm 0^{\circ},18$, che convalidano le conclusioni precedenti.

3. Ammettendo dunque che le particelle a , b , c siano tutte e tre mesoni π , e che sia nulla la quantità di moto totale (come è suggerito dalla complanarità delle tracce), si può dal valore dell'energia cinetica T di una delle particelle calcolare l'energia delle altre, nonché la massa del mesone τ che le genera. Nelle prime due righe della tabella I riportiamo i valori calcolati prendendo come base, rispettivamente, i valori $17,4 \pm 0,7$ MeV e $27,3 \pm 1,2$ MeV attribuiti ad a ed a b in base al conteggio dei grani.

TABELLA I.

	T_a	T_b	T_c	T_{tot}	m_τ
(Base su a)	$17,4 \pm 0,7$ MeV	28,2	42,3	$87,9 \pm 6,8$	$994,1 m_e$
(Base su b)	16,8	$27,3 \pm 1,2$	41	$85,1 \pm 7,2$	988,6
Medie	17,1 MeV	27,8	41,6	$86,5 \pm 5$	$991 \pm 15 m_e$

Nel computo dell'errore è stato tenuto conto qui delle incertezze relative al conteggio dei grani, alla misura degli angoli, allo spessore dell'emulsione, ed infine pure al valore della massa del mesone π ($274 \pm 2 m_e$).

Il valore

$$m_\tau = 991 \pm 15 m_e$$

che qui si è ricavato viene a spostare un poco verso l'alto il valor medio che risultava dalle misure precedenti

$$m_\tau = 966 \pm 8 m_e^{(3)}.$$

La lunghezza della traccia del mesone τ nell'emulsione (8 mm) consente di compiere su di esso due misure indipendenti di massa basate rispettivamente sulle relazioni dell'angolo medio di scattering e della ionizzazione specifica col range. Divisa la traccia in porzioni di 1 mm e determinati su ciascuna gli angoli medi di scattering, risultano per l'energia cinetica i valori seguenti:

TABELLA II.

Range (μ)	500	1500	2500	3500	4500	5500	6500
Energia (MeV)	7,8	13,1	16,3	21,0	24,2	27,6	32,0

La massa che corrisponde a un tale andamento dell'energia in funzione del range risulta $m_\tau = 946 \pm 180 m_e$.

Determinato sperimentalmente l'andamento degli spazi vuoti (gap-length) col range su tracce di mesoni μ e di protoni terminanti nell'emulsione in questione, e confrontatolo con quello della traccia attribuita al mesone τ (fig. 3), se ne deduce per quest'ultimo ⁽⁴⁾ un valore della massa $m_\tau = 995 \pm 150 m_e$.

Come media di codeste due determinazioni si ha $m_\tau = 997 \pm \pm 100 m_e$.

4. I valori delle energie cinetiche e delle masse riportati in tabella I sono vincolati all'ipotesi che le particelle secondarie siano tutte e tre mesoni π . In tabella III riportiamo i valori che si calcolano considerando le varie combinazioni possibili di mesoni π e μ (presa come base la traccia α).

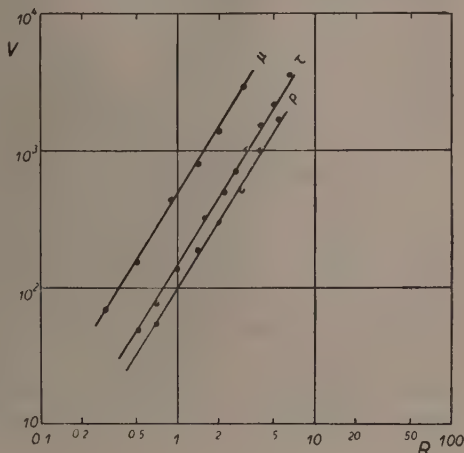


Fig. 3.

V = numero di spazi vuoti sul range R .
 R = range in mm.

TABELLA III.

a	b	c	T_a	Valori calcolati		Valori misurati	
				T_b	T_c	T_b	T_c
π	π	π	17,1	27,8	41,6	$27,3 \pm 1,2$	37 ± 5
π	π	μ	17,1	27,8	49,7	$27,3 \pm 1,2$	$28,9 \pm 4$
π	μ	π	17,1	33,7	41,6	$21,3 \pm 1$	37 ± 5
π	μ	μ	17,1	33,7	49,7	$21,3 \pm 1$	$28,9 \pm 4$
μ	π	π	13,6	17,8	27,0	$27,3 \pm 1,2$	37 ± 5
μ	π	μ	13,6	17,8	33,5	$27,3 \pm 1,2$	$28,9 \pm 4$
μ	μ	π	13,6	22,5	27,0	$21,3 \pm 1$	37 ± 5
μ	μ	μ	13,6	22,5	33,5	$21,3 \pm 1$	$28,9 \pm 4$

(4) G. BELLIBONI e M. MERLIN, «N. Cim.», 8, 349 (1951).

Si vede che un accordo, entro gli errori di misura, fra i valori calcolati e quelli misurati, non si ottiene che nella prima e nell'ultima riga, dove si suppone rispettivamente che le particelle secondarie siano tutte e tre mesoni π , o mesoni μ . In quest'ultimo caso però la massa del mesone τ risulterebbe soltanto $m_\tau = 766 m_e$ (tenuto conto dell'energia cinetica complessiva, di 63,8 MeV). Questo valore si discosta da quello dedotto dalle misure sulla traccia primaria, $m_\tau = 970 \pm 100 m_e$, molto oltre l'errore presunto. Si ha dunque un'altra forte indicazione in favore dell'ipotesi che le tre particelle secondarie siano π , valevole anche nel nostro caso, nel quale manca una indicazione specifica (come un'interazione nucleare⁽¹⁾ o una determinazione molto precisa di massa⁽³⁾) per le singole particelle.

Si presenta qui opportuna l'osservazione come l'evento da noi descritto abbia potuto fornire elementi per un'analisi accurata grazie allo spessore eccezionale dell'emulsione (1200 μ), che ha consentito di ottenere tracce lunghe nonostante la forte inclinazione di esse rispetto al piano della lastra, ed alla speciale tecnica di sviluppo e fissaggio, elaborata presso il Centre de physique nucléaire di Bruxelles, che ne ha consentito il trattamento. Al personale del Centre, ed in particolare al prof. G. Occhialini che ha personalmente seguito il trattamento, rivolgiamo perciò i più vivi ringraziamenti. L'evento è stato individuato dall'osservatore M. Greco.

Biologia. — *Ricerche roentgenografiche sul componente minerale dell'osso umano naturale non polverizzato e sull'osso demineralizzato*^(*). Nota^(**) di CIRO ANDREATTA e IRNERIO FORNI, presentata dal Corrisp. C. ANDREATTA.

Il problema della costituzione della sostanza minerale dell'osso, così importante per potere giungere alla conoscenza del metabolismo del calcio, ha finora trovato interpretazioni alquanto diverse. Secondo una prima concezione, la frazione minerale dell'osso sarebbe costituita da un unico composto del tipo dell'apatite (Hoppe, 1862; Gassmann, 1911; De Jong, 1926, Taylor e Sheard, 1929). Per Marek e Collaboratori (1934-1935), essa sarebbe costituita da una miscela di fosfato tricalcico e carbonato di calcio. Klement (1929) concilia le due concezioni ammettendo che i sali ossei siano essenzialmente costituiti da una idrossilapatite associata ad un carbonato di calcio. Numerosi si sono succeduti gli studi ed i ricercatori su tale dibattuta questione ed attualmente si contendono il campo due concezioni, sostenuta l'una dal Brandenberger e Schinz sulla unicità della frazione minerale delle ossa, rap-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia e Petrografia e nell'Istituto « Rizzoli » e Clinica Ortopedica, dell'Università di Bologna.

(**) Pervenuta all'Accademia il 14 luglio 1952.

presentata esclusivamente dall'idrossilapatite, l'altra dal Dallemagne e Collaboratori sulla miscela di due sali composti, il cosiddetto fosfato tricalcico α ed il carbonato di calcio.

Veramente fondamentale ed esauriente sul problema della costituzione della parte inorganica dell'osso umano è il lavoro di Brandenberger e Schinz (1946). Sulla base di un grande numero di radiogrammi Debye questi Autori hanno potuto stabilire senza alcun dubbio che tale componente è una idrossilapatite. I due Autori svizzeri hanno condotto le loro ricerche usando polvere di osso ottenuta raschiando, limando e segando l'osso. Poichè dalla polvere così ottenuta si potevano avere radiogrammi con linee molto deboli e scarse, i due Autori hanno riscaldato fortemente i preparati allo scopo di produrre un ingrandimento dei cristalli. Gli stessi Autori affermano e comprovano che durante tale riscaldamento non si è avuta alcuna modificazione nella specie cristallina costituente la parte inorganica dell'osso, anche arrivando ad un vero arroventamento a 950° .

Contro le conclusioni dei due Autori svizzeri, Dallemagne e Coll. (1951) esprimono il parere che con tale metodo si provoca la formazione di una « molecola » complessa che possiede tutte le caratteristiche roentgenografiche dell'idrossilapatite o della carbonato-apatite naturale, anche se il riscaldamento arriva solo a 400° perchè, secondo questi Autori, la combustione delle sostanze organiche farebbe aumentare ulteriormente la temperatura.

La presenza di apatite sarebbe dovuta, sempre secondo Dallemagne e Coll., ai riscaldamenti sopra i 400° ed alle reazioni fra la parte inorganica e la sostanza organica.

Si aggiunga che quasi tutti gli Autori hanno condotto le ricerche sulla frazione minerale dell'osso previa distruzione delle sostanze organiche con vari metodi (calcinazione, bollitura a 290° nella glicerina anidra addizionata al 5 % di potassa (Gabrielizzazione), digestione tripsica a pH 8 per 4-5 giorni (Bell-Chambers-Dawson), ecc.).

Nella nostra ricerca abbiamo seguito un nuovo concetto che ci permette di analizzare roentgenograficamente l'osso nel suo stato fisico e chimico normale. In precedenti ricerche uno di noi (Forni, 1950) ha notato che ponendo cubetti di osso normale in una soluzione a concentrazioni crescenti di acido cloridrico i sali ossei venivano disciolti dalla periferia verso il centro, restando la parte periferica di sostanza organica di densità radiografica costante (misurata con fotometro a cellula fotoelettrica), il che ci fa supporre che la soluzione cloridrica asportasse completamente la frazione libera dei sali ossei e lasciasse intatta la sostanza fondamentale.

Per ottenere i radiogrammi furono usati aghi di osso, pazientemente ritagliati mediante multiple segature e limature da un pezzo di femore secco ricavato dalla corticale, previamente posto in soluzione di alcool-etero per 24 ore. Tali operazioni, oltre a procurare l'osso ed eseguire le radiografie degli aghi prima e dopo la demineralizzazione, sono state compiute nell'Istituto Rizzoli da Forni. L'esecuzione dei radiogrammi è stata fatta nell'Istituto di Mineralogia e Petrografia di Bologna, direttamente da Andreatta o dal suo

assistente Pellizzer; l'interpretazione dei radiogrammi venne condotta da Andreatta.

In questa prima Nota facciamo conoscere i primi risultati delle nostre ricerche, riservandoci di estenderle a vari tipi di osso e di condurre, parallelamente allo studio roentgenografico, anche una serie di ricerche chimiche sulle porzioni successivamente portate in soluzione mediante attacco con HCl a diverse concentrazioni e per tempi diversi.

Sono stati eseguiti anzitutto i radiogrammi Debye di polvere d'osso, ottenuta con gli stessi metodi indicati da Brandenberger e Schinz. I radiogrammi di polveri risultarono, come a questi Autori, con righe molto attenuate; magià in questi diagrammi si può constatare l'identità con quelli pubblicati nel lavoro già ricordato. I radiogrammi degli aghi di osso hanno dato invece linee più marcate e molto più numerose di quelli della polvere d'osso; sono stati eseguiti più di 10 di tali diagrammi.

I migliori diagrammi ottenuti hanno permesso di identificare e rilevare 20 linee di cui una molto intensa; parte di queste stesse linee sono state ritrovate in tutti i diagrammi, con diversa intensità. Un confronto di questi diagrammi con quelli ottenuti da Brandenberger e Schinz sopra polvere di ossa riscaldata, ha permesso di constatarne la perfetta identità, tanto che si ritiene inutile pubblicare in questa sede le riproduzioni dei diagrammi e le misure eseguite.

L'interpretazione dei radiogrammi ottenuti da aghi di osso porta, dunque, alla sicura conclusione che il *componente minerale dell'osso umano naturale, non polverizzato e non trattato termicamente in qualsivoglia maniera risulta una apatite*, in concordanza con le conclusioni di Brandenberger e Schinz.

Il nostro lavoro ha, in conclusione, permesso di dimostrare infondate le obiezioni che sono state mosse ai due Autori svizzeri, circa un'eventuale influenza del processo di riscaldamento sopra la cristallizzazione di nuovi composti, che potrebbero formarsi per effetto del forte riscaldamento stesso.

Gli stessi aghi di osso che servirono per ottenere i primi radiogrammi, vennero successivamente sottoposti ad attacco con HCl al 3 % per la durata di tempi successivamente crescenti. Così, dopo un primo attacco durato una mezz'ora, gli aghi d'osso diedero radiogrammi mostranti le stesse linee, più attenuate, dei radiogrammi degli aghi di osso naturale. Dopo attacco per 3 ore, gli aghi più sottili risultarono alla radiografia completamente demineralizzati, mentre gli aghi più grossi risultarono demineralizzati per un involucro esterno più o meno ampio. In questi ultimi casi le radiografie mostrarono una sottile parte interna abbastanza opaca. I radiogrammi Debye degli aghi contenenti ancora una sottile parte non demineralizzata, permisero di rilevare sempre le stesse linee d'osso naturale con intensità molto diminuita.

Questa serie di esperienze di attacchi con HCl e successiva indagine per radiogramma e radiografia, permettono di trarre subito un'altra conclusione: *la parte minerale dell'osso umano viene allontanata gradualmente senza selettività*.

vità di specie cristallina, nello stesso posto. In altre parole, l'attacco con acido asporta, in quantità man mano crescenti nelle successive sperimentazioni, cristallini di apatite.

Portando a fondo la demineralizzazione con attacco con HCl al 3 % per molti giorni, gli aghi di osso risultarono radiograficamente completamente privi di sostanza minerale, e i radiogrammi Debye degli stessi non mostrarono alcuna traccia delle numerose linee rilevate nell'osso naturale e attribuibili alla apatite. Si deve aggiungere subito che i radiogrammi stessi presentavano però una linea forte e netta, seppure alquanto sfumata, e due aloni.

Dai radiogrammi degli aghi di osso completamente demineralizzati, fu fatta la misurazione della linea marcata e netta e degli aloni. Il primo alone (partendo dal centro) presenta il bordo esterno a una distanza eguale o leggermente inferiore a quella delle due prime linee misurate nel radiogramma dell'osso naturale. Il bordo esterno dell'alone maggiore (più esterno) presenta posizione variabile e perciò non riferibile con sicurezza ad alcuna linea del radiogramma dell'osso naturale.

Molto significativa è invece la linea netta che si osserva nei radiogrammi dell'osso completamente demineralizzato. Questa linea presenta posizione molto stabile, oscillando di un grado nei 5 radiogrammi eseguiti. Si noti che la posizione di tale linea è diversa di pochissimo dalla linea più grossa presentata dai radiogrammi dell'osso naturale. La linea più intensa dei radiogrammi degli aghi di osso naturale risultò, dal centro, facendo la media di una decina di letture, a $16^{\circ} 40'$; la linea unica misurabile nei radiogrammi degli aghi di osso completamente demineralizzati risultò, come media di sei letture, a $15^{\circ} 37'$. Il minimo ottenuto nelle diverse letture della linea forte dei radiogrammi dell'osso naturale risultò superiore al massimo ottenuto nelle diverse letture dell'unica linea del diagramma dell'osso demineralizzato.

La spiegazione della presenza di questa linea del diagramma dell'osso demineralizzato è evidentemente un problema tutt'altro che semplice; prima di giungere ad una interpretazione veramente convincente occorrono laboriose e lunghe ricerche.

Data l'intensità di tale linea, però, non ci pare ammissibile una sua attribuzione a parti di apatite rimaste indisciolte, tanto più che, come abbiamo detto, le radiografie degli aghi demineralizzati fanno ritenere completo l'asporto della parte minerale. Inoltre non esiste esatta concordanza di posizione fra questa linea e la più forte del diagramma dell'osso naturale e le linee dell'apatite si affievoliscono tutte solidalmente durante il progredire della demineralizzazione.

Tuttavia non è da escludere in maniera assoluta che la linea a $15,5^{\circ}$ sia da riferire a parti di apatite rimaste indisciolte.

Abbiamo in corso altre ricerche in proposito e in questa sede perciò non intendiamo esporre ipotesi particolari, che possono essere numerose e varie. Diremo solo che *non è improbabile che la linea a $15,5^{\circ}$ dei diagrammi dell'osso demineralizzato sia da attribuire alla sostanza organica dell'osso stesso.*

BIBLIOGRAFIA.

- BRANDENBERGER E., SCHINZ H. R., « Helv. med. Acta », 12, Suppl. XVI, 1945.
 BRANDENBERGER E., SCHINZ H. R., « Experientia », 4, 59 (1948).
 DALLEMAGNE M.-J., « J. Physiologie », 43, 425-515 (1951).
 DE JONG W. F., « Rec. Trav. chim. Pays-Bas », 45, 445 (1926).
 FORNI I., « Atti XXXV Congr. Soc. Ital. Ortopedia », 281-287, 1951 (coll. Pais C.).
 GASSMANN TH., « Hoppe-Seyl. Z. », 70, 161 (1911).
 HOPPE F., « Virchows Arch. », 24, 13 (1862).
 KLEMENT H., « Hoppe-Seyl. Z. », 184, 132 (1929).
 IDEM, « Hoppe-Seyl. Z. », 185, 237 (1929).
 MAREK J., WELLMANN O., URBANYI L., « Hoppe-Seyl. Z. », 226, 3 (1934).
 IDEM, « Hoppe-Seyl. Z. », 234, 165 (1935).
 TAYLOR N. W., SHEARD C., « J. biol. Chem. », 81, 479 (1929).

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Teoremi di esistenza e di unicità per il problema di Cauchy nella teoria delle equazioni lineari a derivate parziali* (*). Nota I di CARLO PUCCI, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

Nella presente e in una Nota successiva si danno teoremi di esistenza ed unicità nel campo reale per il seguente problema di Cauchy

$$(1) \quad \frac{\partial^m u}{\partial t^m} - a \frac{\partial^n u}{\partial x^n} = f(x, t),$$

$$(2) \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad \left[\frac{\partial^i u}{\partial t^i} \right]_{t=0} = u_i(x), \quad i=1, 2, \dots, m-1,$$

relativo al rettangolo $R \equiv [x' \leq x \leq x'', -l \leq t \leq l]$ e alla striscia $S \equiv [x' \leq x \leq x'']$, avendo indicato con a una costante reale e con $f(x, t)$, $u_i(x)$ funzioni reali assegnate.

Tale problema è stato proposto da M. Picone in una Nota lineea del 1938 (*) nella quale ha stabilito il teorema di unicità nel campo reale nel caso $n = 2$, $m > 2$, $a > 0$.

Questo studio è fondato sulla risoluzione di una equazione integro-differenziale mediante la determinazione di una serie convergente alla soluzione.

Nel § 1 si dà un teorema di esistenza nel rettangolo R di una soluzione del problema di Cauchy considerato.

Nel § 2 si dà il corrispondente teorema di unicità.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta del 14 giugno 1952.

(1) M. PICONE, *Nuove determinazioni per gli integrali delle equazioni lineari a derivate parziali*. « Rend. Acc. Lincei », 6, 28, pp. 339-348 (1938).

Nel § 3 si stabilisce un teorema di esistenza ed unicità relativo a tutta la striscia S.

Nel § 4 si esaminano separatamente i casi $m > n$, $m = n$, $m < n$ confrontando i risultati conseguiti con quelli già noti e si chiarisce inoltre con un esempio come le ipotesi enunciate nei teoremi di esistenza siano legate alla natura del problema.

1. Indichiamo con R il dominio rettangolare del piano (x, t) definito dalle limitazioni $x' \leq x \leq x''$, $-l \leq t \leq l$. Indichiamo con C la classe delle funzioni $u(x, t)$ definite in R, ivi dotate di derivate parziali rispetto alla variabile t fino all'ordine n che siano funzioni continue in R rispetto alla variabile t , ed ivi dotate di derivate parziali di qualsiasi ordine rispetto ad x limitate in R. Sia infine $f(x, t)$ una funzione reale definita in R ed $u_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, m-1$, una funzione reale definita nell'intervallo $[x', x'']$.

TEOREMA I. — Se $f(x, t)$ è continua in R rispetto a t e se le funzioni $f(x, t)$, $u_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, m-1$, hanno derivate di qualsiasi ordine rispetto ad x che per $x' \leq x \leq x''$, $-l \leq t \leq l$ soddisfano la limitazione

$$(3) \quad \left| \frac{\partial^h f(x, t)}{\partial x^h} \right|, \quad \left| \frac{d^h u_i(x)}{dx^h} \right| < \frac{M \Gamma\left(\frac{m}{n} h + 1\right)}{\rho^{\frac{m}{n} h}}, \quad i = 0, 1, \dots, m-1; \quad h = 1, 2, \dots \quad (2)$$

ove M e ρ sono due numeri positivi, $\rho > l \sqrt[n]{a}$, allora esiste almeno una funzione $u(x, t)$, appartenente alla classe C, che soddisfa in R alla equazione differenziale (1) e alle condizioni iniziali (2) ed è rappresentata in R dalla serie uniformemente ed assolutamente convergente

$$(4) \quad u(x, t) = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{m-1} a^h \frac{d^h u_i(x)}{dx^h} \frac{t^{mh+i}}{(mh+i)!} + \sum_{h=0}^{\infty} a^h \int_0^t \frac{(t-\tau)^{(h+1)m-1}}{[(h+1)m-1]!} \frac{\partial^h f(x, \tau)}{\partial x^h} d\tau.$$

Inoltre le derivate rispetto ad x della soluzione $u(x, t)$ soddisfano per $x' \leq x \leq x''$, $-l/3 \leq t \leq l/3$, alla limitazione

$$(5) \quad \left| \frac{\partial^s u(x, t)}{\partial x^s} \right| < \frac{L \Gamma\left(\frac{m}{n} s + 1\right)}{(\rho/3)^{\frac{m}{n} s}}, \quad s \geq \frac{n}{m},$$

ove L è una opportuna costante positiva.

(2) Secondo una definizione di M. GEVREY (Cfr. D. BERNSTEIN, *Existence theorems in partial differential equations*. « Annals of Math. Studies », vol. 23, p. 163 (1950)) le funzioni $f(x, t)$, $u_i(x)$ che soddisfano con le loro derivate rispetto ad x la (3) si chiamano, relativamente ad x , funzioni H di classe m/n . Se $m \leq n$ tali funzioni sono analitiche rispetto ad x . Nel caso $m > n$ le ipotesi su $f(x, t)$, $u_i(x)$ sono meno restrittive dell'analiticità rispetto ad x .

Supposto che esista la funzione $u(x, t)$, appartenente alla classe C, di cui dobbiamo provare l'esistenza, dalla (1) segue

$$\int_0^t \frac{(t-\tau)^{m-1}}{(m-1)!} \frac{\partial^m u(x, \tau)}{\partial \tau^m} d\tau = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{m-1}}{(m-1)!} f(x, \tau) d\tau + a \int_0^t \frac{(t-\tau)^{m-1}}{(m-1)!} \frac{\partial^n u(x, \tau)}{\partial x^n} d\tau$$

e dalla (2), integrando per parti,

$$\int_0^t \frac{(t-\tau)^{m-1}}{(m-1)!} \frac{\partial^m u(x, \tau)}{\partial \tau^m} d\tau = u(x, t) - \sum_{i=0}^{m-1} u_i(x) \frac{t^i}{i!}$$

e quindi

$$(6) \quad u(x, t) = \sum_{i=0}^{m-1} u_i(x) \frac{t^i}{i!} + \int_0^t \frac{(t-\tau)^{m-1}}{(m-1)!} f(x, \tau) d\tau + a \int_0^t \frac{(t-\tau)^{m-1}}{(m-1)!} \frac{\partial^n u(x, \tau)}{\partial x^n} d\tau.$$

Derivando n volte rispetto ad x si ottiene

$$(7) \quad \frac{\partial^n u(x, \tau)}{\partial x^n} = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{d^n u_i(x)}{dx^n} \frac{\tau^i}{i!} + \int_0^\tau \frac{(\tau-\vartheta)^{m-1}}{(m-1)!} \frac{\partial^n f(x, \vartheta)}{\partial x^n} d\vartheta + a \int_0^\tau \frac{(\tau-\vartheta)^{m-1}}{(m-1)!} \frac{\partial^{2n} u(x, \vartheta)}{\partial x^{2n}} d\vartheta$$

essendo lecita la derivazione sotto il segno d'integrale per la limitatezza in R delle derivate parziali rispetto ad x di $f(x, t)$, $u(x, t)$. Avendosi inoltre per integrazione per parti

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{m-1}}{(m-1)!} \int_0^\tau \frac{(\tau-\vartheta)^{m-1}}{(m-1)!} \frac{\partial^n f(x, \vartheta)}{\partial x^n} d\vartheta d\tau &= \int_0^t \frac{(t-\tau)^{2m-1}}{(2m-1)!} \frac{\partial^n f(x, \tau)}{\partial x^n} d\tau, \\ \int_0^t \frac{(t-\tau)^{m-1}}{(m-1)!} \int_0^\tau \frac{(\tau-\vartheta)^{m-1}}{(m-1)!} \frac{\partial^{2n} u(x, \vartheta)}{\partial x^{2n}} d\vartheta d\tau &= \int_0^t \frac{(t-\tau)^{2m-1}}{(2m-1)!} \frac{\partial^{2n} u(x, \tau)}{\partial x^{2n}} d\tau, \end{aligned}$$

sostituendo la (7) nella (6) si ottiene

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{i=0}^{m-1} u_i(x) \frac{t^i}{i!} + \sum_{i=0}^{m-1} a \frac{d^n u_i(x)}{dx^n} \frac{t^{n+i}}{(n+i)!} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{m-1}}{(m-1)!} f(x, \tau) d\tau + \\ &+ a \int_0^t \frac{(t-\tau)^{2m-1}}{(2m-1)!} \frac{\partial^n f(x, \tau)}{\partial x^n} d\tau + a^2 \int_0^t \frac{(t-\tau)^{2m-1}}{(2m-1)!} \frac{\partial^{2n} u(x, \tau)}{\partial x^{2n}} d\tau. \end{aligned}$$

Analogamente si può sostituire in questa espressione alla derivata parziale di $u(x, t)$ rispetto ad x di ordine $2n$ l'espressione ad essa equivalente che si ottiene per derivazione dalla (7). Iterando tale procedimento si ottiene

come presunta rappresentazione in serie di $u(x, t)$ la (4). Da ciò siamo indotti a ricercare una dimostrazione del teorema che consista nel provare che le serie

$$(8) \quad S_i(x, t) \sim \sum_{h=0}^{\infty} a^h \frac{d^{mh} u_i(x)}{dx^{nh}} \frac{t^{mh+i}}{(mh+i)!}, \quad i=0, 1, \dots, m-1,$$

$$(9) \quad F(x, t) \sim \sum_{h=0}^{\infty} a^h \int_0^t \frac{(t-\tau)^{(h+1)m-1}}{[(h+1)m-1]!} \frac{\partial^{hn} f(x, \tau)}{\partial x^{hn}} d\tau$$

sono uniformemente ed assolutamente convergenti in R e che la loro somma, data dalla (4), è la soluzione del problema di Cauchy proposto.

Notiamo preliminarmente che, indicati con r e s due qualsiasi numeri interi, la serie a termini positivi

$$(10) \quad P_{r,s} \sim \sum_{h=\sigma}^{\infty} \frac{\text{MG}\left(mh + \frac{m}{n}s + 1\right)}{\rho^{mh + \frac{m}{n}s}} |a|^h \frac{t^{mh+r}}{(mh+r)!}, \quad \sigma = \max\left[0, -\frac{r}{m}\right],$$

è convergente. Infatti applicando il criterio della radice si ottiene per la formula di Stirling ($0 < \theta_1, \theta_2 < 1$)

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow +\infty} \sqrt[h]{\frac{\text{MG}\left(mh + \frac{m}{n}s + 1\right) |a|^h t^{mh+r}}{\rho^{mh + \frac{m}{n}s} (mh+r)!}} &= \\ &= \frac{|a| t^m}{\rho^m} \lim_{h \rightarrow +\infty} \sqrt[h]{\frac{\left(mh + \frac{m}{n}s\right)^{mh + \frac{m}{n}s} e^{-mh - \frac{m}{n}s} \sqrt{2\pi\left(mh + \frac{m}{n}s\right)} e^{\frac{\theta_1}{12}\left(mh + \frac{m}{n}s\right)}}{(mh+r)^{mh+r} e^{-mh-r} \sqrt{2\pi(mh+2)} e^{\frac{\theta_2}{12}(mh+2)}}} = \frac{|a| t^m}{\rho^m} \end{aligned}$$

e per ipotesi è $\rho > l\sqrt[m]{|a|}$.

La serie (8) è uniformemente ed assolutamente convergente in R perchè per la (3) la serie dei suoi valori assoluti è minorante in R della serie numerica convergente $P_{i,0}$.

Derivando termine a termine la serie (8) s volte rispetto ad x , e v volte rispetto a t , si ottiene la serie

$$\sum_{h=\sigma}^{\infty} a^h \frac{d^{mh+s} u_i(x)}{dx^{nh+s}} \frac{t^{mh+i-v}}{(mh+i-v)!}, \quad \text{con } \sigma = \max\left[0, \frac{v-i}{m}\right],$$

che è pure uniformemente ed assolutamente convergente in R essendo la serie dei suoi valori assoluti minorante per la (4) della serie $P_{i-v,s}$. Ne segue quindi, per un noto teorema di derivazione per serie del Dini, che la serie (8) definisce in R una funzione $S_i(x, t)$ che ha ivi derivate parziali di qualsiasi ordine rispetto ad x e t limitate.

Essendo per le (3)

$$\left| a^h \int_0^t \frac{(t-\tau)^{(h+1)m-1}}{[(h+1)m-1]!} \frac{\partial^{nh} f(x, \tau)}{\partial x^{nh}} d\tau \right| < a^h \frac{M \Gamma(mh+1)}{\rho^{mh}} \frac{t^{(h+1)m}}{[(h+1)m]!}$$

la serie (9) è uniformemente e assolutamente convergente in R essendo la serie dei suoi valori assoluti minorante della serie convergente $P_{m,0}$.

Derivando termine a termine la serie (9) s volte rispetto ad x e v volte rispetto a t , $v \leq m$, si ottiene la serie

$$\sum_{h=0}^{\infty} a^h \int_0^t \frac{(t-\tau)^{(h+1)m-v-1}}{[(h+1)m-v-1]!} \frac{\partial^{nh+s} f(x, \tau)}{\partial x^{nh+s}} d\tau$$

che è uniformemente ed assolutamente convergente in R essendo la serie dei suoi valori assoluti minorante per la (3) della serie convergente $P_{m-v,s}$. Ne segue che la serie (9) definisce in R una funzione continua $F(x, t)$ che possiede derivate parziali di qualsiasi ordine rispetto ad x , che sono funzioni limitate in R_t e possiede derivate parziali fino all'ordine m rispetto a t , che sono funzioni continue in R rispetto alla variabile t .

Per quanto abbiamo provato relativamente alle serie $S_i(x, t)$, $F(x, t)$, la (4) definisce in R una funzione $u(x, t)$ della classe C .

Proviamo ora che $u(x, t)$ è soluzione del problema di Cauchy (1), (2). È infatti

$$\begin{aligned} \frac{\partial^m S_i(x, t)}{\partial t^m} &= \sum_{h=1}^{\infty} a^h \frac{d^{nh} u_i(x)}{dx^{nh}} \frac{t^{m(h-1)+i}}{[m(h-1)+i]!} = \\ &= a \sum_{h=0}^{\infty} a^h \frac{d^{nh+n} u_i(x)}{dx^{nh+n}} \frac{t^{mh+i}}{(mh+i)!} = a \frac{\partial^n S_i(x, t)}{\partial x^n}, \\ \frac{\partial^m F(x, t)}{\partial t^m} &= f(x, t) + \sum_{h=1}^{\infty} a^h \int_0^t \frac{(t-\tau)^{mh-1}}{(mh-1)!} \frac{\partial^{nh} f(x, \tau)}{\partial x^{nh}} d\tau = \\ &= f(x, t) + a \sum_{h=0}^{\infty} a^h \int_0^t \frac{(t-\tau)^{(h+1)m-1}}{[(h+1)m-1]!} \frac{\partial^{(h+1)n} f(x, \tau)}{\partial x^{(h+1)n}} d\tau = f(x, t) + a \frac{\partial^n F(x, t)}{\partial x^n}, \end{aligned}$$

e quindi per la (4), (8), (9)

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m} - a \frac{\partial^n u}{\partial x^n} = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\partial^m S_i}{\partial t^m} + \frac{\partial^m F}{\partial t^m} - a \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\partial^n S_i}{\partial x^n} - a \frac{\partial^n F}{\partial x^n} = f(x, t).$$

È inoltre

$$S_0(x, 0) = u_0(x), \quad S_i(x, 0) = 0 \quad \text{per } i \neq 0,$$

$$\left[\frac{\partial^i S_i}{\partial t^i} \right]_{t=0} = u_i(x), \quad \left[\frac{\partial^r S_i}{\partial t^r} \right]_{t=0} = 0 \quad \text{per } r \neq i,$$

e quindi

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \left[\frac{\partial^i u}{\partial t^i} \right]_{t=0} = u_i(x) \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, m-1.$$

Ci resta infine da dimostrare che le derivate parziali di $u(x, t)$ rispetto ad x soddisfano alle limitazioni (5) per $|t| < l/3$.

Per le (3) è

$$\left| \frac{\partial^s u(x, t)}{\partial x^s} \right| = \left| \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{m-1} a^h \frac{d^{nh+s} u_i(x)}{dx^{nh+s}} \frac{t^{mh+i}}{(mh+i)!} + \sum_{h=0}^{\infty} a^h \int_0^t \frac{(t-\tau)^{(h+1)m-1}}{[(h+1)m-1]!} \frac{\partial^{nh+s} f(x, \tau)}{\partial x^{nh+s}} d\tau \right| <$$

$$< \sum_{i=0}^m \sum_{h=0}^{\infty} \frac{M \Gamma\left(mh + \frac{m}{n}s + 1\right)}{\rho^{mh + \frac{m}{n}s}} \frac{|a|^h |t|^{mh+i}}{(mh+i)!} < \frac{M \Gamma\left(\frac{m}{n}s + 1\right)}{\rho^{\frac{m}{n}s}} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(mh + \frac{m}{n}s + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{n}s + 1\right) (mh)!} \frac{|a|^h |t|^{mh}}{\rho^{mh}} \sum_{i=0}^m |t|^i.$$

Posto $mh = u$, $\frac{m}{n}s = v$, per $u, v > 1$ dalla formula di Stirling segue

$$\frac{\Gamma\left(mh + \frac{m}{n}s + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{n}s + 1\right) (mh)!} = \frac{(u+v)^{u+v} \sqrt{2\pi(u+v)} e^{-u-v} e^{\frac{\theta_1}{12(u+v)}}}{u^u \sqrt{2\pi u} e^{-u} e^{\frac{\theta_2}{12u}} v^v \sqrt{2\pi v} e^{-v} e^{\frac{\theta_3}{12v}}} <$$

$$< 2 \frac{(u+v)^u}{u^u} \frac{(u+v)^v}{v^v} \sqrt{\frac{u+v}{uv}} < 4 \cdot 3^{mh} \cdot 3^{\frac{m}{n}s}.$$

Si ha quindi per $s > n/m$

$$\left| \frac{\partial^s u(x, t)}{\partial x^s} \right| < \frac{M \Gamma\left(\frac{m}{n}s + 1\right)}{(\rho/3)^{\frac{m}{n}s}} \left[1 + 4 \sum_{h=1}^{\infty} \frac{|a|^h |t|^{mh}}{(\rho/3)^{mh}} \right] \sum_{i=0}^m |t|^i.$$

La serie

$$\sum_{h=1}^{\infty} |a|^h |t|^{mh} \left(\frac{\rho}{3}\right)^{-mh}$$

è uniformemente convergente per $|t| < l/3$ essendo $\rho^m > l^m |a|$ e quindi, posto

$$L = M \left[1 + 4 \sum_{h=1}^{\infty} |a|^h l^{mh} \rho^{-mh} \right] \sum_{i=0}^m \left(\frac{l}{3}\right)^i,$$

segue la limitazione (5).

Analisi matematica. — *Sur la solution élémentaire de l'équation de la chaleur - note complémentaire.* Nota^(*) di MIROSLAW KRZYŻAŃSKI, presentata dal Socio M. PICONE.

1. Dans la note antérieure⁽¹⁾ j'ai exposé la démonstration du théorème suivant:

La solution élémentaire de l'équation de la chaleur

$$(1) \quad u_{xx} = u_y,$$

c'est à dire la fonction

$$U(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\pi y}} e^{-x^2/4y} & \text{pour } y > 0 \\ 0 & \text{pour } y = 0, x \neq 0, \end{cases}$$

est la seule solution de (1), régulière⁽²⁾ dans l'ensemble $\gamma(h) : 0 \leq y \leq h, x^2 + y^2 > 0$ (h étant un nombre positif quelconque) et satisfaisant aux condition suivantes

$$1^\circ \quad u(x, y) \geq 0 \quad \text{dans } \gamma(h),$$

$$2^\circ \quad u(x, 0) = 0 \quad \text{pour } x \neq 0,$$

$$3^\circ \quad \text{l'intégrale}$$

$$j(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, y) dx$$

est bornée pour $0 \leq y \leq h$ et l'on a $\lim_{y \rightarrow 0} j(x, y) = 1$.

Or M. D. V. Widder m'a voulu bien communiquer que ce théorème peut être déduit aussitôt de celui démontré par Lui-même⁽³⁾ et qu'on peut, en outre, éliminer l'hypothèse 3°. On peut notamment démontrer le théorème qui suit:

(*) Pervenuta all'Accademia il 21 giugno 1952.

(1) « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei », ser. 8, vol. VIII, pp. 193-199 (1950).

(2) Voir le travail cité, p. 193.

(3) D. V. WIDDER, *Positive temperatures on an infinite rod*. « Trans. of the American Math. Soc. », vol. 55 n. 1, pp. 85-95 (1944).

THÉORÈME. — Toute solution de l'équation (1), régulière dans $\gamma(h)$ et y satisfaisant aux conditions 1° et 2° est de la forme suivante

$$u(x, y) = AU(x, y) = \frac{A}{2\sqrt{\pi y}} e^{-x^2/4y},$$

A étant une constante non négative.

Je vais exposer la démonstration, dont l'idée m'a été communiquée par M. Widder.

2. Je commence par citer le théorème de M. Widder, dont on déduira aussitôt le théorème, énoncé au nr. 1⁽⁴⁾.

Pour qu'une fonction $u(x, y)$ soit non négative, de classe C^2 , pour $0 < y < h$, $-\infty < x < +\infty$, et y satisfasse à l'équation (1), il faut et il suffit que l'on ait

$$(2) \quad u(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x-s, y) d\alpha(s),$$

$\alpha(s)$ étant une fonction non décroissante pour $-\infty < s < +\infty$, et l'intégrale au second membre de (2) étant convergente.

Lorsqu'en outre $u(x_0, 0) = 0$, x_0 étant un nombre réel, on a

$$\liminf_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x+x_0) - \alpha(x_0)}{x} = 0^{(5)}.$$

3. Passons maintenant à la démonstration du théorème du nr. 1. D'après l'hypothèse 1° et le théorème de M. Widder, la fonction $u(x, y)$ peut être mise sous la forme (2). D'autre part, d'après l'hypothèse 2°, on a $u(x, 0) = 0$ toute la fois que $x \neq 0$, et il résulte du théorème de M. Widder que $\alpha'(x) = 0$ pour $x \neq 0$, de sorte que

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x-s, y) d\alpha(s) = U(x, y) [\alpha(+0) - \alpha(-0)] = AU(x, y),$$

avec

$$A = \alpha(+0) - \alpha(-0).$$

(4) D. V. WIDDER, loc. cit., th. VI à la p. 92.

(5) Loc. cit., p. 94-95.

Astronomia. — *La spedizione scientifica dell'Osservatorio Astronomico di Roma a Khartoum (Sudan) per l'eclisse totale di Sole del 25 febbraio 1952. Risultati generali delle osservazioni.* Nota di MASSIMO CIMINO, presentata (*) dal Socio G. ARMELLINI.

1. Alla spedizione scientifica per l'eclisse totale di Sole del 25 febbraio 1952 da me organizzata e diretta per conto dell'Osservatorio Astronomico di Roma su Monte Mario, si sono associati i proff. R. Cialdea e P. Dominici per parte dell'Istituto Nazionale di Geofisica. La spedizione ebbe dunque un compito misto, astronomico e geofisico.

Per quanto riguarda la parte astronomica, il programma comprendeva ricerche sulla fotometria, sulla polarizzazione della luce e sulla struttura della corona esterna e, particolarmente, dei raggi coronali deboli o pennacchi. Come è ben noto, la luce che proviene dalla corona solare si dimostra parzialmente polarizzata con direzione di polarizzazione (direzione del vettore magnetico) approssimativamente radiale. Le prime osservazioni visuali di questo fenomeno risalgono all'eclisse totale di Sole del 1860, osservata in Spagna dal Padre A. Secchi e dal Prazmoski. Dall'insieme di tutte le osservazioni fatte da allora fino ad oggi si può asserire che la percentuale della luce coronale polarizzata dipende dalla distanza dal bordo solare, tendendo ad aumentare con essa fino ad un certo limite. Non si possiede però, fino ad oggi, un materiale di osservazione sufficiente per poter concludere, con certezza, in qual misura la polarizzazione vari con la lunghezza d'onda, mentre rimane ancora assai incerta la sua dipendenza dalla distanza dal bordo. Assai probabilmente si tratta di valori che cambiano con la fase del ciclo solare, e sono inoltre fortemente perturbati dai particolari fenomeni fotosferici e cromosferici del momento (protuberanze, brillamenti, macchie, ecc.). A titolo generalmente indicativo si può assegnare una percentuale di luce polarizzata dell'ordine del 15-30 % (Young, Johnson, Cohn) alla distanza di $1'$ dal bordo solare (cioè alla distanza di $1/30$ del diametro solare). La percentuale sale al 30-60 % alla distanza di $10'$, alla quale si può dire che ha termine (in media) la corona interna. Per distanze maggiori, e cioè per la corona esterna e pei pennacchi (i quali possono spingersi fino a distanze di parecchi diametri solari) pochissimo è conosciuto. Tenendo presente che la polarizzazione della corona interna può essere studiata anche fuori eclisse coi più moderni tipi di coronografi, mentre per quanto riguarda la corona più esterna ed i raggi coronali questo non è ancora possibile, si comprende l'importanza di quest'ultimo genere di ricerca durante i brevi istanti delle eclissi totali.

(*) Nella seduta del 14 giugno 1952.

Ma anche lo studio fotometrico dei pennacchi e della loro forma ha la sua importanza. Infatti, mentre da una parte c'è il problema del collegamento dei fenomeni coronali con quelli della luce zodiacale, lo studio della forma della corona e dei raggi coronali mira, dall'altra, a gettare luce sulla dinamica degli strati esterni del Sole, sia in relazione ai fenomeni fotosferici, sia in relazione al ciclo, e sia infine ai correlati fenomeni magnetici solari. Riservandomi di rendere conto in altra Nota dei risultati sulla polarizzazione della luce coronale che sarà possibile trarre dalle misure microfotometriche sul materiale da me raccolto durante quest'ultima eclisse, darò ora, dopo un cenno sull'organizzazione della mia missione, un resoconto delle osservazioni visuali, assieme ad una descrizione la più precisa possibile della forma della corona e dei pennacchi, accompagnandola con la riproduzione di alcune fotografie.

2. L'eclisse totale di Sole del 25 febbraio 1952 rimarrà certamente memorabile negli annali delle spedizioni astronomiche per il grande interesse suscitato negli ambienti scientifici e per l'eccezionale affluenza di osservatori e ricchezza di mezzi strumentali. La striscia della totalità partiva da un punto situato nel centro dell'Oceano Atlantico (long. $21^{\circ}24'$ W, lat. $+0^{\circ}39'$), tagliava la costa dell'Africa Occidentale presso Libreville, e, attraversando successivamente il Continente Africano, l'Arabia, la Persia, sfiorava le coste meridionali del Mar Caspio per finire nella Siberia presso Semipalatinsk (long. $99^{\circ}37'$ E, lat. $+54^{\circ}19'$). Benché a prima vista sembrasse possibile una grande libertà di scelta per il posto di osservazione, pure, dopo attento esame, la scelta doveva finire col cadere quasi inevitabilmente nel Sudan, nei dintorni della capitale Khartoum. Infatti qui si presentavano le condizioni più favorevoli da tutti i punti di vista: massima durata della totalità ($3^m 9^s$), Sole alto all'orizzonte (totalità alle $11^h 9^m$ di tempo civile locale), condizioni climatiche stagionali favorevoli con buona probabilità di cielo sereno, accesso relativamente facile e buoni servizi sul posto (acqua, energia elettrica, mezzi di trasporto, alberghi, ecc.). Ogni altra località, invece, presentava o difficoltà di accesso (Africa Centrale, Arabia, Russia), oppure condizioni climatiche meno favorevoli (Iran). Non c'è dunque da meravigliarsi se la quasi totalità delle missioni scientifiche abbia finito col darsi appuntamento a Khartoum con un totale di quindici missioni di dieci diverse nazioni (tra le quali due missioni italiane) ed oltre sessanta astronomi, senza contare il seguito ⁽¹⁾.

L'addensamento di tante missioni in una zona ristretta non può sfuggire ad una critica. È bensì vero che secondo i rilievi meteorologici degli ultimi decenni il mese di febbraio a Khartoum si presenta senza piogge e quasi privo di nebulosità (nebulosità media 1,2; nessuna pioggia); ma

(1) Soltanto alcune missioni statunitensi della U. S. Air Force si erano sparpagliate lungo la linea della totalità, da Libreville (Gabon) attraverso l'Africa fino a Fahram (Arabia), con un programma prevalentemente di carattere geodetico (esatta determinazione dei tempi dei contatti con metodi fotoelettrici). Si aggiungevano le missioni russe che operavano nel proprio territorio.

sono frequenti, le tempeste di sabbia, e questo fatto è stato sottovalutato da tutti. Durante la mia permanenza nel Sudan dall'8 febbraio al 3 marzo ho avuto modo di sperimentare ben tre di tali tempeste, che oscuravano il Sole riducendo la visibilità a poche centinaia di metri. Una di queste ebbe luogo il giorno 22 febbraio e, per nostra fortuna, sfogò nei due giorni successivi, lasciando però per il giorno dell'eclisse sensibili tracce di polvere nell'atmosfera e disturbando così i programmi fotometrici più delicati.

3. Per il mio programma di osservazione sulla polarizzazione della corona è stato necessario apprestare uno strumento apposito, composto sostanzialmente di tre camere fotografiche del tipo A.B.R. 88 per aerofotogrammetria, fabbricate e gentilmente concesse in prestito dalla Ditta Ottico-Meccanica Italiana (OMI). Esse presentano il grande vantaggio di un magazzino di pellicola a rullo sufficiente fino a 90 pose del formato 9×12 , con avanzamento immediato della pellicola tra una posa e l'altra. Alle macchine furono adattati dalla stessa ditta 3 obbiettivi «Galileo» aerostigmatici, di 300 mm. di distanza focale e rapporto di luminosità $1/4,5$; il diametro solare risulta così, sul piano focale, di circa 3 mm., mentre il formato della pellicola è sufficiente a contenere fino a 15 diametri solari in ogni direzione.

Le tre macchine furono montate nell'officina dell'Osservatorio con gli assi ottici paralleli tra loro, su una montatura equatoriale dotata di movimento orario elettrico, con motorino a velocità regolabile alimentato da accumulatori. Un sistema di piastre metalliche scorrevoli davanti agli obbiettivi permetteva di togliere o inserire rapidamente i filtri e i polaroidi. Questi ultimi erano 3 *Pola-screens* della Kodak e *Wratten K2 e C5* i filtri gialli ed azzurri. I tre otturatori erano collegati ad un dispositivo che permetteva di aprirli e chiuderli contemporaneamente. Per l'emulsione delle pellicole (appositamente fabbricate dalla Ditta «Ferrania»), fu scelta la Superpancro P. 3, 17/10, a grana fina. Tutto l'apparecchio, col suo cannocchiale di guida, pesava (compreso un robusto cavalletto di legno) circa 120 kg., e poteva essere montato e fatto funzionare con facilità anche da una sola persona.

Il programma di osservazione comprendeva pose senza filtri e diversi diaframmi, pose simultanee delle tre camere con un polaroide ciascuna orientato a 60° l'uno dall'altro (a partire da una direzione parallela all'asse polare solare), e pose con i detti polaroidi e filtri gialli e azzurri (i filtri azzurri però non furono usati perchè giunti in ritardo). Come è noto, la indicata disposizione dei polaroidi permette di ricavare, dal confronto delle tre pose simultanee, non solo la percentuale della luce polarizzata in ciascun punto della corona, ma anche la direzione del piano di polarizzazione. I tempi di posa furono stabiliti da una frazione di secondo fino ad un minuto, allo scopo di poter seguire, se possibile, i dettagli coronali dalla zona vicino al bordo fino alla estremità dei raggi coronali più deboli. Una pellicola dello stesso tipo è servita per la calibrazione, impressionando su di essa un cuneo fotometrico alla luce diretta del Sole (opportunamente attenuata con filtri

fotografici), impiegando stessi tempi di posa e sviluppando nella stessa bacinella con le tre pose simultanee di ciascuna serie.

Partita dall'Italia il 26 gennaio 1952, la spedizione raggiunse Alessandria d'Egitto il 30 per via di mare, proseguendo via treno, battello fluviale e poi di nuovo treno fino Khartoum, ove giunse, non senza qualche peripezia, il 10 febbraio 1952, portando seco oltre una tonnellata di bagaglio. Una volta sul posto, grazie specialmente alla amorevole accoglienza dei Padri di quella Missione Cattolica, fu possibile situare subito gli strumenti entro il vasto recinto di una scuola suburbana, ove furono anche posti a nostra disposizione un vasto locale per il laboratorio ed un altro per la camera oscura. Il sostegno delle camere, parzialmente interrato per maggiore stabilità, fu situato al riparo dalle eventuali raffiche di vento tra due muretti e circondato da opportuni tendaggi. La missione lasciò Khartoum in due tempi, tra il 3 e il 10 marzo, rientrando in Italia, per lo stesso itinerario, tra l'11 ed il 18 dello stesso mese.

4. Come si è già accennato, la giornata dell'eclisse fu serena, senza nebulosità apparente. Ma essendosi levata tre giorni prima una delle solite tempeste di sabbia — fortunatamente sfogatasi nei due giorni successivi —, e anche per la lunga assenza di piogge, il colore del cielo appariva un po' latiginoso a causa del pulviscolo rimasto sospeso.

Questo particolare stato meteorologico è stato una delle cause principali della forte luminosità generale dell'eclisse. L'illuminazione totale poteva paragonarsi a quella che ancora si ha al crepuscolo inoltrato, allorchè compaiono le prime stelle e all'orizzonte rimane ancora una fascia luminosa. Potei infatti notare (sebbene la mia attenzione fosse tutta concentrata sulle operazioni con le camere), oltre *Venere* assai brillante ad ovest e *Mercurio* vicino alla corona (a circa tre gradi), soltanto altre due stelle e cioè: *Formalhaut* di grandezza 1,3 verso il sud, e *Deneb Kailos* della costellazione del Cetus di grandezza 2,2 più verso est. Bisogna però dire che nessuna speciale attenzione fu rivolta per individuarne altre. Tutto in giro all'orizzonte appariva una fascia chiara, il cui colore giallastro era certamente dovuto all'illuminazione dell'atmosfera intorno alla zona della totalità da parte del bordo solare (zone in avanzata fase parziale), e anche, in parte, al particolare riflesso delle sabbie. È curioso notare come il quadro generale da me osservato a Khartoum durante la fase della totalità rassomigli in molti particolari alla descrizione fatta dal P. A Secchi dell'eclisse del 1860, osservata al *Desierto de las Palmas* in Spagna.

Sia al principio che alla fine della totalità non ho notato un brusco passaggio dalla luce all'oscurità, come si legge in molte descrizioni di altre eclissi. Il fatto, notato anche da altri presenti, ha causato una piccola delusione a chi, come me, osservava il fenomeno per la prima volta. Non è però mancata la caratteristica tinta spettrale degli oggetti, che deriva, come ho potuto notare, dalla quasi completa assenza di ombre, al contrario di quanto accade in una bella serata di Luna piena. Questo prova come l'illuminazione

dovuta alla luce diffusa del cielo fosse preponderante su quella proveniente direttamente dalla corona.

Non mi è stato possibile fissare l'attenzione sui fenomeni che accompagnano il secondo contatto (inizio della totalità), poichè, appena intraviste al cannocchiale di guida le caratteristiche « gocce di Baily », dovetti occuparmi della parte fotografica. Quando potei sollevare lo sguardo al cielo la corona solare era comparsa in tutta la sua pienezza, col suo caratteristico colore perlaceo sullo sfondo grigio cupo del cielo. Essa si estendeva, apparentemente, tutt'intorno per forse un buon quarto del diametro solare. Un enorme pennacchio si spingeva verso nord-est, con una larga base di attacco; il bordo verso il nord, meglio definito e un po' convesso, dava proprio l'impressione di una linea di forza in un campo magnetico. La sua estensione fu valutata visualmente a circa 4 diametri solari. Altri due pennacchi più corti e meno definiti erano diretti verso ovest e sud-ovest. Complessivamente la corona appariva sensibilmente più estesa nel senso dell'equatore solare che in quello polare, talchè essa fu giudicata, sia da me che da altri astronomi di altre missioni estere, come una corona del tipo « minimo o equatoriale »; l'esame delle fotografie confermerà sostanzialmente - come vedremo tra breve, - questa prima impressione. Notate ad occhio nudo parecchie protuberanze ad ovest e sud-ovest.

Un ampio lenzuolo era stato steso dai Padri della Missione Cattolica vicino al mio strumento; ma né da me, né dagli altri a me vicino furono viste ombre volanti. Esse invece furono viste dal P. Vecelli, che osservava dall'alto di un edificio a un piano ⁽²⁾.

5. Con le tre camere fotografiche ho potuto eseguire, durante i 189 secondi della totalità, 11 pose contemporanee con un totale di 33 fotogrammi della corona. Riservandomi di dare in un successivo lavoro dedicato alla polarizzazione della luce coronale i dettagli tecnici su questo materiale, mi limiterò per ora ad una descrizione abbastanza dettagliata della forma della corona e dei pennacchi così come è possibile trarla dall'esame di tutte le mie fotografie. Per comodità di esposizione mi riferirò allo schema della fig. 1. Le due fotografie della tavola I - una con posa di 0^s.3 (169^s dopo il II

(2) Egli così descrive il fenomeno: « Tra gli altri fenomeni... ho potuto osservare quello delle cosiddette ombre volanti. Il termine è esatto. Avevamo steso due lenzuola, uno in cortile l'altro sulla terrazza. Sul primo gli astanti non videro nulla (forse s'erano accalcati intorno), sull'altro, poco prima della totalità (forse due minuti) cominciarono a passare ombre fuggevoli, come di uccelli in stormo, poi, ad intervalli di secondi, altre ondate (è la parola) di striscie bianche e grigiastre. Queste divenivano via via più continue, più frequenti: passavano, approssimativamente, da est ad ovest. Poi venne la totalità e alle ombre volanti non badammo più ». Traccie di ombre volanti furono intraviste anche dal prof. Cialdea, che operava pure sull'alto del tetto, guardando il fondo del vasto cortile.

Per altre impressioni e particolari sulla spedizione romana, cfr.: M. CIMINO, *Fotografia ed impressioni sull'eclisse totale di Sole ecc.*, nella Rivista «Coelum», vol. XX, Anno XXII, n. 7-8, Bologna 1952.

contatto), l'altra con posa di 2^s (30^s dopo il II contatto) —, contribuiranno a dare un'idea del fenomeno ⁽³⁾.

Nel disegno schematico ho indicato la direzione del cerchio orario N-S e quella dell'asse polare solare PN-PS. I numeri romani (II) e (III) indicano la posizione sul bordo solare del secondo e del terzo contatto; le cifre da 1 a 6, le protuberanze. La protuberanza n. 1, — che si trova quasi sull'equatore solare —, è la più notevole. Essa, assieme alla n. 2, è chiaramente visibile su una fotografia scattata circa 3^s prima del II contatto. Naturalmente, la posa risulta bruciata nell'intorno dell'estremo crescente solare, però nell'opposta zona essa lascia vedere non solo le due suddette

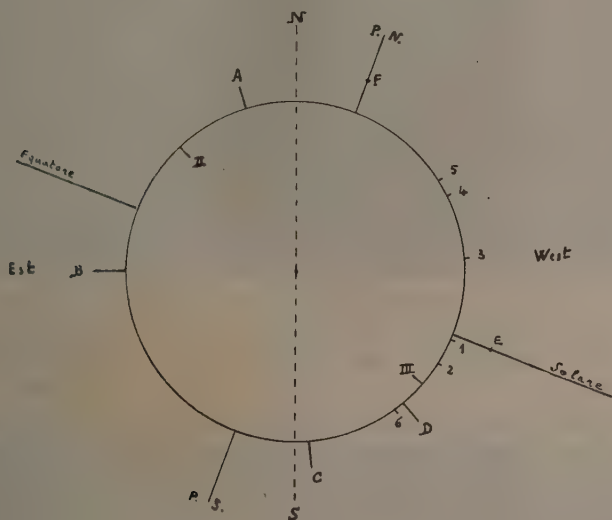


Fig. 1.

protuberanze, ma anche la corona e i pennacchi fino ad una distanza di *quasi un diametro solare*. Coll'avanzare dell'eclisse le due protuberanze acquistano sempre più importanza, specialmente quella n. 1, che raggiunge una grande altezza. Anche la protuberanza indicata al n. 5 (e forse anche la 4) è visibile prima della totalità, ma essa, più che come protuberanza vera e propria, si presenta come una vasta zona luminosa senza limiti ben definiti, e sulla fotografia rassomiglia piuttosto all'orlo di un pennacchio. La protuberanza n. 3 invece non è visibile nelle prime pose dopo il II contatto; comincia ad esserlo ad una fase avanzata (forse dopo il 130^o secondo), ed è ben evi-

(3) Queste fotografie hanno un po' perduto nella riproduzione tipografica, specialmente nelle sfumature. Nell'originale della fotografia a breve posa le numerosissime striature dei pennacchi si seguono perfettamente *fino al bordo solare*, mentre in quella a più lunga posa queste striature si seguono fino a distanze dal bordo che superano i 3 diametri solari. Anche il bordo solare è perfettamente definito.

dente alla fine della totalità. Infine, la protuberanza n. 6 si presenta anche essa in una forma diffusa e sembra essere accompagnata da numerose piccole formazioni verso il polo sud. Nelle mie fotografie (e sarà bene ricordare che in esse il diametro solare è di soli 3 mm.) non si distinguono protuberanze sicuramente definite sul bordo est, mentre si distinguono bene, come filetti più luminosi, gli attacchi al bordo solare degli orli e delle striature dei pennacchi.

Passando ora alla corona interna questa è ben visibile come un anello più luminoso tutto intorno al disco solare e sfumato verso l'esterno, ove comincia la corona esterna. Dalla corona interna partono, simili a enormi fiamme di candela, le formazioni dei pennacchi. Dividerò schematicamente il contorno del disco solare in zone limitate dalle lettere A, B, C, ...

Zona AB: a partire dal punto A (angolo di posizione 17° dal N verso E) essa copre un arco di circa 70° e costituisce la base apparente di un enorme pennacchio dai contorni assai ben definiti anche a contatto del bordo solare. Dato che esso si staglia nettamente sullo sfondo coronale, si è indotti a credere che la sua base reale si trovi in una zona dell'emisfero visibile del Sole, e che perciò la sua direzione reale debba volgere al di qua del piano tangente alla volta celeste, sul quale il pennacchio si proietta. La direzione media appare inclinata di circa 22° sull'equatore solare, e pertanto il pennacchio potrebbe ragionevolmente essere associato alla zona delle protuberanze (a bassa latitudine) del ciclo attuale (*vecchio ciclo*, che avrà termine nel 1955), benchè non possa escludersi - a causa della enorme estensione della sua base -, una influenza su di esso da parte di zone a latitudine eliografica più elevata. L'estensione del pennacchio fu valutata ad occhio nudo a 4 diametri solari circa; nelle mie fotografie si può seguirlo fino ad oltre 3 diametri, ove finisce col confondersi con la luce diffusa del cielo. A partire da circa due diametri esso assume una forma estremamente sottile e sfumata.

Zona CF: dalla parte opposta al grande pennacchio intorno al punto del III contatto. In essa cadono tutte le protuberanze visibili, ed è molto più complessa della prima. Facilmente possiamo distinguervi: 1) un pennacchio con base EF confusa nella luce coronale e direzione media apparente inclinata di circa 20° sull'equatore solare. La base reale deve probabilmente trovarsi nell'emisfero invisibile. Via via che il pennacchio si allontana dal bordo solare, esso si frastaglia in formazioni minori, le quali, sfumando fino ad una distanza di 1,5 diametri solari, tendono ad assumere una direzione parallela all'equatore; 2) una zona DE formante come una frangia al di sopra delle grandi protuberanze n. 1 e 2; 3) un altro grande pennacchio con base apparente CD e ben definito fino al bordo solare, ciò che fa presumere che la sua base reale debba trovarsi in una zona dell'emisfero visibile. La sua direzione media apparente appare inclinata di circa 45° sull'equatore. Allontanandosi dal bordo solare il pennacchio presenta alcune ramificazioni, delle quali la più importante, a nord, sembrerebbe invece appartenere ad un pennacchio differente con base nascosta da quello principale. Queste forma-



Fig. 1. - Eclisse totale di Sole del 25 febbraio 1952 osservata a Khartoum da M. Cimino. Posa di 2^s. Angolo di posizione del polo boreale solare: $P = -20.4$. Il nord è in alto, l'est a sinistra. (Nella negativa originale i pennacchi si seguono perfettamente fino ad una distanza dal bordo di oltre tre diametri solari).



Fig. 2. - La stessa eclisse. Posa di 0^s.3 con filtro giallo Wratten K2. (Nell'originale si distinguono perfettamente le numerose protuberanze sul bordo ovest e le striature dei pennacchi fino al bordo solare).

zioni hanno termine ad una distanza dal bordo di circa due diametri solari e finiscono anch'essi col confondersi colla luce diffusa del cielo.

Zone BC e FA: in vicinanza di B verso sud si notano una serie di piccoli raggi che tendono a piegarsi verso l'equatore solare; uno di essi, più evidente, rassomiglia a un piccolo pennacchio con punta assai sottile e direzione apparente di circa 50° sull'equatore. Il resto delle due zone circonda i poli solari, e sono caratterizzate da striature radiali confuse nella luce coronale. La zona a sud sembra più sviluppata di quella a nord.

Complessivamente la corona solare dell'eclisse del 25 febbraio 1952 si presenta sensibilmente più estesa nel senso equatoriale che in quello polare, mentre la maggioranza delle formazioni dei raggi coronali sembra collegata, apparentemente, con zone a bassa latitudine eliografica.

L'autore desidera ringraziare il prof. G. Armellini, Direttore dell'Osservatorio di Roma, che ha promosso la spedizione fornendo i mezzi necessari; il prof. E. Medi, Direttore dell'Istituto Nazionale di Geofisica, che si è associato all'impresa; i proff. R. Cialdea e P. Dominici, che hanno validamente contribuito alla sua organizzazione e fraternamente divise tutte le fatiche e le responsabilità; l'ing. Nistri dell'O.M.I., che ha disposto per il disinteressato prestito e adattamento delle camere, nonché i suoi collaboratori ingg. Ronca e Costa; l'Aeronautica Militare per il prestito degli obbiettivi; Mons. Bini, Vescovo di Khartoum, i Padri, le Suore della Missione Cattolica e l'Ing. Trucco per gli aiuti sul posto; la Ditta Ferrania per la fabbricazione delle pellicole; l'addetto della nostra Ambasciata al Cairo e il Comandante V. Mariotti della « Adriatica » per l'organizzazione del transito in Egitto del materiale scientifico.

Astronomia. — *Orbita di δ Cygni.* Nota di MARIA ANTONIETTA GIANNUZZI, presentata (*) dal Socio G. ARMELLINI.

1. Del sistema binario δ Cygni ADS 12880 ($\alpha = 19^h 43^m.4$; $\delta = 45^\circ 00'$; eq. 1950) sono state calcolate più orbite in epoche diverse, man mano cioè che le osservazioni sulla doppia in questione, aumentando di numero permettevano di delineare sempre meglio la traiettoria del satellite intorno l'astro principale. Il Burnham, nel suo catalogo sulle stelle doppie, del 1905, mostrò come le diverse osservazioni raccolte fino allora, potessero essere approssimate tutte assai bene, con tratti di ellissi diversi; e ciò spiega come le prime orbite calcolate siano molto discordanti fra loro. Le più recenti invece e precisamente quelle del Jackson (1) del 1921 e quella del Voronov (2)

(*) Nella seduta del 14 giugno 1952.

(1) Grw. D. St. 1921, p. 225.

(2) Tashkent Circ. 29, 1934.

del 1934, che si basano su un numero abbastanza grande di osservazioni, sono pressochè uguali avendosi infatti:

	Orbita di Jackson	Orbita di Voronov
Ω	$87^{\circ}.9$	$88^{\circ}.1$
i	$47^{\circ}.8$	$46^{\circ}.3$
ω	$159^{\circ}.0$	$161^{\circ}.4$
a	$2'',12$	$2'',18$
e	0.188	0.180
τ	1941.6	1941.58
P	$321^{\text{a}}.0$	$319^{\text{a}},75$

rappresentando come è noto i simboli, rispettivamente la posizione del nodo, l'inclinazione dell'orbita, la posizione del periastro, il semiasse maggiore, l'eccentricità, il tempo del passaggio al periastro, il periodo in anni.

Dal 1934 ad oggi numerosissimi autori hanno osservato la doppia suddetta, arricchendo il materiale disponibile per un calcolo d'orbita. Mi sono perciò accinta a questo lavoro, avendo a disposizione le osservazioni raccolte nella tabella seguente. Intendo qui ringraziare sia l'osservatorio di Lick, sia il prof. Muller dell'Università di Strasburgo, che tanto gentilmente mi hanno fornito i dati non raccolti nei cataloghi del Burnham e dell'Aitken e alcuni dei quali non ancora pubblicati. Non occorre dire che t , ϑ , ρ , indicano rispettivamente l'anno delle osservazioni ed i valori trovati dell'angolo di posizione e della distanza del satellite dall'astro principale.

2. Posto come unità di misura $1'' = 10$ cm. e tracciata graficamente l'orbita che rappresentasse meglio le posizioni osservate, con il metodo di Glasenapp ⁽³⁾, ho trovato come equazione dell'ellisse apparente la seguente:

$$(I) \quad 0.00329 x^2 - 0.00040 xy + 0.00247 y^2 + 0.01496 x - 0.00334 y = 1$$

e con il metodo di Kowalsky che, come è noto, lega i coefficienti della (I) con gli elementi dell'orbita, ho tratto:

$$\begin{aligned} \Omega &= 77^{\circ}.1 & i &= 147.7 & \omega &= 90.3 & n &= 0^{\circ}.98950 \\ e &= 0.131 & a'' &= 2''.07 & P &= 363.82 & \tau &= 1868.20 \end{aligned}$$

Per l'orientamento degli angoli mi sono attenuta alle raccomandazioni del Finsen ⁽⁴⁾, secondo le quali sia ω che n sono orientati secondo il senso di rotazione del satellite ed i - poichè il moto dell'astro è retrogrado - è maggiore di 90° .

(3) Cfr. ARMELLINI, «Astron. Siderale», vol. II, p. 428 e sg.

(4) «Union Obs. Circul.», n. 100, p. 466 (1938).

TABELLA I.

	ϑ	ρ	Autore	t	ϑ	ρ	Autore	t	ϑ	ρ	Autore
.72	71°.6	—	Herschel	1912.58	281°.4	2'.04	Fosc	1929.80	267°.7	2''.21	Giacobini
.21	37.9	1''.78	Struve	1912.72	287.5	1.47	Vanderdonck ecc.	1930.33	269.0	1.87	Van Biesbro- eck
.52	31.9	1.80	Struve	1914.53	283.8	1.79	Vysotsky	1930.53	270.7	1.97	Doberck
.68	25.4	1.46	Glaisher	1914.59	286.6	1.65	Van Biesbro- eck	1930.61	265.5	2.28	Komendan- toff
.78	19.6	1.68	O. Struve	1915.27	279.9	1.48	Rabe	1930.86	266.6	2.07	Baize
.70	8.4	1.51	O. Struve	1916.06	283.6	1.96	Rabe	1931.34	269.9	1.92	Kuiper
.71	3.4	1.65	O. Struve	1917.77	281.6	1.73	Phillips, Roe ecc.	1931.57	270.4	1.79	Phillips
.74	353.8	1.61	O. Struve	1920.42	278.3	1.93	Leavenworth	1931.61	265.6	2.35	Komendan- toff
.60	348.5	1.55	Dembowski	1922.09	276.4	1.87	Chandon	1931.68	268.0	1.96	Simonow
.57	342.9	1.47	Dembowski	1922.26	277.2	2.17	Leavenworth	1931.73	264.2	1.94	Bonnet
.81	341.7	1.47	O. Struve	1922.61	271.7	2.10	Barnard	1931.81	265.4	2.26	Baize
.59	328.2	1.56	Dembowski	1923.86	272.2	1.89	Fatou	1932.15	265.2	2.33	Komendan- toff
.73	322.7	1.46	Hall	1924.02	276.6	1.90	Vanden Bos, ecc.	1932.51	268.2	2.16	Simonow
.66	316.4	1.52	Schiaparelli	1924.47	275.3	2.20	Leavenworth	1932.70	264.7	2.31	Komendan- toff
.93	318.1	1.45	Hall	1924.54	276.9	1.55	Gr. Obs.	1932.71	266.8	1.92	Doberck
.57	310.1	1.52	Hall	1925.61	264.3	2.01	Baize	1932.83	263.4	2.16	Baize
.95	308.1	1.64	Comstock	1925.83	272.4	1.99	Berman, Ra- be ecc.	1933.59	267.1	1.92	Phillips
.93	302.5	1.54	Schiaparelli	1926.41	270.7	2.12	Komendan- toff Krum- phobz. ecc.	1934.07	261.5	2.13	Pokrowsky
.79	302.9	1.97	Renz	1926.76	275.1	1.62	Fatou	1934.62	264.4	1.91	Van Biesbro- eck
.31	303.6	1.65	Hussey	1927.19	273.7	1.83	Van Biesbro- eck	1934.70	264.4	1.98	Rabe
.42	299.8	1.63	Lohse	1927.84	271.6	1.63	Fatou	1934.75	265.3	1.93	Baize
.30	300.2	1.64	Lohse	1928.35	265.1	2.40	Komendan- toff	1935.69	263.6	2.05	Rabe
.81	290.1	1.89	H. Struve	1929.56	272.7	1.59	Phillips	1936.63	265.9	1.78	Duruy
.52	294.4	1.58	Maw, Van Bi- esbroeck	1929.66	266.2	2.51	Komendan- toff	1936.66	262.8	1.87	Phillips
.64	294.5	1.64	Burnham	1929.70	271.2	1.96	Kuiper	1936.67	263.4	1.98	Rabe
.56	292.2	1.46	Jonckheere	1929.72	271.1	1.99	Doberck	1937.27	270.0	2.87	Vatic. obs.
.19	290.4	1.71	Doberck, Roe ecc.	1929.73	270.6	2.06	Baize	1937.34	264.1	1.95	Baize
.78	283.5	1.51	Jonckheere	1929.77	268.0	1.68	Bonnet	1937.61	262.2	1.90	Duruy
.04	288.9	1.54	Doberck, Voûte ecc.					1937.62	261.3	1.98	Woolley
.68	288.3	1.92	Doberck					1937.78	260.0	1.89	Phillips
.46	286.4	1.75	Voûte Neuj- min ecc.								

Segue: TABELLA I.

t	δ	ρ	Autore	t	δ	ρ	Autore	t	δ	ρ	Autore
1937.79	262°.5	2".00	Rabe	1940.77	259°.2	2".04	Rabe	1944.42	259°.4	1".82	Voûte
1938.62	261°.3	1".98	Woolley	1941.71	258°.5	2".02	Rabe	1944.67	255°.8	2".00	Armellini
1938.72	261°.6	2".00	Rabe	1941.81	266°.0	2".05	Duruy	1945.76	255°.9	2".04	Rabe
1938.97	258°.2	1".96	Phillips	1942.68	258°.5	2".08	Rabe	1946.68	256°.0	2".08	Rabe
1939.56	261°.5	1".92	Phillips	1942.73	263°.8	1".96	Duruy	1946.71	255°.7	1".94	Baize
1939.60	261°.1	1".98	Woolley	1943.00	257°.5	1".96	Baize	1949.57	249°.9	2".15	Guyot
1939.69	260°.5	2".00	Rabe	1943.72	257°.6	2".06	Rabe				

Da un confronto con le orbite del Jackson e del Voronov, si vede immediatamente, dopo aver ridotto gli angoli ad un medesimo orientamento, che l'orbita da me calcolata, è piuttosto discordante, soprattutto nella determinazione di ω e di τ , dalle due precedenti. Poichè queste determinazioni pressochè uguali e calcolate da due diversi autori, in epoche diverse, risultano certamente attendibili, ho voluto trovare una conferma ai miei dati, cercando l'orbita della δ Cygni, con un metodo indipendente da quello di Glasenapp prima usato.

3. A tale uopo, mi sono servita del metodo di Thiele-Innes ⁽⁵⁾, basato notoriamente, su una doppia affinità applicata al quadrangolo avente per vertici, la stella principale e tre posizioni del satellite opportunamente scelte. Oltre le posizioni suddette, si considerano i due punti particolari P e Q, che corrispondono rispettivamente al periastro e all'estremità del raggio del cerchio circoscritto all'ellisse vera e posto a 90° di anomalia eccentrica, onde si hanno i cinque elementi necessari per la determinazione dell'orbita.

Prendiamo ora un triedro $\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ con l'origine nel centro dell'orbita apparente e avente gli assi paralleli al triedro fondamentale xyz (che ha origine nella stella principale, e gli assi diretti secondo il cerchio orario, il parallelo e la congiungente l'astro con l'osservatore) e chiamiamo con A, B, C, le coordinate rettangolari di P, con F, G, H, quelle del punto Q, riferite agli assi X, Y, Z.

Considerando allora le rotazioni da applicare al triedro XYZ affinché l'asse X venga a passare per P, l'asse Y per Q (e quindi l'asse Z si disponga normalmente al piano dell'orbita), Arend ricava le formule che danno gli elementi orbitali cercati. In particolare A, B, F, G, permetteranno di determinare Ω , ω , i ed a ; mentre da C ed H si deducono le velocità radiali relative, quando si conosca la parallasse del sistema.

(5) Cfr. T. N. THIELE, «A. N.», Band. 104, p. 245 (1883); VAN DEN BOS, *Orbital elements of binary stars*, «U. O. C.», n. 68, p. 354 (1926).

TABELLA II.

Luoghi normali			Posizioni calcolate con gli elem. della I orbita				Posizioni calcolate con gli elem. della II orbita			
t	ϑ	ρ	ϑ	ρ	$\vartheta_0 - \vartheta_c$	$\rho_0 - \rho_c$	ϑ	ρ	$\vartheta_0 - \vartheta_c$	$\rho_0 - \rho_c$
1830	39°.75	1".75	39°.83	1".75	-0°.08	0".00	39°.82	1".75	-0°.07	0".00
35	33.85	1.72	33.85	1.70	0.00	+0.02	33.78	1.70	+0.07	+0.02
40	27.63	1.66	27.50	1.66	+0.13	0.00	27.52	1.66	+0.11	0.00
45	21.02	1.62	20.90	1.62	+0.12	0.00	20.90	1.62	+0.12	0.00
50	14.08	1.58	13.95	1.58	+0.13	0.00	13.95	1.58	+0.13	0.00
55	6.78	1.54	6.70	1.55	+0.08	-0.01	6.52	1.55	+0.26	-0.01
60	359.24	1.53	359.23	1.53	+0.01	0.00	359.26	1.53	-0.02	0.00
65	351.60	1.52	351.58	1.52	+0.02	0.00	351.58	1.52	+0.02	0.00
70	343.86	1.51	343.95	1.52	-0.09	-0.01	343.92	1.52	-0.06	-0.01
75	336.17	1.53	336.28	1.53	-0.11	0.00	336.26	1.53	-0.09	0.00
80	328.63	1.54	328.78	1.55	-0.15	-0.01	328.70	1.55	-0.07	-0.01
85	321.33	1.58	321.52	1.58	-0.19	0.00	321.47	1.57	-0.14	+0.01
90	314.35	1.61	314.52	1.61	-0.17	0.00	314.40	1.61	-0.05	0.00
95	307.66	1.65	307.80	1.65	-0.14	0.00	307.77	1.65	-0.11	0.00
1900	301.29	1.69	301.43	1.69	-0.14	0.00	301.38	1.69	-0.09	0.00
05	295.29	1.75	295.37	1.74	-0.08	+0.01	295.37	1.74	-0.08	+0.01
10	289.62	1.79	289.65	1.78	-0.03	+0.01	289.65	1.78	-0.03	+0.01
15	284.17	1.82	284.23	1.83	-0.06	-0.01	284.20	1.83	-0.03	-0.01
20	278.98	1.88	279.05	1.87	-0.07	+0.01	279.03	1.87	-0.05	+0.01
25	274.06	1.92	274.12	1.91	-0.06	+0.01	274.08	1.91	-0.02	+0.01
30	269.34	1.96	269.35	1.95	-0.01	+0.01	269.32	1.95	+0.02	+0.01
35	264.76	1.98	264.73	1.98	+0.03	0.00	264.76	1.98	0.00	0.00
40	260.30	2.01	260.35	2.01	-0.05	0.00	260.30	2.01	0.00	0.00
45	255.97	2.04	256.0	2.04	-0.03	0.00	256.00	2.04	-0.03	0.00

Ciò posto per applicare il metodo di Thiele-Innes, ho anzitutto tracciato le curve $\vartheta = f(t)$ e $\rho = f(t)$ stabilendo con cura su di esse, ventiquattro

luoghi normali, mediante i quali ho determinato la costante delle aree c , ed ho scelto per le tre posizioni principali, le seguenti:

	t	θ	p
I	1830.0	$39^{\circ}.75$	$1''.75$
II	1875.0	$336^{\circ}.17$	$1''.53$
III	1945.0	$255^{\circ}.97$	$2''.04$

Applicando poi il metodo del Thiele nelle espressioni semplificate di Arend ⁽⁶⁾ sono pervenuta ai seguenti valori:

$$\begin{aligned}
 A &= + 1''.700 & \Omega &= 78^{\circ}.3 \\
 B &= - 0''.502 & i &= 147^{\circ}.9 \\
 F &= - 0''.544 & \omega &= 94^{\circ}.0 \\
 G &= - 2''.016 & n &= 0^{\circ}.97002 \\
 C &= \pm 1''.107 & e &= 0.142 \\
 H &= \mp 0''.081 & a &= 2''.089 \\
 & & P &= 371.13 \\
 & & \tau &= 1870.22
 \end{aligned}$$

Essendo nota la parallasse $p=0''.026$ ⁽⁷⁾, da C ed H, si trae per la velocità radiale relativa al passaggio ai nodi, $v = +3.5$ km/sec al nodo ascendente e $v = -3.6$ km/sec al nodo discendente.

I nuovi elementi orbitali sono pressochè coincidenti con quelli precedentemente trovati; inoltre poichè gli scarti fra le posizioni osservate e quelle calcolate - come risulta dalla tabella II - sono piccolissimi, posso ritenere abbastanza buone le due orbite da me calcolate.

(6) AREND, *Etablissement par voie raccourcie, ecc.* « Annales de l'Observat. astron. de Toulouse », vol. XVI, p. 109 (1941).

(7) SCHLESINGER, *G. Cat. of Stellar Parallaxes*, p. 158.

Chimica. - *Momenti elettrici di acidi isossazolcarbossilici.* Nota II di GIOVANNI SPERONI e PIERO PINO, presentata ^(*) dal Corrisp. A. QUILICO.

Nella precedente Nota ^(*) è stato riferito sulla misura di momenti elettrici di alcuni acidi isossazol- β -carbossilici e loro esteri.

In questa Nota riferiamo su ricerche eseguite su alcuni acidi α - e γ -carbossilici.

PREPARAZIONE E PURIFICAZIONE DELLE SOSTANZE.

Acido α -metilisossazol- γ -carbossilico. - È stato ottenuto per ossidazione con acido cromico dell' α metilisossazol- β carbinolo preparato secondo Quilico e Panizzi ⁽²⁾. È stato purificato per ripetute cristallizzazioni dall'acqua con aggiunta di carbone attivo. Seccato su anidride fosforica ha p. f. 178°.

Acido γ -metilisossazol- α -carbossilico. - È stato ottenuto dalla miscela degli isomeri come indicato da Claisen ⁽³⁾. Purificato per ripetuta cristallizzazione dall'acqua con aggiunta di carbone attivo e seccato su anidride fosforica ha p. f. 211°.

Acido α -fenilisossazol- γ -carbossilico. - È stato preparato secondo le indicazioni di Angeli ⁽⁴⁾ saponificando il corrispondente estere ottenuto per ossimazione dell'estere etilico dell'acido benzoilpiruvico. È stato purificato per ripetuta cristallizzazione dall'acqua; p. f. 162°.

Acido γ -fenilisossazol- α -carbossilico. - La sintesi di questo acido per azione di ossido di benzonitrile sull'acido propiolico, descritta da Quilico e Speroni ⁽⁵⁾, dà rese molto basse; abbiamo perciò cercato di ottenere rendimenti migliori facendo reagire l'ossido di benzonitrile sull'estere dell'acido propiolico.

g. 5,5 di estere etilico dell'acido propiolico, sciolti in 10 cm³ di alcool etilico vengono addizionati a g. 8 di ossido di benzonitrile sciolti in 30 cm³ di alcool etilico. Per aggiunta di 5 gocce di NaOH al 15 % si inizia la rea-

(*) Nella seduta del 14 giugno 1952.

(1) « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. XII, fasc. 6, 1° sem., pp. 704-712 (1952).

(2) « Gazz. Chim. Ital. », 69, 544 (1939).

(3) « Ber. », 42, 60 (1909); v. anche FUSCO, « Gazz. Chim. Ital. », 72, 413 (1942).

(4) « Ber. », 23, 2159 (1890); « Gazz. Chim. Ital. », 20, 768 (1890).

(5) « Gazz. Chim. Ital. », 76, 164 (1946).

zione con notevole sviluppo di calore. Dopo riposo di un giorno il liquido di reazione è trasformato in una massa gelatinosa che viene addizionata di 200 cm³ di acqua; si separa un olio che, decantato dalle acque madri, si riprende con etere lavando ripetutamente, in imbuto a rubinetto, con carbonato sodico diluito. Dalle acque madri carbonatiche per acidificazione si ottengono g. 0,5 di acido γ -fenilisossazol- α -carbossilico. Dall'estratto etereo, seccato su solfato sodico anidro, viene allontanato l'etere ed il residuo viene distillato a pressione ridotta; la frazione principale, che passa fra 180° e 187° a 12 mm. (g. 8), solidifica in una massa cristallina che si riprende con alcool a caldo. Per raffreddamento si ottengono ciuffi di aghi che raccolti alla pompa, lavati con poco alcool e cristallizzati di nuovo dall'alcool, danno aghi sottili bianchi a p. f. 46°-48° (g. 3,5).

g. 5 di estere etilico dell'acido γ -fenilisossazol- α -carbossilico, ottenuti come sopra indicato, vengono sciolti in alcool etilico e addizionati di 5 cm³ di NaOH 20 %; si ha immediata separazione del sale sodico dell'acido. Si scalda per qualche tempo a b. m. per completare la saponificazione, si scioglie il sale sodico con acqua, si filtra per filtro a pieghe e si precipita l'acido con HCl al 20 %. Si ottengono g. 4 di prodotto a p. f. 177°-178° che viene più volte cristallizzato dall'acqua, decolorando con carbone attivo. Il prodotto puro, seccato su anidride fosforica, fonde a 179°-179°,5.

RISULTATI DELLE MISURE.

TABELLA I.

Acido α -metilisossazol- γ -carbossilico.

f_2	d_4^{25}	n_D^{25}	ε^{25}	P_{12}	P_2	$MR_{D_{12}}$	MR_{D_2}
0	1,0266	1,41996	2,2207	24,822= P_1	—	21,716= MR_{D_1}	—
0,004837	1,0283	1,42036	2,2862	25,765	219,8	21,744	27,5
0,009519	1,0304	1,42076	2,3502	26,650	216,9	21,762	26,5
0,014918	1,0316	1,42126	2,4260	27,698	217,6	21,830	28,1
0,020558	1,0334	1,42156	2,5081	28,781	217,4	21,843	28,1
0,034025	1,0376	1,42266	2,7004	31,181	211,7	21,933	27,9
							$\overline{MR}_{D_2} = 27,6$

$$\infty P_2 = 222 \pm 3$$

$${}_0P = 194 \pm 3$$

$$\mu = 3,06 \pm 0,02$$

TABELLA II.

Acido γ -metilisossazol- α -carbossilico.

f_2	d_4^{25}	n_D^{25}	ϵ^{25}	P_{12}	P_2	$MR_{D_{12}}$	MR_{D_2}
0	1,0265	1,41996	2,2207	24,822= P_1	—	21,716= MR_{D_1}	—
0,002801	1,0278	1,42036	2,2657	25,466	254,7	21,735	28,5
0,008827	1,0296	1,42066	2,3618	26,821	251,3	21,770	27,8
0,015921	1,0318	1,42136	2,4757	28,350	246,4	21,821	28,3
0,023328	1,0342	1,42196	2,6026	29,970	245,5	21,871	28,4
0,032538	1,0370	1,42276	2,7626	31,896	242,2	21,935	28,4
						$\overline{MR}_{D_2} = 28,3$	
$\infty P_2 = 256 \pm 2$			$\circ P = 228 \pm 3$		$\mu = 3,32 \pm 0,02$		

TABELLA III.

Acido α -fenilisossazol- γ -carbossilico.

f_2	d_4^{25}	n_D^{25}	ϵ^{25}	P_{12}	P_2	$MR_{D_{12}}$	MR_{D_2}
o	1,0281	1,41976	2,2070	24,587= P_1	—	21,675	—
0,006311	1,0321	1,42206	2,2862	25,801	217,0	21,851	49,6
0,011785	1,0367	1,42476	2,3541	26,787	211,3	22,014	50,4
0,021742	1,0444	1,42898	2,4825	28,595	209,0	22,289	49,9
						$\overline{MR}_{D_2} = 50,0$	
$\infty P_2 = 218 \pm 4$			${}_oP = 169 \pm 4$		$\mu = 2,85 \pm 0,04$		

DISCUSSIONE DEI RISULTATI. — Dalla Tabella V risulta che il carbosile determina, anche nel caso degli acidi metilisossazol α - o γ -carbossilici, diminuzione della depressione della rifrazione molare, riscontrata nei metilisossazoli; in accordo con quanto osservato da von Auwers nei metilfenilisossazoli, l'incremento positivo è molto maggiore quando il gruppo coniugabile è sostituito in posizione α . Il potere esaltante del carbosile è

TABELLA IV.

Acido γ -fenilisossazol- α -carbossilico.

f_2	d_4^{25}	n_D^{25}	ϵ^{25}	P_{12}	P_2	$MR_{D_{12}}$	MR_{D_2}
0	1,0281	1,41976	2,2070	24,587= P_1	—	21,675= MR_{D_1}	—
0,004586	1,0316	1,42166	2,2813	25,691	265,3	21,802	49,4
0,008163	1,0344	1,42316	2,3364	26,498	258,7	21,897	48,9
0,015922	1,0398	1,42606	2,4647	28,301	257,9	22,108	48,9
0,024752	1,0466	1,42977	2,6016	30,149	249,3	22,351	49,0
						$\overline{MR}_{D_2} = 49,0$	
$\infty P_2 = 268 \pm 4$			$\infty P = 220 \pm 4$		$\mu = 3,25 \pm 0,03$		

TABELLA V.

Rifrazioni molari di acidi isossazolcarbossilici e di isossazoli.

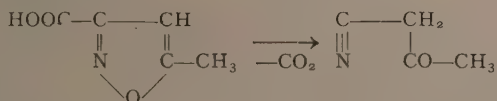
	MR_D trov.	MR_D calc.	EM_D	$E\Sigma_D$
Acido α -metilisossazol- γ -carbossilico	27,6	28,6	— 1,0	— 0,8
α -metilisossazolo (1)			— 1,08	— 1,30
Acido γ -metilisossazol- α -carbossilico	28,3	28,6	— 0,3	— 0,2
γ -metilisossazolo (1)			— 1,24	— 1,49
Acido α -fenilisossazol- γ -carbossilico	50,0	48,1	+ 1,9	+ 1,00
α -fenilisossazolo (1)			+ 0,83	+ 0,57
Acido γ -fenilisossazol- α -carbossilico	49,0	48,1	+ 0,9	+ 0,47
γ -fenilisossazolo (1)			— 0,26	— 0,15
α -metil- γ -fenilisossazolo (1)			+ 0,64	+ 0,40
γ -metil- α -fenilisossazolo (1)			+ 1,61	+ 1,01

(1) = Ber. 3, 57, 466 (1924); 58, 20 (1925); * Ztschr. Phys. Chem. 3, 122, 226 (1926).

nettamente inferiore a quello del fenile, infatti mentre la $E\Sigma_D$ passa da $-1,49$ del γ -metilisossazolo a $+1,01$ nel γ -metil- α -fenilisossazolo, nell'acido γ -metilisossazol- α -carbossilico arriva solo a $-0,2$; analogamente dal valore $-1,30$ dell' α -metilisossazolo aumenta a $+0,40$ nell' α -metil- γ -fenilisossazolo, mentre raggiunge solo $-0,80$ nell'acido α -metilisossazol- γ -carbossilico.

La maggiore esaltazione determinata dal carbossile in α - può indicare una più « forte coniugazione » in questa posizione fra il doppio legame carbossilico ed il sistema isossazolico, cioè, in altre parole, una maggiore percentuale di doppio legame fra il $C\alpha$ ed il carbonio carbossilico, derivante dalla contiguità dell'ossigeno isossazolico, ricco di elettroni; nel caso del carbossile in γ , un simile sistema mesomero è invece ostacolato dalla vicinanza dell'azoto che, povero di elettroni, ne richiama dall'ossigeno nella mesomeria del nucleo ⁽⁶⁾.

Il contributo di strutture $\text{>C}=\text{C}\begin{smallmatrix} \diagup \text{O}^- \\ \diagdown \text{O} \end{smallmatrix}\text{H}$, rafforzando il legame fra il carbonio isossazolico ed il gruppo carbossilico, permette di interpretare la maggiore stabilità degli acidi α -carbossilici in confronto ai γ - i quali, sia per fusione sia per trattamento con soluzioni alcaline, si decarbossilano con facilità; alla decarbossilazione segue l'apertura del nucleo, caratteristica dei derivati isossazolici a posizione γ non sostituita, con formazione di chetonitrili; questo comportamento già osservato da Claisen ⁽⁷⁾ per l'acido α -metilisossazol- γ -carbossilico:



è stato confermato da Garelli ⁽⁸⁾ per l'acido α -fenilisossazol- γ -carbossilico, da Quilico ⁽⁹⁾, da Panizzi ⁽¹⁰⁾ e da Musante ⁽¹¹⁾ per vari altri acidi isossazol- γ -carbossilici.

Nella Tabella VI sono riportati i momenti elettrici sperimentali ed i valori calcolati dai momenti di gruppo per la libera rotazione del gruppo carbossilico ⁽¹²⁾, introducendo nella espressione

$$\bar{\mu}^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2 - 2 \mu_1 \mu_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2$$

i valori di μ_1 , μ_2 , φ_1 e φ_2 indicati nella tabella stessa.

(6) SPERONI e PINO, « Gazz. Chim. Ital. », 80, 549 (1950).

(7) « Ber. », 24, 3908 (1891).

(8) « Gazz. Chim. Ital. », 22, I, 140 (1892).

(9) « Gazz. Chim. Ital. », 72, 458 (1942).

(10) « Gazz. Chim. Ital. », 72, 478 (1942).

(11) « Gazz. Chim. Ital. », 69, 523 (1939); 72, 136 (1942).

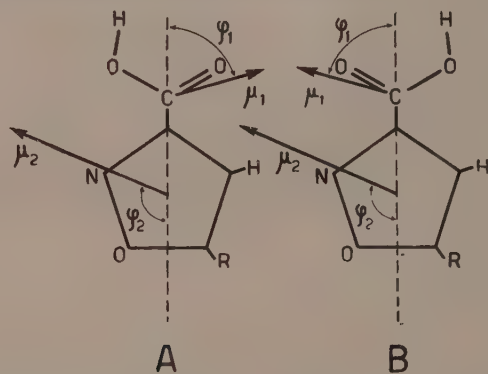
(12) Una molecola con doppi legami coniugati tende ad essere complanare; in accordo con questo principio, si ammette generalmente che il carbossile legato ad un sistema aroma-

TABELLA VI.

	Elementi per il calcolo				μ calc.	μ trov.	Diffe- renza
	μ_1	φ_1	μ_2	φ_2			
Acido α -metilisossazol- γ -carbossilico . .	1,78	74°	3,20	113°30'	3,83	3,06	-0,77
Acido γ -metilisossazol- α -carbossilico . .	1,78	74°	2,80	42°	2,99	3,32	+0,33
Acido α -fenilisossazol- γ -carbossilico . .	1,78	74°	3,37	115°	3,99	2,85	-1,14
Acido γ -fenilisossazol- α -carbossilico . .	1,78	74°	2,75	46° 30'	2,98	3,25	+0,27

Contrariamente a quanto osservato per gli acidi β -carbossilici ⁽¹⁾, i momenti trovati si discostano alquanto dai valori calcolati.

Negli acidi γ -carbossilici si riscontrano valori sperimentali notevolmente inferiori: questa differenza può derivare o da una influenza del car-



R = CH₃: μ calc. = 2,15 R = CH₃: μ calc. = 4,97
R = C₆H₅: μ calc. = 2,33 R = C₆H₅: μ calc. = 5,13

Fig. 1.

bossile sulla mesomeria dell'isossazolo, in seguito alla quale variano i momenti di gruppo, ovvero da una mancanza di simmetria del carbossile rispetto al legame C-COOH per preponderanza della posizione trans del μ_{COOH} rispetto al momento del ciclo isossazolico sostituito.

tico, ove non vi siano « ingombri », giaccia preferenzialmente nel piano dell'anello. Di conseguenza, in assenza di impedimento, nel caso degli acidi isossazolcarbossilici sarebbe più giusto parlare, non di *libera rotazione*, bensì di *eguale probabilità delle due configurazioni estreme*, nelle quali l'ossidril si trova in posizione cis od in posizione trans, rispetto al legame C-COOH. Il momento elettrico medio secondo questo punto di vista è dato da:

$$\mu = \sqrt{\frac{\mu_{\text{cis}}^2 + \mu_{\text{trans}}^2}{2}}$$
 ed è evidente che coincide con quello calcolato ammettendo la libera rotazione. Dato l'identità dei due modi di considerare le conseguenze dell'assenza di impedimento per quanto riguarda il momento elettrico risultante, seguiranno per brevità ad usare il termine di *libera rotazione*.

La prima ipotesi risulta poco probabile dato che, da quanto è noto, il carbossile non determina forti perturbazioni sui sistemi mesomeri, basta pensare che la differenza fra il μ_{COOH} negli acidi alifatici e nell'acido benzoico è appena apprezzabile. Non si può escludere che una influenza sulla mesomeria si verifichi, ma non si può attribuire a questa tutta l'ampiezza degli scostamenti osservati.

Molto più verosimile è ammettere che il carbossile sia preponderantemente vincolato nella posizione con l'ossigeno ossidrilico rivolto verso l'azoto (ved. fig. 1 A) per effetto di interazione dei momenti di gruppo che, applicati a distanza certamente non superiore a 3 Å, formano con l'asse di rotazione angoli φ_1 e φ_2 approssimativamente complementari e quindi nella posizione cis si trovano in direzioni quasi parallele (ved. fig. 1 B).

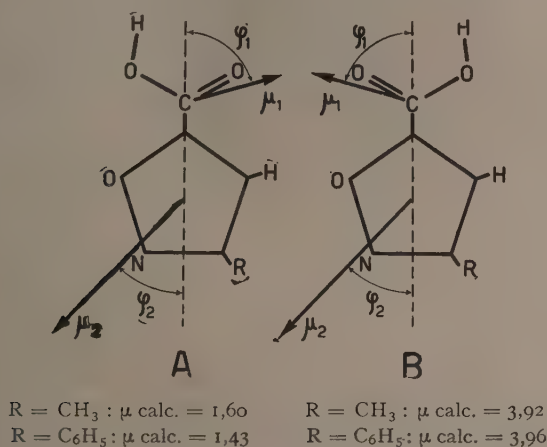


Fig. 2.

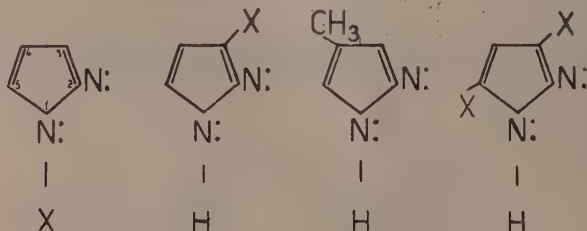
I valori dei momenti elettrici calcolati per gli acidi α -metil- e α -fenil-isossazol- γ -carbossilici nella forma trans, sono rispettivamente 2,15 e 2,33. I valori trovati sono intermedi fra quelli calcolati per la forma trans e quelli per la libera rotazione; ciò indica che il carbossile può compiere ampie oscillazioni rispetto alla posizione trans.

Più difficile è proporre una interpretazione del maggior valore dei momenti trovati per gli acidi α -carbossilici rispetto ai calcolati per la libera rotazione. In questo caso, l'ampio angolo che i momenti fanno fra loro, rendendo piccole le componenti perpendicolari all'asse di rotazione, determina scarsa importanza dell'interazione fra i momenti ed è quindi comprensibile come non risulti favorita la posizione trans (v. fig. 2).

Una maggior importanza della forma cis potrebbe essere interpretata con una influenza della positivazione mesomerica dell'ossigeno isossazolico sul gruppo carbossilico; d'altra parte l'incremento in questo caso potrebbe rientrare nell'ordine di grandezza di variazioni dovute ad effetti mesomerici.

Chimica. — *Ricerche sui pirazoli* ^(*). Nota di ANGELO MANGINI e DEA DAL-MONTE, presentata ^(**) dal Socio G. B. BONINO.

Nel piano delle ricerche di uno di noi e collaboratori sulle proprietà cromoforiche di alcuni eterociclici ^(*), e anche in relazione ai lavori sugli azoici pirazolonici ⁽²⁾, comunichiamo in questa Nota i risultati relativi ad alcuni termini della serie pirazolica ⁽³⁾, quali: il pirazolo-I (X = H), il 3-(= 5)-metil-pirazolo (II: X = CH₃), il 4-metil-pirazolo-III, il 3-5-dimetil-pirazolo (form. IV: X = X = CH₃), l'N-metil- e l'N-fenil-pirazolo (form. I, X = CH₃, C₆H₅); nonchè il 3-carbossi- e il 3-5-dicarbossi-pirazolo (form. II, X = COOH; form. IV, X, X = COOH)



Pirazolo e metil-pirazoli. — Il pirazolo e i metil-pirazoli, ad eccezione del 4-metil-, presentano un massimo di assorbimento sotto 214 mμ; il 4-metil-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale della Università di Bologna, col contributo del C. N. R.

(**) Nella seduta del 14 giugno 1952.

(1) *Isatine*: A. MANGINI, R. PASSERINI, « Boll. sci. Facoltà chim. ind., Bologna », IX, 51 (1951); « Chem. Abst. », 46, 350 (1952). *Cumarine*: A. MANGINI, R. PASSERINI, « Ib. ib. », IX, 54 (1951); « Chem. Abst. », 46, 3047 (1952). *Benzimidazoli*: A. MANGINI, F. MONTANARI, R. PASSERINI, questi « Rend. », in corso di stampa, e A. MANGINI, F. MONTANARI, « Ib. ib. », in corso di stampa.

(2) D. DAL MONTE, « Boll. sci. Facoltà chim. ind., Bologna », IX, 4, 9, 13 (1951); « Chem. Abst. », 45, 7353 (1951); « Ricerca Scientifica », in corso di stampa.

(3) N. A. ROSANOV, nel 1916 ha studiato l'assorbimento u. v. di alcuni cicli pentatomici, e fra l'altro alcuni derivati pirazolici fra i quali il 3-5-dimetil- e l'1-fenil-pirazolo (insieme ad altri derivati N-fenilici anche sostituiti nell'eterociclo): « J. Russ. Phys. Chem. Ges. », 48, 1221 (1916); ved. anche « Chem. Z. Bl. », 1923, 1080.

Altre indagini più recenti sono quelle di N. A. VALYASKO, BLISNYUKOV, sull'1-fenil-3-metil-5-cloro- e -5-metossi-pirazolo: « J. Gen. Chem. U.S.S.R. », X, 23 (1941); ved. anche Chem. Abst. », 35, 5496 (1941).

Anche BIQUARD e GRAMMATICAKIS hanno studiato alcuni fenil-pirazoli nelle loro manifestazioni spettroscopiche: « Bull. Soc. Chim. », 8, 248 (1941).

invece un massimo netto a 220 m μ : le curve in ogni caso sono ad andamento rapidamente discendente; i risultati compaiono nella tabella I e nella fig. 1 sono riportati - a mo' di esempio - gli spettri del pirazolo, dell'N- e del 4-metil-pirazolo.

Il comportamento spettrale del pirazolo e dei metil-pirazoli è affatto analogo a quello dell'imidazolo e del 4-metil-imidazolo [l'imidazolo, secondo Braude (4), mostrerebbe anche una banda a 250 m μ , lg ϵ = 1.69; per il pirazolo, anche operando alla concentrazione di 1:5000, e per i metil-pirazoli 1:10.000, non si notano punti caratteristici]: perciò, nell'aspetto spettroscopico e cromoforico i pirazoli si avvicinano agli imidazoli, e più al furano che al pirrolo, e meno al tiofene e al tiazolo

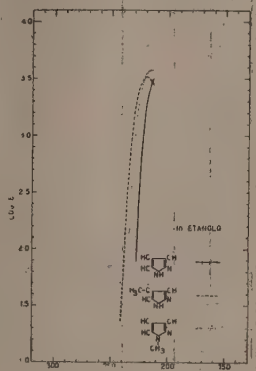


Fig. 1.

	mass. m μ	lg ϵ	mass. m μ	lg ϵ
Pirazoli e metil-pirazoli (5)	214-220	3.5	—	—
Imidazolo (4)	210	3.7	250	1.69
4-Metil-imidazolo (6)	215	3.67	—	—
Furano	200	4 —	250	(ϵ = 1?)
Pirrolo (4)	210	4.17	250	2.48
Tiofene (4)	—	—	235	3.65
Tiazolo (4)	—	—	240	3.60

Operando in soluzione idroalcolica gli spettri dei pirazoli sono praticamente coincidenti con quelli in soluzione alcolica, ma in acido cloridrico si notano spostamenti batocromi e ipercromi, che - per quanto piccoli - sono sempre in uno stesso senso col crescere della concentrazione dell'acido (ved. tabella) e, in ogni caso, per un acido di sufficiente concentrazione, la curva presenta un massimo evidente: è presumibile che tali modificazioni in ambiente acido dei pirazoli siano da associare al loro carattere basico, che per quanto « deboli » (< imidazolo e piridina) è più forte dell'indazolo (7)

	Pirrolo	Indazolo	Pirazolo	Piridina	Imidazolo
pKa	0.4	1.3	2.53	5.23	7.03.

In ambiente alcalino, le modificazioni spettrali rispetto alle soluzioni alcoliche sono identiche a quelle che si rilevano in soluzione idroalcolica, e pertanto ad essi non sarebbero interessati dei fenomeni di salificazione (almeno con soda N/100).

(4) « Ann. Rep. of Progress of Chemistry », XLVII, 128 (1945).

(5) Questo lavoro: ved. tabella.

(6) A. MANGINI, ricerche in corso.

(7) K. SCHOFIELD, « Quarterly Rev. », IV, 382 (1950).

N.ro d'or- dine	Composto	Form.	Et		Et+H ₂ O		$\frac{\text{Et}+\text{HCl}}{10000 \text{ N}}$		$\frac{\text{Et}+\text{HCl}}{1000 \text{ N}}$		$\frac{\text{Et}+\text{HCl}}{100 \text{ N}}$		$\frac{\text{Et}+\text{HCl}}{10 \text{ N}}$		$\frac{\text{Et}+\text{HCl}}{1 \text{ N}}$	
			m μ	lg ϵ	m μ	lg ϵ	m μ	lg ϵ	m μ	lg ϵ	m μ	lg ϵ	m μ	lg ϵ	m μ	lg ϵ
1	Pirazolo	I: X=H	< 214	3.50	< 214	3.50	—	—	—	—	214	3.64	—	—	215	3.74
2	N-Me-pirazolo	I: X=CH ₃	< 217	3.57	218	3.53	—	—	217	3.59	218.5	3.64	—	—	220	3.69
3	3-Me-pirazolo	II: X=CH ₃	< 214	3.58	< 214	3.57	215	3.60	217	3.71	218	3.77	—	—	218	3.78
4	4-Me-pirazolo	III	220	3.51	222	3.46	222	3.46	224	3.53	225	3.62	—	—	226	3.64
5	3-5-Di-Me-pirazolo	IV: X=X=CH ₃	< 216	3.64	217	3.61	218	3.65	220	3.84	—	—	—	—	220	3.87
6	N-fenil-pirazolo	I: X=C ₆ H ₅	254	4.16	251	4.12	—	—	251	4.12	251	4.12	250.5	4.09	246	4.12
7	3-Carbossi-pirazolo	II: X=COOH	< 216	3.95	< 214	3.89	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
8	3-5-Dicarbossi-pirazolo	III: X=X=COOH	< 212	4.08	< 214	4.12	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

I prodotti sono stati preparati secondo le indicazioni bibliografiche qui sotto riportate:

(1) KNORR, HUBERREISER, Dissert. Jena, 1895; VANINO, II, 760, p. f. 69-70

(2) DEDICHEN, «Ber.», 39, p. f. 126-127^o (1846).

(3) KNORR, «D.R.P.», 74619: p. e. 86-87 a 7 mm (descritto a p. e. 204 a 752 mm).

(4) PEGHMANN, BURKARD, «Ber.», 33, 3593: p. e. 87 a 7 mm (descritto a p. e. 204-205 a 730 mm).

(5) Ved. bibl. cui a (1): p. f. 107.

(6) BALIANO, «Gazz.», 18, 357, 375: olio incolore p. e. 107 a 7 mm (descritto come olio giallo oro p. e. 246.5 a 765 mm).

(7) Ved. bibl. cui a (3): p. f. 211-213.

(8) KNORR, Mc. DONALD, «Ann.», 279, 218 p. f. 287-290 (1894).

(a) Gli assorbimenti in soda N/100 (idraulica) per i pirazoli 1....6 sono praticamente coincidenti con quelli in alcool-acqua; per gli assorbimenti in soda N/1 e N/10 degli acidi pirazol-carbonici vedasi i grafici 3 e 4.

(b) Gli spettri sono stati registrati collo spettrofotometro Beckmann DU: i valori riportati nella tabella si riferiscono a soluzioni 1:100.000; la legge di Beer è sufficientemente verificata.

La N- è la C-metilazione potenziano sempre l'assorbimento, ma l'effetto dei metili non opera « parallelamente » nei riguardi degli spostamenti batocromo e ipercromo: riferimento fatto alla soluzione cloridrica N/I - e ciò per un miglior confronto - si possono scrivere le serie seguenti

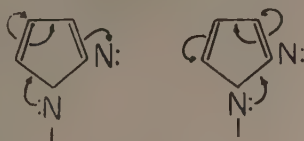
e. batocromo . . . $4 > 3 - 5 \dot{\sim} I > 3 (= 5)$

e. ipsochromo . . . $3 - 5 > 3 (= 5) > I \dot{\sim} 4$.

L'effetto del metile non sembra quindi essere di natura « puramente » induttiva.

I risultati sperimentali ora riassunti e il carattere aromatico del pirazolo [stabilità al permanganato; comportamento alle sostituzioni: la 4- è la posizione occupata dall' NO_2 o dagli alogeni ⁽⁸⁾; assenza di carattere die-nico ⁽⁹⁾] possono già orientarci a porre qualche premessa utile ai fini della interpretazione delle caratteristiche spettroscopiche.

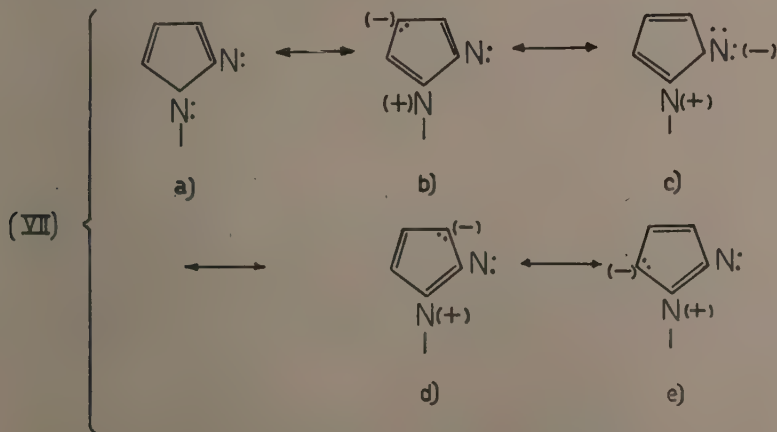
¹⁰ L'eccitazione del sistema pirazolico può prendere origine secondo il senso delle frecce (simbolismo di Ingold) indicato dagli schemi (V) e (VI)



(V)

(VI)

giungendosi al sistema risonante form. (VII)



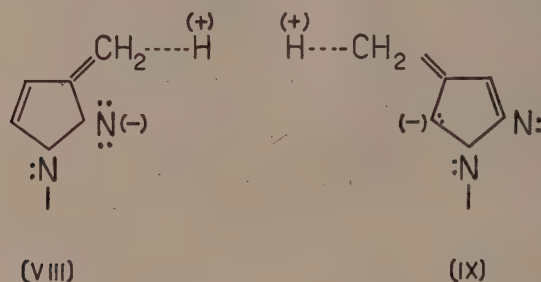
(8) SCHONFIELD, loc. cit.

(9) Cfr. ad esempio, DIELS, ALDER, « Liebig's Ann. », 498, 1 (1932).

È presumibile che nello stato fondamentale le strutture limiti *b*)-*c*) partecipino con un « peso » notevolmente maggiore di quanto non facciano la *d*) e la *e*): stante, da una parte, il fatto che la posizione 4- è quella impegnata alle sostituzioni elettrofile, e dall'altra la maggiore elettro-negatività dell'azoto rispetto al carbonio.

La transizione sarà quindi presumibilmente associata al maggior contributo di dette strutture *b*) e *c*): del resto, è chiaro che la (VII *c*) è favorita dalla protonizzazione, donde il potenziamento dello spettro in soluzione acida.

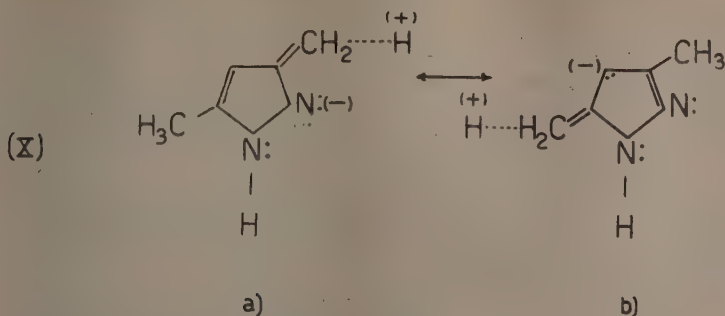
2° Passando ai C-metil-derivati, se l'effetto spettrale del metile si vuol considerare di origine mesomerica, oltre che induttiva, il sistema ibrido diventa più esteso, partecipando alla risonanza - sia pure con piccolo contributo - anche le strutture limiti con metile iperconiugato: form. (VIII) e (IX), ad esempio per il 3- e il 4-metil-pirazolo:



Di qui, ovviamente, il potenziamento dell'assorbimento: ma - ed è questo un punto fondamentale - dette forme (VIII-IX) sono praticamente equivalenti rispettivamente alla (VII *c*) e alla (VII *e*), portando l'una (la VIII) alla negativizzazione dell'N (come la VII *c*), e l'altra (la IX) alla negativizzazione del C₅ (come appunto la VII *e*): nello stato eccitato, quindi il metile in 3- iperconiugandosi contribuirà maggiormente alla « basicizzazione » dell'N₂-, mentre il metile in 4-, analogamente per iper-coniugazione, accentuerà il carattere negativo del C₅.

In definitiva, è come se nello stato eccitato (con metile iperconiugato) aumenti particolarmente il contributo della (VII *c*) e (VII *e*), e in specie di quest'ultima, che nello stato fondamentale vi dovrebbe partecipare trascurabilmente: il maggior effetto batocromo del metile in 4- e la maggiore basicizzazione importata dal metile in 3- (cfr. coefficienti di estinzione), possono presumibilmente trovare su questa base la loro spiegazione.

3° Nel caso del 3-5-dimetil-pirazolo-IV le strutture con metile iperconiugato sono (schema X):



ma si osserva subito che è sempre il solo metile in 3- che (per coniugazione, a parte che per via induttiva) opera come basicizzante dell' N_2 : perciò, se il metile in 5 effettivamente si iperconiuga, la basicità dell' N_2 non ne sarà praticamente influenzata per effetto di coniugazione (a parte l'effetto I): è un fatto che gli spostamenti batocromi nel 3-5-dimetilpirazolo sono dell'ordine di quelli portati da un solo metile in 3-, e minori comunque di quelli indotti dal metile in 4-; ma, la considerazione più importante è che l'effetto ipercromo nel 3-5-dimetilpirazolo è praticamente uguale a quello del 3-metilpirazolo, e dunque come se ci fosse un solo metile.

A questo punto è di particolare interesse ricordare il lavoro di Auwers e Kohlhaas ⁽¹⁰⁾ sulla rifrazione molecolare dell'*N*-fenilpirazolo: questi AA. trovarono che il metile in 3- ne aumenta l'esaltazione; quando quello in 5- l'abbassa; di conserva, nell'*N*-metilpirazolo, il metile in 3- è come se fosse inoperante, quando in 5- la detta esaltazione viene diminuita: questa considerazione potrà essere utile agli effetti della discussione dello spettro dell'*N*-metilpirazolo.

Il complesso di questi risultati può, a parer nostro, trovare corrispondenza in quelli provenienti dalle fondamentali ricerche di Bonino e Manzoni sugli spettri Raman del pirazolo e metilpirazoli ⁽¹¹⁾: in questo senso sono ora orientate le nostre ricerche, anche in relazione alla « equivalenza » dei due azoti, come appunto postulato da Bonino e collaboratori ⁽¹²⁾: è notevole osservare in proposito che proprio la posizione 4- appare come la « simmetrica », rispetto agli azoti.

N-fenilpirazolo. - L'*N*-fenilderivato presenta una forte banda di assorbimento a $254 \text{ m}\mu$, $\lg \epsilon = 4.16$. In soluzione idro-alcolica la banda retrocede a $251 \text{ m}\mu$, $\lg \epsilon = 4.12$; affatto sovrapponibili sono le modificazioni che essa subisce in presenza di acido cloridrico idroalcolico N/100 e N/1000, ma con acido cloridrico N/1 la banda retrocede ulteriormente

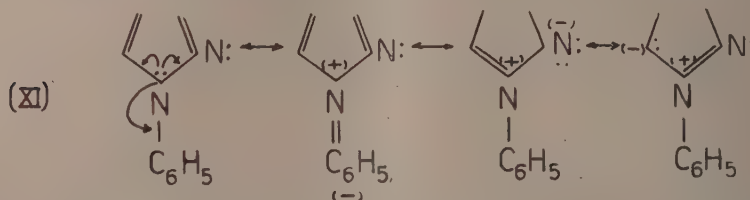
(10) « Liebig's Ann. », 437, 36 (1924).

(11) « Mem. Acc. Sc. Ist. Bologna », Classe Sc. fis., I, settembre 1935; « R. A. L. », XXII, 438 (1935); « Ricerca scientifica », VI, n. 3-4 (1935).

(12) « Ricerca scientifica », ib.

a $246\text{ m}\mu$, $\lg \epsilon = 4.12$ (ved. grafico n. 2): differenza quindi dal pirazolo e dai metil-pirazoli.

Questi fatti portano a ritenere - almeno in prima ipotesi - che la coppia elettronica dell'N-fenilico giochi il suo effetto di risonanza e col fenile e col nucleo pirazolico (XI)



Le ricerche ora in corso, tendenti a rilevare le modificazioni spettrali portate dai sostituenti nel fenile e nell'eterociclico, potranno chiarire il problema, anche nel senso delle regolarità riscontrate da Auwers e collaboratori⁽¹⁰⁾, come più sopra ricordate.

Carbossi-pirazoli. - Le curve di assorbimento del 3-carbossi- e del 3-5-dicarbossi-pirazolo sono date nei grafici 3 e 4 (per un più immediato confronto nei grafici è pure riportata la curva del pirazolo): i numeri sono riportati nella tabella.

Rispetto al pirazolo e ai metil-pirazoli, i coefficienti di estinzione sono in ogni caso più elevati e per l'acido dicarbossilico più che per il monocarbossilico; le curve non mostrano comunque punti caratteristici, ma l'assorbimento è molto più vistoso dei pirazoli (ved. grafici 3-4) e si estende sin oltre $250\text{ m}\mu$. In ambiente acido (sino HCl N/1) le modificazioni sono pressochè trascurabili, e più per l'acido dicarbossilico ove le curve sono quasi sovrapponibili con quella registrata in acqua-

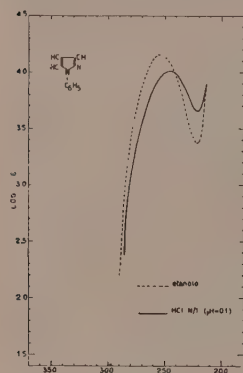


Fig. 2.

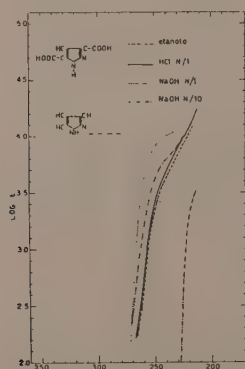


Fig. 3.

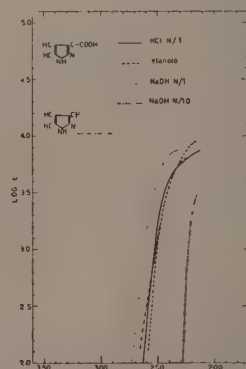


Fig. 4.

alcool; in ambiente alcalino, le modificazioni cominciano a essere sensibili in presenza di soda N/1 per l'acido mono-, e N/10 per l'acido di-carbossilico.

Il comportamento spettrale, quale più sopra tratteggiato, porterebbe a ritenere: *a*) che il carbossile possa partecipare a fatti coniugativi coll'anellò, stante il potenziamento dell'assorbimento in ambiente neutro (solvente alcool) rispetto al pirazolo e ai metil-pirazoli: ciò anche in accordo colle strutture limiti (VII *d*) e (VII *c*); *b*) che l'ambiente nettamente alcalino possa comunque far variare il « peso » delle singole strutture risonanti (non escluse quelle eventualmente aventi origine da fenomeni di salificazione interna), o addirittura farne insorgere altre, essendo l'assorbimento notevolmente potenziato in soda idroalcolica N/10 e N/1 [differenza dall'acido benzoico, e analogia - ad esempio - coll'acido p-amino-benzoico ⁽¹³⁾].

Chimica inorganica. — *Sulle leghe dell'Uranio coll'Antimonio* ^(*).

Nota I di RICCARDO FERRO, presentata ^(**) dal Socio L. ROLLA.

Non sono stati compiuti finora studi sistematici sulle combinazioni dell'uranio coll'antimonio.

Nel corso delle presenti Note saranno descritti i risultati ottenuti nella preparazione di leghe tra questi due elementi.

L'uranio usato, di elevata purezza, è stato ottenuto dal C.I.S.E. per la cortesia del prof. Bolla al quale desidero porgere i miei vivi ringraziamenti. L'antimonio era il metallo puro della Kahlbaum.

La preparazione delle leghe è stata ottenuta facendo reagire ad alta temperatura sotto vuoto i due metalli finemente polverizzati. La polvere di U era preparata limandone finemente un blocchetto di rifusione. Per eliminare l'inevitabile strato di ossido superficiale il metallo dopo aver subito un rapido lavaggio con HNO₃ conc., acqua distillata ed alcool era sempre conservato e manipolato sotto CO₂. La limatura di U veniva poi mescolata con Sb in polvere fine in un crogiolino di allumina sinterizzata racchiuso a sua volta in una fiala di quarzo fuso, in modo da impedire il contatto diretto dell'uranio con la silice.

L'apparecchiatura per la preparazione è descritta nella fig. 1: un tubo di quarzo lungo 30-40 cm., in cui veniva introdotto il crogiolino di allumina, era strozzato in vicinanza di una estremità in modo da formare un'ampollina contenente il crogiolino (A). L'altra estremità era connessa tramite

(13) L. DOUB, M. VANDENBELT, « J. Am. Chem. Soc. », 69, 2714 (1947).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale dell'Università di Genova con il contributo finanziario del C. N. R.

(**) Nella seduta del 14 giugno 1952.

un giunto di vetro a smeriglio (B) ad una pompa a diffusione ed in (C)

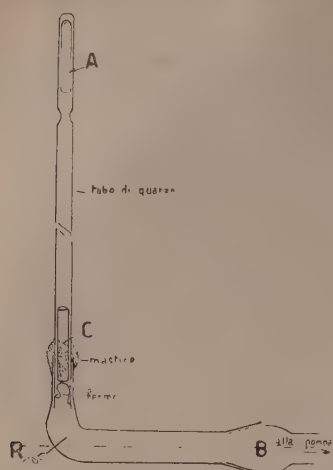


Fig. 1.

veniva precedentemente introdotta la polvere situata in un recipientino di ferro. Fatto il vuoto la parte A, tenuta volta verso l'alto, era scaldata in forno a 800°-900° controllando l'andamento della scarica tra il reoforo R e la terra. Ottenuta una sgassatura sufficiente, dopo raffreddamento, per mezzo di un magnete il recipiente C era portato a contatto della strozzatura, ruotando allora bruscamente il complesso attorno all'asse R-B la polvere fluendo attraverso la strozzatura opportunamente preparata, cadeva nell'interno del crogiuolo A. Mantenendo sempre in funzione la pompa, era infine saldata l'ampollina con la fiamma ossidrica.

I campioni così preparati sono stati poi messi in forno elettrico, in generale a temperature intorno ai 900° mantenuti ivi uno o due giorni e poi lentamente raffreddati.

TABELLA I.

USb fotogramma delle polveri. Radiazione K_{α} Cu.

$h^2 + k^2 + l^2$	$\sin^2 \theta$ oss.	$\sin^2 \theta$ calc.	$h^2 + k^2 + l^2$	$\sin^2 \theta$ oss.	$\sin^2 \theta$ calc.
4	0,0619	0,0618	36	0,5552	0,5562
8	0,1235	0,1236	40	0,6184	0,6179
11	0,1698	0,1699	43	0,6648	0,6643
12	0,1853	0,1854	44	0,6799	0,6797
16	0,2471	0,2472	48	0,7419	0,7415
19	0,2937	0,2935			
20	0,3091	0,3090			
24	0,3709	0,3708			
27	0,4174	0,4171			
32	0,4947	0,4944			
35	0,5412	0,5407			

I seguenti: valori per la K_{α_1}

51	0,7863	0,7862
52	0,8021	0,8017
56	0,8639	0,8633
59	0,9096	0,9096

$$\frac{4 \sin^2 \theta}{\lambda^2} = 0,026090 (h^2 + k^2 + l^2)$$

$$a_0 = 6,191 \text{ \AA}$$

In questo modo ho ottenuto delle leghe sotto forma di masserelle abbastanza compatte e di struttura microcristallina del peso complessivo di 0,3-0,4 grammi; per quanto in qualche caso siano state preparate anche in quantità dell'ordine di quasi un grammo. Queste leghe appaiono di colore nero splendente per le composizioni più ricche di Sb e più grigiastre le altre. A temperatura ambiente sono stabili agli agenti atmosferici ma riscaldate all'aria verso i 300° - 400° si incendiano e si decompongono sprizzando fuori Sb fuso. Resistono inalterate all'azione dell'acqua e di HCl diluito e concentrato, caldo e freddo, sono alterate superficialmente da NaOH e da H_2SO_4 conc. e caldi e sono rapidamente attaccate da HNO_3 con formazione di ossido di Sb.

Lo studio dei preparati così ottenuti è stato fatto principalmente coi metodi Roentgen ed è stata determinata l'esistenza di un certo numero di composti qui di seguito descritti.

Sui fotogrammi delle polveri ottenuti in corrispondenza del composto USb (composizione: 33,84 % Sb) si nota un sistema di righe che si lasciano facilmente individuare con l'ipotesi di una cella cubica per la fase suddetta. Come risulta dalla tabella I il valore della costante che se ne ricava è 6,191 Å.

TABELLA II.
USb intensità calcolate ed osservate.

$h^2+k^2+l^2$	hkl	I calc.	I oss.	$h^2+k^2+l^2$	hkl	I calc.	I oss.
3	111	1,7	—	35	531	3,8	d
4	200	13,4	m	36	600+442	22,1	mf-f
8	220	17,7	mf	40	620	19,4	mf-f
11	311	3,1	dd	43	533	2,4	ddd
12	222	9,4	md	44	622	22,0	mf-f
16	400	5,9	d	48	444	8,9	md
19	331	2,6	dd	51	711+551	7,1	d-md
20	420	21,3	mf-f	52	640	32,8	f-ff
24	422	19,0	mf-f	56	642	82,5	fff
27	511+333	2,5	dd	59	731+553	20,9	mf-f
32	440	8,5	md				

Per le riflessioni cui corrispondono indici diversi da quelli sopra indicati si ha:

$$I_{\text{calc.}} = I_{\text{oss.}} = 0,00.$$

TABELLA III.

U₃Sb₄ fotogramma delle polveri, radiazione K_α Cu.

$h^2 + k^2 + l^2$	sen ² θ oss.	sen ² θ calc.	$h^2 + k^2 + l^2$	sen ² θ oss.	sen ² θ calc.
10	0,0716	0,0716	78	0,5581	0,5583
14	0,1002	0,1002	80	0,5725	0,5727
20	0,1433	0,1432	I seguenti: valori per la K _α		
22	0,1575	0,1575	84	0,6006	0,6000
24	0,1717	0,1718	86	0,6149	0,6143
26	0,1860	0,1861	90	0,6433	0,6429
30	0,2146	0,2147	94	0,6721	0,6715
38	0,2718	0,2720	96	0,6854	0,6858
40	0,2865	0,2863	98	0,6991	0,7000
42	0,3006	0,3006	102	0,7295	0,7286
46	0,3293	0,3293	106	0,7582	0,7572
48	0,3440	0,3436	110	0,7850	0,7858
50	0,3575	0,3579	114	0,8151	0,8143
52	0,3724	0,3722	116	0,8295	0,8286
54	0,3864	0,3865	118	0,8434	0,8429
56	0,4008	0,4009	120	0,8567	0,8572
62	0,4439	0,4438	122	0,8728	0,8715
66	0,4729	0,4725	126	0,9002	0,9001
70	0,5016	0,5011	128	0,9146	0,9143
72	0,5157	0,5154	134	0,9580	0,9572
74	0,5305	0,5297	136	0,9717	0,9715

$$\frac{4 \text{ sen}^2 \theta}{\lambda^2} = 0,012089 \cdot (h^2 + k^2 + l^2)$$

$$a_0 = 9,095 \text{ \AA}$$

La distribuzione ordinata degli atomi delle due specie in un reticolo tipo NaCl, prevedibile data la frequenza di un simile ordinamento atomico in parecchi composti di questo tipo, è confermata, secondo quanto

è riportato nella tabella II, dall'andamento delle intensità osservate e calcolate.

Questa stessa struttura appare nei composti 1:1 dell'U con N⁽¹⁾, P⁽²⁾, As⁽³⁾, Bi⁽⁴⁾, le cui costanti variano regolarmente al variare del metalloide, presentando però una maggiore variazione nel passaggio dall'arseniuro all'antimoniuro, identicamente a quanto si ritrova in altre serie di composti analoghi degli elementi del V gruppo. I lati delle celle dei suddetti composti sono rispettivamente:

UN 4,880; UP 5,589; UAs 5,765; USb 6,191; UBi 6,364 Å.

La fase successiva di cui ho potuto determinare la struttura cristallina corrisponde alla formula U₃Sb₄ con un contenuto del 40,55 % Sb. I fotogrammi secondo Debye ottenuti su questa composizione si possono interpretare come dovuti ad un reticolo cubico con lato della cella elementare di 9,095 Å come si vede nella tabella III. Tenendo conto del valore di 10,7 per la densità ottenuta usando come liquido picnometrico benzolo anidro si calcola un numero di molecole per cella di 4,05, mentre la densità X per 4 mol./cella è 10,60 gr./cm³.

Alla cella elementare appartengono perciò 4 molecole cioè 12 U e 16 Sb. Fra le possibili distribuzioni di questi atomi una prima limitazione è portata dal fatto che sul fotogramma compaiono solo le riflessioni corrispondenti a somma pari degli indici in relazione ad una struttura centrata. Dall'esame, poi, delle estinzioni sistematiche presentate dai vari gruppi spaziali appartenenti al sistema cubico in relazione alle riflessioni osservate sul fotogramma risulta possibile per U₃Sb₄ l'appartenenza al gruppo T_d⁶, nel quale deve essere scelto, per gli atomi U, fra i due possibili insiemi di 12 punti omologhi quello corrispondente alle coordinate:

$$\begin{array}{cccccc} \frac{3}{8}, 0, \frac{1}{4} & \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, 0 & 0, \frac{1}{4}, \frac{3}{8} & \frac{1}{8}, 0, \frac{3}{4} & \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, 0 & 0, \frac{3}{4}, \frac{1}{8} \\ \frac{7}{8}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4} & \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{1}{2} & \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8} & \frac{5}{8}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} & \frac{1}{4}, \frac{5}{8}, \frac{1}{2} & \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{5}{8} \end{array}$$

Gli atomi di Sb possono invece esser distribuiti nelle 16 posizioni seguenti:

(1) L. M. LITZ, A. B. GARRET and F. C. CROXTON, « J. Am. Chem. Soc. », 70, 1721 (1948); H. A. WILHELM, P. CHIOTTI, A. I. SNOW and A. H. DAANE, « J. chem. Soc. », Suppl., p. S 318 (1949).

(2) M. ZUMBUSCH, « Z. anorg. Chem. », 245, 402 (1941).

(3) A. IANDELLI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », vol. XIII, ser. 8^a, in corso di pubblicazione.

(4) L. BREWER, « Metall. Abst. », 17, 710 (1950).

$$\begin{array}{lll}
 x, & x, & x \\
 \frac{1}{2} + x, & \frac{1}{2} - x, & \bar{x} \\
 \bar{x}, & \frac{1}{2} + x, & \frac{1}{2} - x \\
 x + \frac{1}{4}, & x + \frac{1}{4}, & x + \frac{1}{4} \\
 \frac{3}{4} + x, & \frac{1}{4} - x, & \frac{3}{4} - x \\
 \frac{3}{4} - x, & \frac{3}{4} + x, & \frac{1}{4} - x \\
 x + \frac{1}{2}, & x + \frac{1}{2}, & x + \frac{1}{2} \\
 x, & \bar{x}, & \frac{1}{2} - x \\
 \frac{1}{2} - x, & x, & x \\
 x + \frac{3}{4}, & x + \frac{3}{4}, & x + \frac{3}{4} \\
 \frac{1}{4} + x, & \frac{3}{4} - x, & \frac{1}{4} - x \\
 \frac{1}{4} - x, & \frac{1}{4} + x, & \frac{3}{4} - x \\
 \\
 \frac{1}{2} - x, & \bar{x}, & \frac{1}{2} + x \\
 \frac{1}{4} - x, & \frac{3}{4} - x, & \frac{3}{4} + x \\
 \bar{x}, & \frac{1}{2} - x, & x \\
 \frac{3}{4} - x, & \frac{1}{4} - x, & \frac{1}{4} + x
 \end{array}$$

in cui il valore di x può essere determinato per mezzo dell'andamento delle intensità.

TABELLA IV.

U_3Sb_4 , determinazione della posizione degli atomi di Sb.
Valori dei prodotti dei fattori di struttura e frequenza, al variare delle coordinate degli Sb, per alcuni indici.

x	INDICI					x	INDICI				
	620	541	640	730	800		620	541	640	730	800
1/60	5,4	34,1	56,0	13,2	57,7	8/60	17,7	44,9	56,0	34,2	71,5
2/60	2,9	36,5	56,0	5,9	24,0	9/60	35,2	30,6	56,0	51,9	40,2
3/60	35,2	63,3	56,0	2,9	5,9	10/60	62,7	46,6	56,0	67,3	12,3
4/60	68,0	100,2	56,0	2,4	3,4	11/60	68,0	82,3	56,0	75,0	3,4
5/60	62,7	121,4	56,0	4,0	12,3	12/60	35,2	114,1	56,0	72,4	5,9
6/60	35,2	112,8	56,0	9,0	40,2	13/60	2,9	120,9	56,0	60,3	24,0
7/60	17,7	80,0	56,0	19,0	71,5	14/60	5,4	98,3	56,0	43,0	57,7
						15/60	15,8	61,1	56,0	26,0	76,7

Intensità osservata:

620 md , 541 m , 640 md — d , 730 ed 800 invisibili.

TABELLA V.
 U_3Sb_4 intensità calcolate ed osservate.

$h^2 + k^2 + l^2$	hkl	I calc.	I oss.	$h^2 + k^2 + l^2$	hkl	I calc.	I oss.
2	110	0,0	—	70	653	0,8	dd
4	200	0,0	—	72	822+660	1,2	dd
6	211	5,1	—	74	831+750+743	7,6	mf
8	220	0,4	—	76	662	0,0	—
10	310	10,2	mf-f	78	752	2,5	d-md
12	222	0,0	—	80	840	0,8	dd
14	321	12,6	f	82	910+833	0,4	—
16	400	0,0	—	84	842	3,0	md
18	411+330	0,0	—	86	921+761+655	7,8	mf-f
20	420	5,2	m	88	664	0,0	—
22	332	3,6	md	90	930+851+754	5,6	m
24	422	2,4	md	94	932+763	2,3	d-md
26	510+431	3,2	md	96	844	1,4	d
30	521	1,8	d	98	941+853+770	1,4	d
32	440	0,0	—	100	10.0.0+860	0,0	—
34	530+433	0,4	—	102	10.1.1+772	5,0	m
36	600+442	0,0	—	104	10.2.0+862	0,2	—
38	611+532	8,6	mf	106	950+943	4,6	m
40	620	2,4	md	108	10.2.2+666	0,0	—
42	541	4,8	m	110	10.3.1+952+765	2,4	d-md
44	622	0,0	—	114	871+855+774	0,8	dd
46	631	1,8	d	116	10.4.0+864	7,4	mf
48	444	2,2	md-d	118	10.3.3+961	4,0	m-md
50	710+550+543	1,2	d-dd	120	10.4.2	3,0	md
52	640	2,0	md-d	122	11.1.0+954+873	9,8	mf
54	721+633+552	6,0	m	126	11.2.1+10.5.1+963	4,0	m-md
56	642	2,0	md-d	128	880	3,7	m-md
58	730	0,0	—	130	11.3.0+970	1,0	—
62	732+651	1,0	dd	132	10.4.4+882	0,0	—
64	800	0,4	—	134	11.3.2+972+ +10.5.3+776	32,4	fff
66	811+741+554	0,6	dddd	136	10.6.0+866	13,8	f
68	820+644	0,0	—				

In ogni caso inoltre:

quando: $h^2 + k^2 + l^2 = \text{numero dispari}$

si ha: $I_{\text{calc.}} = I_{\text{oss.}} = 0,00.$

Nella tabella IV è riportato il fattore di struttura per alcune riflessioni per i soli valori di x compresi tra 0 ed $1/4$, in quanto per una ulteriore variazione della x si ha un ritorno periodico delle stesse intensità, il che da un punto di vista geometrico si riflette naturalmente nel fatto che la suddescritta distribuzione di 16 punti omologhi è invariante rispetto all'incremento di $1/4, 1/4, 1/4$ della generica coordinata x, x, x . Dalla tabella risulta un buon accordo tra dato teorico e sperimentale per i valori di $x = 4/60$ fino a $x = 5/60$ e particolarmente per quest'ultimo. La conferma definitiva di ciò è nei dati della tabella V in cui si osserva ottima

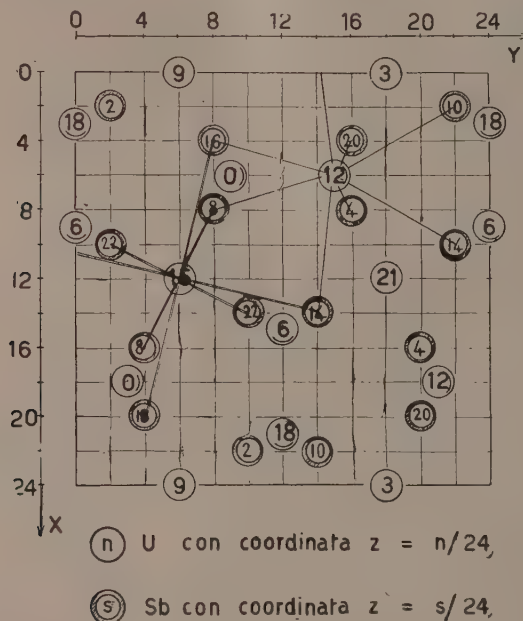


Fig. 2. - Proiezione della cella di U_3Sb_4 sul piano di base.

concordanza tra i valori sperimentali delle intensità e quelli calcolati per $x = 1/12$. In questo, come in tutti gli altri casi, le intensità sono state ottenute come prodotto dei fattori di struttura compresi gli atomici, di frequenza, di polarizzazione-Lorentz e di assorbimento.

Dai dati precedenti risulta per U_3Sb_4 una struttura tipo Th_3P_4 ⁽⁵⁾ che corrisponde alla distribuzione di 8 Sb a distanza uguale intorno ad ogni U, 4 situati quasi complanarmente all'U e 4 secondo un tetraedro allungato.

Questo risulta dalla fig. 2, proiezione della cella elementare sul piano di base ed in cui si nota questa distribuzione attorno all'U con $z = 15/24$. Non tutti gli U nella cella sono però perfettamente equivalenti ma ve ne sono tre specie distinguibili a seconda della direzione dell'asse di allunga-

(5) K. MEISEL, «Z. anorg. Chem.», 240, 300 (1939).

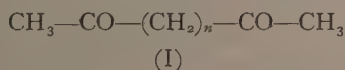
mento del tetraedro di Sb che li circonda. Per quattro (atomi 3, 9, 15, 21 della figura) questo è parallelo all'asse z , per altri quattro (atomi in 6 e 18) all'asse x e per altri quattro ancora (atomi in 0 e 12) all'asse y .

In U_3Sb_4 gli Sb si trovano a 3,15 Å di distanza dall'U (poco maggiore cioè a quella di 3,09 presente in USb) mentre gli Sb più vicini stanno tra loro alla distanza di 3,39 Å. Il composto successivo di cui è stata determinata la presenza è USb_2 corrispondente ad un contenuto di 50,57% Sb. La struttura di questo composto unitamente ad altri dati raccolti nello studio delle leghe U-Sb, saranno descritti, per ragioni di spazio in una successiva Nota.

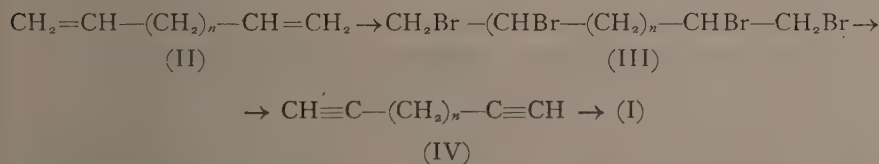
Per quanto riguarda USb ed U_3Sb_4 è ancora da osservare che è da escludere la possibilità di trasformazioni, nelle condizioni di preparazione in quanto processi di tempra e ricottura non portano a risultati diversi, ed è inoltre da escludere la presenza di fasi a composizione intermedia.

Chimica organica. — *Sintesi di α - ω diacetilparaffine*^(*).
Nota III.^(**) di LUIGI CANONICA, MARINO MARTINOLLI e TULLIO BACCHETTI, presentata dal Socio L. CAMBI.

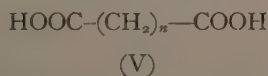
Nell'ambito delle ricerche intese alla preparazione dei dichetoni:



sulle quali riferimmo in altre Note ⁽¹⁾, abbiamo esaminata con esito favorevole, la possibilità di ottenere alcuni termini della serie attraverso la sequenza di reazioni:



D'altro canto le diolefine (II) costituiscono prodotti interessanti la preparazione degli acidi polimetilendicarbossilici:



ai quali danno luogo per demolizione ossidativa.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale dell'Università di Milano.

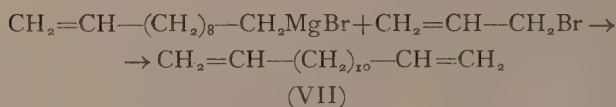
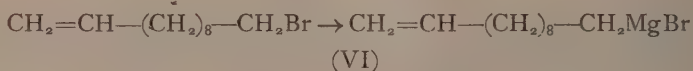
(**) Pervenuta all'Accademia il 30 giugno 1952.

(1) Questi « Rendiconti », VIII, 10, 479 (1951) e VIII, 11, 275 (1951).

Nei casi da noi studiati, tale trasformazione poteva venir ottenuta facilmente e con buone rese per ossidazione cromica, senza le difficoltà che vengono incontrate nella demolizione ossidativa diretta dei doppi legami non terminali quali quelli dell'acido oleico od erucico. Risultati meno favorevoli si ebbero con l'acido nitrico di media concentrazione, che fornì accanto agli acidi bicarbossilici, quantità considerevoli di prodotti a carattere di nitroderivato. La applicabilità di questi procedimenti è per altro limitata dal presentarsi le diolefine (II) come prodotti non facilmente accessibili, eccezion fatta per pochi termini che si poteva prevedere di ottenere dall'acido o dallo alcool 10-undecilenico, ai quali abbiamo per ora limitate le nostre ricerche.

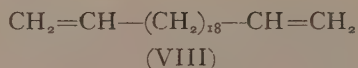
Tra le diolefine (II) a $n > 8$, la letteratura descriveva solo l'eicosadiene-1-19 ($n = 16$) ottenuto da Petersen ⁽²⁾ e poi da Ruzicka e collaboratori ⁽³⁾ per elettrosintesi secondo Kolbe dall'acido 10-undecilenico.

Oltre a questo idrocarburo, sono stati da noi preparati il tetradecadiene-1-13 (VII) ed il docosadiene-1-21 (VIII), il primo di questi secondo lo schema:



L'1-bromoundecene-10 (VI), facilmente accessibile dall'alcool undecilenico ⁽⁴⁾, fornisce normalmente il corrispondente derivato di Grignard, accanto a quantità non trascurabili di docosadiene-1-21: come è noto in altri casi ⁽⁵⁾, il bromuro di allile reagisce poi già a temperatura ambiente sul composto organomagnesiaco.

Il docosadiene-1-21:



venne preparato per sintesi secondo Wurtz dall'1 bromoundecene-10, usando come condensante il potassio metallico finemente suddiviso in etere.

Il decorso della reazione non risulta molto favorevole e dà rese in docosadiene oscillanti intorno al 27 % del teorico: si ottiene inoltre in ogni caso una abbondante frazione costituita da un liquido mobile che per le sue costanti fisiche e per i prodotti che ne risultano per ossidazione cromica (forti quantità di acido caprinico accanto a pochissimo acido azelaico) si identificava

(2) « Z. Elektrochem. », 18, 712 (1912).

(3) « Helvetica chim. Acta », 15, 1460 (1932).

(4) TOMECKO e ADAMS, « J. Am. Chem. Soc. », 49, 527 (1927).

(5) TIFFENEAU, « Compt. Rend. », 139, 481 (1904); KIRRMANN, « Bull. Soc. Chim. », 4, 39, 988 (1926).

per undecene-I impuro di undecandiene-1-10: i due idrocarburi non sono praticamente separabili per distillazione, data la grande prossimità dei loro punti di ebollizione. La sostituzione dell'atomo di alogeno dell'alogenuro alchilico con l'idrogeno, quale processo collaterale alla sintesi di Wurtz, era già stata da vari AA. rilevata nel caso di alogeno paraffine diverse, anche se mai in misura così considerevole ⁽⁶⁾. Confrontando questo risultato con quelli noti dalla letteratura per la sintesi di paraffine secondo lo stesso metodo, risulta evidente la sfavorevole influenza del doppio legame, pur tanto distanziato nella molecola, sul processo di condensazione.

I tetrabromuri, quali vengono ottenuti per addizione di bromo alle diolefine ora dette, costituiscono masse vischiose non cristallizzabili: l'azione della sodioamide in soluzione xilenica bollente sui tetrabromuri grezzi, li trasforma nei corrispondenti diacetileni, solidi cristallini i termini a 20 e 22 atomi di carbonio, liquido quello a 14. In ogni caso si formano quantità considerevoli di prodotti resinosi. Interessa rilevare come, nelle condizioni di esperienza, non si manifestino qui, almeno in notevole misura, quelle migrazioni del triplo legame che spesso si accompagnano alla reazione di deidroalogenazioni dei dibromoderivati: il docosandiino da noi ottenuto per ossidazione cromica fornisce un acido eicosandioico che il dato analitico dimostra puro.

L'idratazione dei diacetileni a dichetoni ha luogo con ottime rese per azione dell'acido solforico al 50 % contenente solfato mercurico, alla temperatura del b. m. bollente. Vennero così ottenuti il tetradecan-2-13 dione, identico al prodotto già descritto ⁽¹⁾, preparato dall'acido dodecandioico attraverso la sintesi con diazometano, l'eicosan-2-19-dione e il docosan-2-21-dione, questi ultimi sostanze cristalline le cui proprietà ben s'inquadrano in quelle dei termini già noti.

PARTE SPERIMENTALE.

Eicosandiene-1-19. - La cella di elettrolisi era costituita da un pallone a quattro colli munito di refrigerante a ricadere, termometro pescante e imbuto separatore: il tappo applicato al collo centrale portava gli elettrodi: l'anodo costituito da una lamina di platino puro di cm. 2×9 compreso tra due catodi in foglia di rame elettrolitico di dimensioni leggermente superiori: la distanza anodo-catodo era di cm. 2 e l'apparecchio era munito di energico raffreddamento esterno, così da poter mantenere una temperatura dell'elettrolita compresa tra 20 e 25°.

L'operare a temperatura più elevata diminuisce nettamente le rese di idrocarburo.

Nella cella veniva introdotta una soluzione di g. 20 di acido undecilenoico in cm³ 1000 di alcool metilico al 50 %, contenente una quantità di idrato potassico (g. 3,05) tale da neutralizzare la metà dell'acido. La tensione assorbita era di V 70, con una intensità di corrente di Amp. 1,5 (densità di cor-

(6) Ad esempio BACHMANN e CLARKE, « J. Am. Chem. Soc. », 49, 2089 (1927).

rente anodica 6,25 (Amp/dm²). Nel corso dell'elettrolisi si aggiungono lentamente, attraverso l'imbuto a rubinetto altri 20 g. di acido undecilenico, in modo da mantenere la reazione dell'elettrolita sempre nettamente acida alla fenolfthaleina: l'eicosandiene si separava man mano alla superficie sotto forma di gocce oleose.

Dopo 7 h l'elettrolisi veniva interrotta e dopo aggiunta di 15 cm³ di idrato potassico al 30 % si allontanava per distillazione la maggior parte del metanolo. Il residuo veniva estratto per quattro volte con etere di petrolio p. eb. 40-60°: dallo strato acquoso per acidificazione ed estrazione con etere venivano recuperati g. 13 circa di acido undecilenico.

Dalla soluzione dell'idrocarburo veniva allontanato da ultimo l'etere di petrolio nel vuoto della pompa ad acqua: residuavano g. 25 di olio colorato in giallo che venivano sottoposti a distillazione sotto vuoto (0,2 torr). Tra 40° e 150° distillavano g. 3 di teste, mentre la maggior parte del prodotto, (g. 18 circa) passava a 150-164°: rimaneva una frazione di coda di consistenza vischiosa (g. 4). La frazione centrale veniva rettificata a 0,1 torr, raccogliendo il distillato tra 135° e 145° (g. 16,5); raffreddando in ghiaccio il prodotto rapprendeva in massa cristallina p. f. 24,5°. All'analisi

	trov. % :	C 85,94	H 13,91
per C ₂₀ H ₃₈	calc. % :	C 86,24	H 13,75.

Ossidazione ad acido octadecandioico. - Per l'ossidazione ad acido octadecandioico g. 5 di eicosandiene venivano disciolti in cm³ 100 di acido acetico resistente all'acido cromatico e la soluzione così ottenuta veniva addizionata a piccole porzioni con g. 18 di anidride cromica. La reazione, all'inizio esotermica veniva da ultimo completata riscaldando a b. m. fino a scomparsa della reazione ossidante.

Si evaporava allora a secco nel vuoto: nel residuo l'acido octadecandioico era presente allo stato di sale di cromo, solo assai lentamente decomposto dagli acidi minerali; tale residuo veniva pertanto digerito alla ebollizione con 300 cm³ di soluzione Na₂CO₃ al 5 %.

La soluzione filtrata dall'idrato di cromo forniva per acidificazione un precipitato di acido octadecandioico (g. 4) che veniva cristallizzato da alcool ottenendolo in scaglette bianche p. f. 128° in accordo con i dati della letteratura ⁽⁷⁾.

Equivalente	trov. :	163,32
per C ₁₆ H ₃₂ (COOH) ₂	calc. :	157,22

L'ossidazione dell'eicosandiene in acido octadecandioico veniva condotta anche usando come ossidante l'acido nitrico al 35 % all'ebollizione (100 p. per una di idrocarburo). Le rese erano in tal caso minori mentre si

(7) P. f. 118° secondo CRUM BROWN e WALKER, «Ann.», 261, 125 (1891); p. f. 124° secondo NORMAND, ROSS ed HENDERSON, «J. Chem. Soc.», 2633 (1926).

formavano quantità non trascurabili di olio giallo solubile in idrato sodico, ma insolubile in carbonato, e contenente azoto, presumibilmente costituito da nitroderivati.

Eicosandiino-1-19. — Nella soluzione di g. 3 di eicosandiene in 50 cm³ di cloroformio raffreddata in acqua corrente si lasciava cadere la soluzione di g. 5,5 di bromo in 30 cm³ di cloroformio, terminata l'aggiunta del bromo si allontanava il solvente nel vuoto. Il residuo oleoso che non accennava a solidificare neppure per prolungato soggiorno a 0° veniva disciolto in 100 cm³ di xilolo anidro, alla soluzione si aggiungeva la sospensione di 5,15 g. di sodio-amide in 50 cm³ di xilolo e la massa veniva mantenuta all'ebollizione per 4 h. Dopo raffreddamento si decomponeva con acqua neutralizzando da ultimo con acido cloridrico diluito: la soluzione xilenica, filtrata da piccole quantità di sostanze resinose indissolte veniva evaporata nel vuoto della pompa ad acqua a 60°. Il residuo, fortemente colorato in bruno, veniva cristallizzato da alcool metilico, che lasciava indissolta una notevole quantità di resine: una piccola parte di queste inquinava peraltro tenacemente il prodotto e poteva venire allontanata agevolmente solo filtrando la soluzione cloroformica dell'idrocarburo attraverso una piccola colonna di allumina per cromatografia. Dopo altre due cristallizzazioni da metanolo, l'eicosandiino veniva ottenuto in belle scaglie lucenti p. f. 58-58,5°, resa g. 0,30: delle acque madri delle varie cristallizzazioni si recuperavano altri 0,25 g. di prodotto puro.

Eicosan-2-19-dione. — g. 0,2 di eicosandiino-1-19 venivano riscaldati su b. m. per 1 h. con g. 0,1 di ossido mercurico in 4 cm³ di acido solforico al 50 %. Dopo raffreddamento si filtrava alla pompa e si cristallizzava da alcool metilico.

Resa g. 0,18; cristallizzando ripetutamente dallo stesso solvente il dichetone veniva ottenuto in leggere foglioline lucenti p. f. 92,5. All'analisi

	trov. % :	C 77,44	H 12,47
per C ₂₀ H ₃₈ O ₂	calc. % :	C 77,42	H 12,26

Il corrispondente bis 2-4-dinitro, ottenuto per azione della 2-4-dinitrofenilidrazina in soluzione di acido acetico glaciale a b. m. e diluizione con acqua si presentava, dopo tre cristallizzazioni da benzolo-etero di petrolio (1 : 5) come polvere di un bel colore giallo vivo p. f. 106-108°; all'analisi

	trov. % :	N 16,84
per C ₃₂ H ₄₆ O ₈ N ₈	calc. % :	16,71

Tetradecandiene-1-13. — Il bromuro di undecilenilmagnesio veniva ottenuto secondo le modalità solite per la preparazione dei reattivi di Grignard da 25 g. di 1-bromoundecene-10 e g. 3,4 di magnesio in 200 cm³ di etere

anidro. Terminata la reazione si filtrava su lana di vetro dall'eccesso di magnesio, ed alla soluzione limpida ottenuta si aggiungevano g. 14 di bromuro di allile; dopo una notte di riposo a temperatura ambiente si bolliva per 1 h a ricadere. Dopo raffreddamento la soluzione eterica veniva lavata con 200 cm³ di soluzione al 10 % di cloruro ammonico, poi con acqua, ed essiccata su cloruro di calcio. Allontanato il solvente, il residuo veniva sottoposto a distillazione nel vuoto della pompa ad acqua: dopo poche gocce di teste si distillava in modo assai netto a 83° a 13 mm. una frazione costituita da 4 g. di un idrocarburo che veniva riconosciuto per undecene-1. La temperatura di distillazione andava poi rapidamente salendo: tra 129° e 133° a 12 mm. veniva raccolta una frazione (g. 6,5 il 31 % del teorico rispetto al bromuro di undecilenile), costituita dal tetradecandiene 1-13, sotto forma di liquido limpido di odore non sgradevole di $d_{19}^{16,2}$ 0,8486 $n_a^{16,2}$ 1,45407. All'analisi:

	trov. % :	C 86,35	H 13,25
per C ₁₄ H ₂₆	calc. % :	C 86,52	H 13,48

Il residuo della distillazione (g. 2 circa) forniva una ulteriore frazione (g. 1, 1) p. eb. 162-164° a 2 mm. costituita da docosandiene-1-21, identico al prodotto ottenuto dal bromuro di undecilenile per sintesi di Wurtz.

Ossidazione del tetradecandiene-1-13 ad acido dodecan-1-12-dioico. - Alla soluzione di g. 0,5 di tetradecandiene in 30 cm³ di acido acetico glaciale si aggiungevano a porzioni ed agitando g. 1,9 di anidride cromica: si riscaldava per 1 h su b. m. e si distruggeva poi con alcool etilico il poco ossidante ancora presente. La soluzione veniva evaporata a secco nel vuoto, il residuo ripreso con cm³ 100 di acido cloridrico diluito e ripetutamente estratto con etere. La massa semisolida che rimaneva dall'evaporazione degli estratti eterici veniva disciolta in idrato sodico al 5 %, filtrando dalle piccole quantità di prodotti insolubili che si separavano; dopo precipitazione con acido cloridrico l'acido dodecandioico veniva raccolto e cristallizzato da benzolo-etere di petrolio (1 : 3) e poi da poco acetato di etile.

p. f. 125-127°⁽⁸⁾. Alla determinazione dell'equivalente

eq.	trov: 114,15
per C ₁₂ H ₂₂ O ₄	calc.: 115,13

Tetradecandiino-1-13. - g. 5 di tetradecandiene-1-13 disciolti in 100 cm³ di tetracloruro di carbonio venivano addizionati lentamente e sotto agitazione della quantità stechiometrica di bromo, che veniva rapidamente assorbito: solo alla fine persisteva la colorazione dell'alogeno.

Si allontanava allora il solvente nel vuoto, il residuo liquido viscoso che non riusciva a cristallizzare per trattamento con etere di petrolio, veniva

(8) WALKER e LUMSDEN, « J. Chem. Soc. », 79, 1201 (1901) danno 126,5-127°.

disciolto in cm³ 80 di xilolo anidro, ed alla soluzione così ottenuta si aggiungevano g. 10,7 (12 moli per una di tetrabromoderivato) di sodio amide macinata in mulino a palle. Si bolliva per 4 h a ricadere, mentre era notevole lo sviluppo di ammoniac; a reazione ultimata si scomponeva al solito modo e si distillava a 2 mm. raccogliendo la frazione che passava al disotto di 150°; rimaneva un abbondante residuo peccioso. Il distillato veniva rettificato raccogliendo a 135-160° a 12 mm. una frazione (g. 1 circa) pari al 21 % del teorico costituita da tetradecandiino non perfettamente puro, debolmente colorato in verde.

Tetradecan-2-13-dione. - g. 0,5 di tetradecandiino 1-13 venivano trattati come prima descritto con g. 0,1 di ossido mercurico in cm³ 4 di acido solforico al 50 %. Il dichetone formatosi risultava inquinato da sostanze resinose brune che non era agevole allontanare per cristallizzazione; il prodotto grezzo veniva disciolto in 30 cm³ di benzolo cloroformio (1 : 1) e filtrato per due volte attraverso allumina attivata, lavando poi questa con poco solvente. Il prodotto che residuava dall'evaporazione del solvente forniva attraverso due cristallizzazioni da etere di petrolio g. 0,19 di tetradecan-2-13-dione p. f. 76°, 5 anche in miscela con lo stesso prodotto ottenuto per altra via.

Anche il bis-2-4-dinitrofenilidrazone risultava identico a quello già descritto.

Docosandiene-1-21. In un pallone a tre colli munito di refrigerante a ricadere, di agitatore meccanico e di imbuto a rubinetto si introducevano cm³ 150 di etere assoluto e g. 8,5 (eccesso del 100 %) di potassio metallico finemente suddiviso. Dall'imbuto a rubinetto si lasciava cadere nel tempo di 1 h g. 50 di 1-bromoundecene-10, sotto energica agitazione e si bolliva poi a ricadere, sempre agitando per 10 h. Si distruggeva poi l'eccesso di potassio aggiungendo cautamente cm³ 10 di metanolo 50 % e si lavava con acqua lo strato eterico. Dopo essiccamento su Ca Cl₂ ed allontanamento del solvente si distillava dapprima nel vuoto della pompa ad acqua: a 74-76° a 12 mm. veniva raccolta una abbondante frazione (g. 23 circa) costituita da un liquido mobile, incolore, n_D^{47} 1,42988 d_{19}^{19} 0,7590. Tali valori sono vicini a quelli riportati dalla letteratura ⁽⁹⁾ per l'undecene-1 e l'undecandiene-1-10 (rispettivamente n_D^{20} 1,4284 d 0,7671; n_D^{20} 1,43447 e d_{15} 0,7671). L'ossidazione cromica di tale frazione eseguita con le consuete modalità forniva dopo distillazione in corrente di vapore dell'acido caprinico che costituiva il principale prodotto di reazione, solo quantità minime di acido azelaico. Il rimanente veniva distillato a 2 mm, raccogliendo tra 162-164° una frazione (g. 9,1 pari al 27% del teorico) costituita dal docosandiene-1-21. Il prodotto ulteriormente purificato per distillazione si presentava a temperatura ambiente sotto forma di massa cerosa p. f. 30-31°. n_D^{43} 1,45027.

(9) V. BRAUN DENTSCHE e SCHMATLOCH, « Ber. », 45, 1254 (1912).

Docosandiino-1-21. - Veniva ottenuto al solito modo da g. 7,8 di docosandiene-1-21 attraverso il tetrabromuro (liquido giallo vischiosissimo che non si riusciva di portare a cristallizzazione). La soluzione xilenica del diacetilene, proveniente dalla reazione del tetrabromuro con la sodio amide, forniva dopo evaporazione del solvente un residuo fortemente colorato, dal quale per estrazione con alcool metilico (che lasciava indissolte notevoli quantità di peci) e successiva cristallizzazione si otteneva (g. 3 circa, il 37 % del teorico) il docosandiino-1-21 sotto forma di aghetti lucenti p. f. 62-63°. All'analisi

	trov. % :	C 87,09	H 13,01
per $C_{22}H_{38}$	calc. % :	C 87,34	H 12,66.

Il corrispondente acetiluro d'argento veniva ottenuto addizionando la quantità stechiometrica di nitrato di argento ammoniacale in metanolo al 50 % alla soluzione metanolica del diacetilene. Il precipitato bianco voluminoso e difficilmente filtrabile che si otteneva, veniva raccolto e lavato a fondo con alcool metilico.

Dopo essiccamento nell'alto vuoto esso si ripresentava come polvere amorfa bianca che verso i 170° violentemente decomponeva. All'analisi

	trov. % :	Ag 40,68
per $C_{22}H_{36}Ag_2$	calc. % :	Ag 41,79.

Ossidazione ad acido eicosandioico-1-20. - mg 150 del diacetilene venivano ossidati con mg 340 di anidride cromica (eccesso del 10 %) in 30 cm³ di acido acetico glaciale. L'ossidazione procedeva speditamente solo alla temperatura del b. m. Dopo 1 h di riscaldamento il poco ossidante ancora presente veniva distrutto con alcool etilico, e la soluzione veniva poi trattata al solito modo. La resa in acido eicosandioico cristallizzato da benzolo era di mg 101, p. f. 118-120° e dopo altra cristallizzazione 122-123° ⁽¹⁰⁾. Alla determinazione dell'equivalente

	eq. trov. :	171,74
per $C_{20}H_{38}O_4$	calc. :	171,16.

Docosan-2-21-dione. - Veniva ottenuto dal docosandiino come descritto negli altri casi; la resa in dichetone, a partire da g 0,5 di diacetilene era, in prodotto cristallizzato da metanolo, di g 0,35 (l'84 % del teorico); scaglette lucenti p. f. 94°,5. All'analisi

	trov. % :	C 78,24	H 12,65
per $C_{22}H_{42}O_2$	calc. % :	C 78,04	H 12,50.

(10) 123-124° secondo RUZICKA, STOLL e SCHINZ, « Helvetica chim. Acta », **11**, 1178 (1928).

Il corrispondente bis-2-4-dinitrofenilidrazone si presentava dopo tre cristallizzazioni da acido acetico glaciale come polvere di colore giallo arancio p. f. 107-109°.

All'analisi

	trov. % : N 16,07
per $C_{22}H_{42}O_8N_8$	calc. % : N 16,05.

Chimica. — *Sistemi binari di acidi isossazolcarbossilici isomeri*^(*). Nota^(**) di GIOVANNI SPERONI e FRANCA MUCCINI, presentata dal Corrisp. A. QUILICO.

La dissimetria geometrica delle posizioni α e γ dell'isossazolo viene ad essere notevolmente mitigata nella reale struttura, sì che isomeri, in cui sono scambiati i sostituenti in queste posizioni, presentano proprietà molto simili. Questa osservazione fatta da Quilico e Fusco⁽¹⁾ a proposito delle proprietà dell'acido α -metil- γ -fenilisossazol- β -carbossilico in confronto a quelle dell'acido isomero di Betti, trova una piena giustificazione nella simmetrizzazione del nucleo isossazolico derivante dalla mesomeria⁽²⁾ che, in questo caso, essendo le posizioni α e γ , sostituite da gruppi non polari, non può essere in alcun modo perturbata.

Non sempre però le posizioni α e γ sono equivalenti; è noto infatti la differenza di proprietà fisiche, oltre che chimiche, che si riscontra nelle serie di isomeri aventi sostituita una sola delle due posizioni α o γ .

Lo studio delle miscele binarie è un criterio fondamentale per la conoscenza delle modificazioni che intervengono nel senso di cui sopra, al variare dei sostituenti; la determinazione dei punti di fusione misti, pur dando indicazioni interessanti⁽³⁾, non è tuttavia sufficiente per uno studio più approfondito, mancando la possibilità di osservare particolari che talvolta sono essenziali.

Abbiamo perciò ritenuto interessante studiare i sistemi binari con un metodo che consentisse di rilevare con esattezza i fenomeni termici della fusione, ed in questa Nota riferiamo sullo studio delle coppie di acidi isomeri: α -metilisossazol- γ -carbossilico e γ -metilisossazol- α -carbossilico; α -fenilisossazol- γ -carbossilico e γ -fenilisossazol- α -carbossilico; α -metil- γ -fenilisossazol- β -carbossilico e γ -fenil- α -metilisossazol- β -carbossilico. Abbiamo anche studiato, in confronto al comportamento di acidi isomeri di posizione, quello delle

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Fisica dell'Università di Firenze.

(**) Pervenuta all'Accademia l'11 luglio 1952.*

(1) « Gazz. Chim. Ital. », 67, 591 (1937).

(2) SPERONI e PINO, « Gazz. Chim. It. », 80, 549 (1950).

(3) QUILICO e PANIZZI, « Gazz. Chim. It. », 68, 630 (1938); 72, 446, (1942); FUSCO e MAZZUCCHI, *Ibidem*, 71, 406 (1941).

forme alto e basso fondenti, trovate da Betti e Collaboratori ⁽⁴⁾ per gli acidi α -fenil- γ -metilisossazol- β -carbossilico ed $\alpha\gamma$ -difenilisossazol- β -carbossilico.

PROCEDIMENTO SPERIMENTALE. - Le temperature sono state misurate a mezzo di una pinza termoelettrica rame-costantana della sezione di 0,2 mm. contenuta in un capillare di vetro sottilissimo e collegata, attraverso un riduttore equilibrato di sensibilità, ad un galvanometro Moll Original Kipp e Zonen; le deviazioni dello specchietto del galvanometro sono state registrate su rullo di carta sensibile della larghezza di 30 cm., mosso con velocità regolabile da un motorino sincrono. Il giunto freddo della pinza era tenuto a temperatura costante in un ebullimetro contenente un liquido puro, scelto in base al suo punto di ebollizione, a seconda della temperatura minima interessante. La taratura della pinza è stata fatta con liquidi a p. eboll. noto, ovvero, per temperature elevate, con un bagno a lega termoregolato, controllando la temperatura con termometro al decimo. Il ritorno a zero del galvanometro era controllato prima e dopo ogni determinazione, immergendo la pinza nell'ebullimetro del giunto freddo.

Le miscele da esaminare sono state preparate sciogliendo a caldo in acetone i componenti esattamente pesati; evaporato completamente il solvente, il residuo veniva accuratamente omogeneizzato in mortaio d'agata e introdotto in un tubetto di vetro sottile del diametro di circa 3 mm; sono sufficienti g 0,1-0,2 di sostanza per ogni determinazione. Introdotta la pinza nel tubetto, questo veniva posto in un recipiente di vetro a doppia intercapedine, il cui spazio a diretto contatto col tubetto della sostanza era vuoto mentre lo spazio più esterno conteneva olio ad alto punto di ebollizione. Al momento della misura il recipiente veniva immerso in un bagno a lega, termoregolato ad una temperatura superiore di circa 20 gradi al punto di fusione più alto dei due componenti. Data la costanza di temperatura del bagno e la sua forte capacità termica rispetto al sistema in riscaldamento, la miscela contenuta nel tubicino subisce un aumento di temperatura uniforme e riproducibile; essendo d'altra parte il tubetto isolato dall'intercapedine, i fenomeni termici che si manifestano nella sostanza possono esattamente essere rivelati dalla pinza. Sulla carta sensibile viene quindi registrata la curva di fusione della sostanza; la riproducibilità è perfetta entro un grado e la sensibilità è tale, che, come si può vedere dalla fig. 1, è facilmente rilevabile l'ampiezza dei fenomeni termici.

La registrazione delle curve di solidificazione sarebbe stata preferibile per la maggior nitidezza, ma i fenomeni di soprafusione, così ampi nelle sostanze organiche, rendono il metodo non applicabile data la piccolissima quantità di sostanza su cui si opera; d'altra parte anche la facile decomponibilità dei composti immediatamente sopra al punto di fusione, particolarmente notevole nel presente caso degli acidi carbossilici, sconsiglia l'analisi delle curve di raffreddamento.

(4) « Gazz. Chim. It. », 45, I, 362, 462; II, 44, 115, 377 (1915); 51, II, 229 (1921).

PREPARAZIONE E PURIFICAZIONE DELLE SOSTANZE. — I seguenti prodotti:

Acido α -metilisossazol- γ -carbossilico (p.f. 187°), Acido γ -metilisossazol- α -carbossilico (p. f. 211°), Acido α -fenilisossazol- γ -carbossilico (p. f. 162°), Acido γ -fenilisossazol- α -carbossilico (p.f. 178°), Acido α -metil- γ -fenilisossazol- β -carbossilico (p.f. 190°), Acido α -fenil- γ -metilisossazol- β -carbossilico (p.f. 189°), Acido $\alpha\gamma$ -difenilisossazol- β -carbossilico (p.f. 233°), sono stati preparati e purificati come indicato in precedenti lavori ⁽⁵⁾.

L'isomero basso fondente dell'acido α -fenil- γ -metilisossazol- β -carbossilico p.f. 157° , è stato preparato secondo le indicazioni di Betti e Berlingozzi ⁽⁴⁾ per saponificazione con idrossido di sodio al 5 %, dall'amide otte-

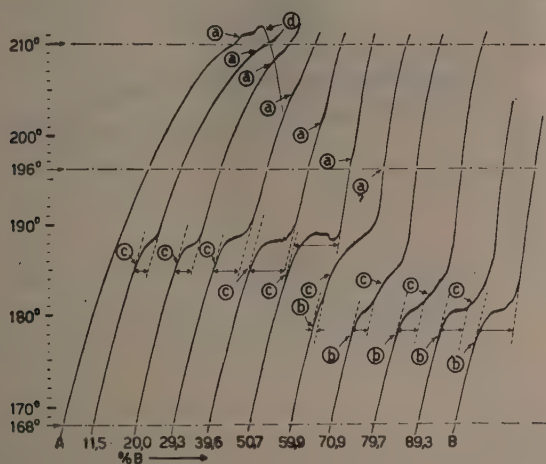


Fig. 1. — Curve di fusione delle miscele: acido γ metilisossazol- α -carbossilico (A)-acido α -metil-isossazol- γ -carbossilico (B).

- (a) Fine della fusione del componente A. (b) Inizio della fusione del componente B.
(c) Scissione del composto. (d) Decomposizione di A.

nuta per ossidazione della soluzione alcoolico-ammoniacale del metilbenzalisossazolone. È stato purificato attraverso numerose cristallizzazioni da alcool al 50 %, decolorando con carbone animale.

L'isomero basso fondente dell'acido $\alpha\gamma$ -difenilisossazol- β -carbossilico p.f. 153° , è stato ottenuto analogamente al precedente, secondo le indicazioni di Betti ed Alessandri ⁽⁴⁾, partendo dal fenilbenzalisossazolone. È stato purificato per ripetute cristallizzazioni dall'alcool.

DISCUSSIONE DEI RISULTATI. — Dalle curve di fusione delle miscele binarie sono stati tracciati i diagrammi che sono riportati nelle successive figure.

Il sistema degli acidi α -metilisossazol- γ -carbossilico e γ -metilisossazol- α -carbossilico (fig. 2) contrariamente a quanto ci si poteva aspettare della mancanza di depressione del punto di fusione misto (3), non è a completa miscibilità; si tratta invece di un singolare sistema con composto a massimo nascosto, formato da una molecola per una molecola, insolubile

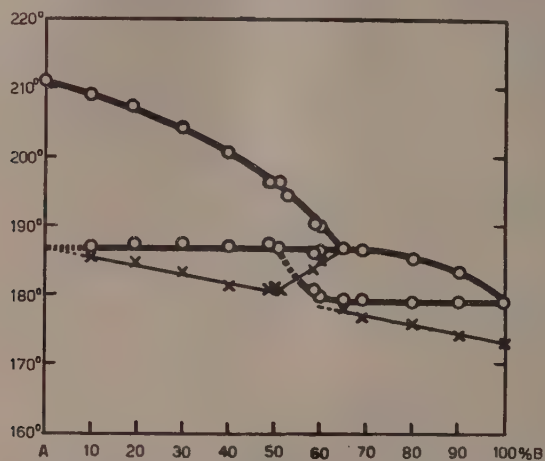


Fig. 2. - Sistema acido γ -metilisossazol- α -carbossilico (A) -acido α -metilisossazol- γ -carbossilico (B).

nei componenti. Nella fig. 1 sono riportate le curve di fusione e da queste si può rilevare la perfetta nitidezza dei fenomeni termici. È da pensare che si tratti di un associato misto di cui non è stato possibile dimostrare l'esistenza per via crioscopica, in quanto gli acidi sono pochissimo solubili in

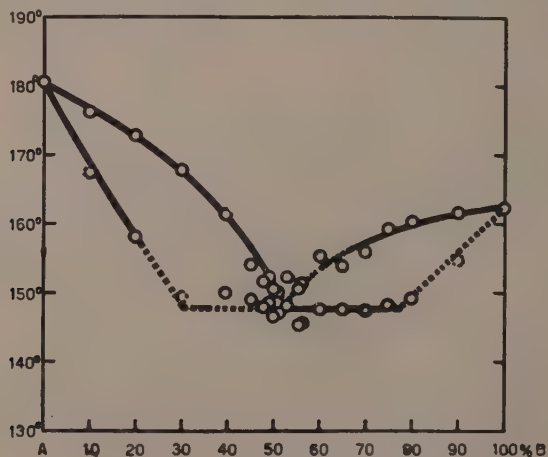


Fig. 3. - Sistema acido γ -fenilisossazol- α -carbossilico (A) -acido α -fenilisossazol- γ -carbossilico (B).

benzolo, mentre in diossano, cosa prevedibile dato l'elevato potere disasociante di questo solvente, si hanno valori normali del peso molecolare. È evidente come si sia indotti a pensare, nella consueta determinazione dei punti di fusione, ad una completa miscibilità; questo caso mette in guardia contro le deduzioni di isomorfismo od anche di identità di due composti,

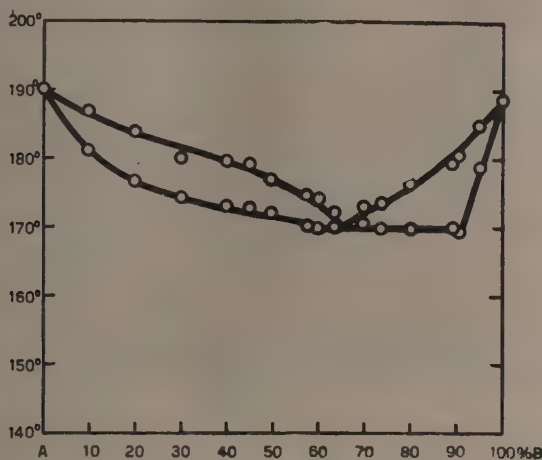


Fig. 4. - Sistema α -metil- γ -fenilisossazol- β -carbossilico (A) -acido α -fenil- γ -metilisossazol- β -carbossilico (B).

in seguito a constatata non depressione del loro punto di fusione in miscela.

Il sistema degli acidi α -fenilisossazol- γ -carbossilico e γ -fenilisossazol- α -carbossilico (fig. 3) mostra un caso di parziale miscibilità allo stato solido;

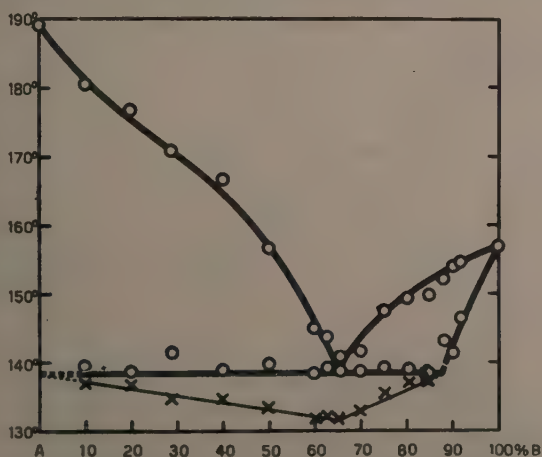


Fig. 5. - Sistema acido α -fenil- γ -metilisossazol- β carbossilico alto fondente (A) - Isomero basso - fondente (B).

nella zona eutettica, fra il 40 ed il 70 % di isomero α -carbossilico, si notano delle irregolarità sia nei punti di completa fusione sia negli arresti eutettici; non si può escludere che, come nel caso dei due acidi metil-isossazolcarbossilici (fig. 2), si abbia un composto a massimo nascosto, a temperatura di decomposizione molto prossima alla temperatura eutettica.

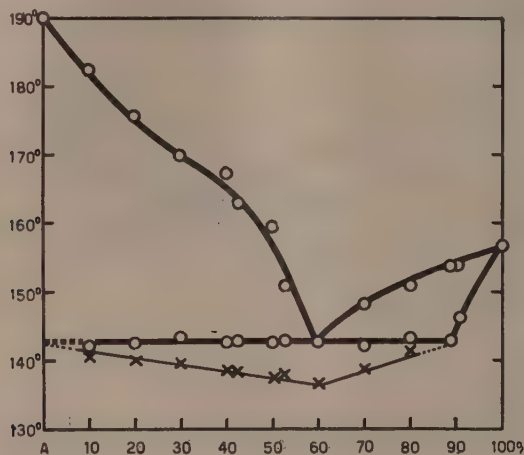


Fig. 6. - Sistema acido γ -fenil- α -metilisossazol- β -carbossilico (A)
- Isomero basso - fondente dell'acido α -fenil- γ -metilisossazol- β -carbossilico (B).

Il sistema dei due acidi fenilmetilisossazol- β -carbossilici (fig. 4) è un caso di isodimorfismo, con zone di miscibilità molto ampie; la temperatura eutettica è inferiore di circa 20° al punto di fusione dei componenti.

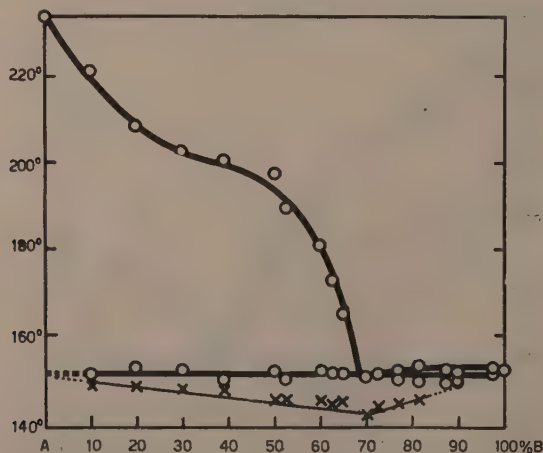


Fig. 7. - Sistema acido $\alpha\gamma$ -difenilisossazol- β -carbossilico alto fondente (A)
- Isomero basso - fondente (B).

Per quanto riguarda l'isomero basso fondente dell'acido α -fenil- γ -metilisossazol- β -carbossilico, i sistemi binari sia con il corrispondente acido alto fondente (fig. 5), sia con l'acido α -metil- γ -fenilisossazol- β -carbossilico (fig. 6), mostrano una solubilità pressochè nulla negli isomeri a p.f. più alto. Altrettanto avviene nel sistema fra gli isomeri alto e basso fondenti dell'acido $\alpha\gamma$ -difenilisossazol- β -carbossilico (fig. 7). Se si confrontano i diagrammi di questi ultimi composti con quello dei due acidi metilfenilisossazol- β -carbossilici isomeri di posizione (fig. 4), si può osservare un comportamento completamente diverso, da cui si deve dedurre che la differenza di struttura fra le coppie di isomeri di Betti sia ancor più profonda di quella che potrebbe derivare da isomeria di posizione; si dovrebbe pertanto concludere che gli isomeri basso fondenti non siano acidi isossazol- β -carbossilici. Lo studio in corso per altra via, su cui verrà successivamente riferito, conferma pienamente questa conclusione.

Chimica. — *Momento elettrico degli isomeri basso fondenti degli acidi isossazolcarbossilici di Betti* (*). Nota (**) di GIOVANNI SPERONI, presentata dal Corrisp. A. QUILICO.

Un precedente studio sui momenti dipolari degli acidi isossazolcarbossilici (*) ha permesso di constatare che nel caso degli acidi β -carbossilici e dei loro esteri, i valori trovati concordano perfettamente con quelli calcolati per la libera rotazione del gruppo carbossilico.

In particolare, anche per gli acidi γ -metil- α -fenilisossazol- β -carbossilico a punto di fusione 189° e $\alpha\gamma$ -difenilisossazol- β -carbossilico a p.f. 233° , che sono le forme stabili alto fondenti nella isomeria riscontrata da Betti e Collaboratori (2), i valori trovati e calcolati, sia per gli acidi che per gli esteri, sono perfettamente concordanti.

Allo scopo di portare un contributo alla conoscenza della singolare forma di isomeria trovata da Betti, sono state effettuate le misure di momento elettrico anche sugli isomeri basso fondenti e sui loro metilderivati.

PREPARAZIONE E PURIFICAZIONE DELLE SOSTANZE. — Gli isomeri basso fondenti degli acidi γ -metil- α -fenilisossazol- β -carbossilico, a punto di fusione 157° , e dell'acido $\alpha\gamma$ -difenilisossazol- β -carbossilico a p.f. 153° sono stati preparati e purificati come descritto in un precedente lavoro (3).

I rispettivi metil-derivati sono stati ottenuti aggiungendo gradualmente gli acidi finemente polverizzati ad un leggero eccesso di diazometano in

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Fisica di Firenze,

(**) Pervenuta all'Accademia l'11 luglio 1952.

(1) G. SPERONI e L. MORI, *Momenti elettrici di acidi isossazol-carbossilici*. « Rend. Acc. Nazionale Lincei », ser. VIII, 12, fasc. 6, pp. 704-712 (1952).

(2) « Gazz. Chim. Ital. », 45, I, 362, 462; II, 44, 151, 377 (1915); 51, II, 229 (1921).

(3) G. SPERONI e F. MUCCINI, *Sistemi binari di acidi isossazolcarbossilici isomeri*.

soluzione eterea raffreddata con ghiaccio. Terminata l'aggiunta, dopo riposo di alcune ore, si porta il liquido di reazione in imbuto a rubinetto, si aggiunge acqua, si acidifica per distruggere l'eccesso di diazometano e quindi si lava ripetutamente con soluzione diluita di carbonato sodico per allontanare l'eventuale acido di partenza inalterato. Dopo lavaggio con acqua si filtra lo strato etereo per allontanare alcune parti indissolte, si secca su solfato sodico anidro e si allontana l'etere a bagnomaria. Il residuo cristallizza in massa oleosa, che filtrata e lavata con poco etere, viene cristallizzata dall'alcool fino a costanza del punto di fusione. Le caratteristiche e le analisi dei due prodotti sono le seguenti:

Derivato metilico del composto $C_{11}H_9O_3N$ a p.f. 157° : aghi bianchi a p.f. 63^0-64^0 .

Trov. %: C 66,29; H 5,24; N 6,57;
per $C_{12}H_{11}O_3N$ calc. %: C 66,35; H 5,10; N 6,44.

Derivato metilico del composto $C_{16}H_{11}O_3N$ a p.f. 153^0 : minuti cristalli incolori a p.f. $132-133^0$.

Trov. %: C 72,33; H 5,10; N 5,08-5,12;
per $C_{17}H_{13}O_3N$ calc. %: 72,42; 4,69; 5,07.

RISULTATI DELLE MISURE. — I momenti elettrici sono stati misurati in soluzione di diossano, usando l'apparecchiatura ed il procedimento precedentemente descritti; il diossano impiegato è stato ottenuto da quello puro per analisi del commercio, per prolungata ebollizione a ricadere su sodio metallico e quindi per ripetute distillazioni.

I risultati delle misure sono riportati nelle seguenti Tabelle.

TABELLA I.

Composto $C_{11}H_9O_3N$ a p.f. 157°

f_2	d_4^{25}	n_D^{25}	ϵ^{25}	P_{12}	P_2	$MR_{D_{12}}$	MR_{D_2}
0	1,0276	1,41966	2,2085	$24,619 = P_1$	—	$21,680 = MR_{D_1}$	—
0,001818	1,0285	1,42106	2,2939	25,873	714,2	21,750	60,2
0,004126	1,0298	1,42146	2,4011	27,383	694,3	21,832	58,5
0,005973	1,0308	1,42226	2,4891	28,573	686,6	21,905	58,7
0,007170	1,0314	1,42276	2,5449	29,307	678,5	21,943	58,5
						$\overline{MR}_{D_2} = 58,7$	
						$MR_{D \text{ calc.}} = 52,7$	
$\infty P_2 = 720 \pm 10$			${}_0P = 664 \pm 14$		$\mu = 5,66 \pm 0,06$		

TABELLA II.

Metilderivato del composto C₁₁H₉O₂N a p.f. 157°

f_2	d_4^{25}	n_D^{25}	ϵ^{25}	P_{12}	P_2	$MR_{D_{12}}$	MR_{D_2}
0	1,0276	1,42036	2,2076	24,613 = P_1	—	21,718 = MR_{D_1}	—
0,001394	1,0283	1,42096	2,2312	24,982	289,2	21,768	58,3
0,002173	1,0286	1,42126	2,2440	25,189	288,4	21,801	59,8
0,003114	1,0292	1,42156	2,2597	25,429	286,7	21,831	57,9
0,006921	1,0311	1,42306	2,3222	26,403	283,3	21,980	59,6
						$\overline{MR}_{D_2} = 58,9$	
						$MR_D \text{ calc.} = 57,4$	

$$\infty P_2 = 291 \pm 3$$

$${}_0P = 227 \pm 4$$

$$\mu = 3,28 \pm 0,03$$

TABELLA III.

Composto C₁₆H₁₁O₃N a p.f. 153°

f_2	d_4^{25}	n_D^{25}	ϵ^{25}	P_{12}	P_2	$MR_{D_{12}}$	MR_{D_2}
0	1,0279	1,41996	2,2090	24,620 = P_1	—	21,720 = MR_{D_1}	—
0,001515	1,0284	1,42106	2,2858	25,782	791,4	21,795	71,2
0,003443	1,0296	1,42196	2,3839	27,199	773,7	21,894	72,3
0,004404	1,0306	1,42256	2,4348	27,902	769,8	21,941	71,9
0,004958	1,0311	1,42285	2,4619	28,274	761,6	21,968	71,7
						$\overline{MR}_{D_2} = 71,8$	
						$MR_D \text{ calc.} = 72,2$	

$$\infty P_2 = 806 \pm 4$$

$${}_0P = 733 \pm 6$$

$$\mu = 5,94 \pm 0,03$$

TABELLA IV.

Metilderivato del composto a p.f. 153°.

f_2	d_4^{25}	n_D^{25}	ϵ^{25}	P_{12}	P_2	$MR_{D_{12}}$	MR_{D_2}
0	1,0276	1,42036	2,2076	24,613 = P_1	—	21,718 = MR_{D_1}	—
0,000806	1,0280	1,42106	2,2219	24,847	314,8	21,774	(91,2)
0,002883	1,0292	1,42206	2,2596	25,472	322,5	21,895	82,0
0,003886	1,0297	1,42226	2,2779	25,774	323,4	21,937	78,0
0,006368	1,0312	1,42386	2,3223	26,499	320,8	22,097	81,2
$\overline{MR}_{D_2} = 80,4$							
$MR_D \text{ calc.} = 76,8$							

$$\infty P_2 = 327 \pm 3$$

$$\circ P = 247 \pm 6$$

$$\mu = 3,43 \pm 0,04$$

DISCUSSIONE DEI RISULTATI. — I valori dei momenti trovati per gli isomeri basso fondenti, rispettivamente 5,66 D e 5,94 D, sono molto più alti di quelli dei corrispondenti isomeri alto fondenti (3,33 e 3,39) e di conseguenza anche dei valori che possono essere calcolati per una struttura isossazolica; anche un fortissimo impedimento alla *libera rotazione* non può determinare valori così elevati. Se ne deve concludere che a questi isomeri non sia da attribuire una struttura isossazolica e ciò in accordo anche con quanto riscontrato nello studio dei sistemi binari ⁽³⁾.

I momenti dipolari dei derivati metilici sono d'altra parte molto inferiori a quelli dei rispettivi prodotti di partenza. Tale depressione non può derivare che da un profondo cambiamento nella struttura indotto dalla metilazione.

I dati ottenuti verranno più ampiamente discussi e posti in relazione con il comportamento chimico di questi composti e degli acidi isossazolcarbossilici.

Mineralogia. — *I minerali del gruppo dell'Ortler.* — III. *Staurolite, granato e biotite di Val Peder* (*). Nota (**) di ANNA MARIA TOMBA, presentata dal Corrisp. C. ANDREATTA.

Nella formazione delle filladi, che costituisce una fascia centrale del gruppo dell'Ortler (bibl. [1]), affiorano delle placche di un micascisto sericitico contenente grossi cristalli di staurolite. Una di queste si trova nell'alta Valle Peder (affluente di sinistra della Val Martello). Il prof. Andreatta nel 1933, durante il suo rilevamento del gruppo, raccoglieva da questa placca abbondante materiale, che si prestò per lo studio della staurolite stessa. I campioni raccolti provengono dal versante roccioso sopra ed immediatamente a nord della Capanna dello Scudo (Schildhütte). Il materiale mi veniva affidato per lo studio e dallo stesso mi fu possibile isolare oltre alla staurolite numerosi cristalli di granato e di biotite.

La roccia macroscopicamente si presenta molto laminata, di colore grigio-verde, con riflessi argentei e con superfici di scistosità tempestate di grossi cristalli di staurolite e di granato. La staurolite si trova in cristalli prismatici, allungati nei piani di scistosità e aventi dimensioni medie di cm. $1,3 \times 0,7 \times 0,5$ con estremi che arrivano anche a cm. $4,1 \times 1,4 \times 1,3$, singoli o geminati secondo le note leggi. Sono rappresentate le tipiche forme b (010), m (110) e c (001). Il peso specifico, media di sei determinazioni, eseguite col metodo del picnometro, è risultato di 3,745.

Al microscopio la roccia presenta tessitura finemente scistosa e struttura cristalloblastica.

Il quarzo è molto abbondante sotto forma di cristalli che vanno da mm. 0,02 fino a mm. 1,5, disposti in straterelli paralleli ai piani di scistosità, talora con evidente estinzione ondulata e con frequenti fratture. Si notano rari cristalli di albite, non mai geminati, riconoscibile per gli indici di rifrazione tutti e tre leggermente inferiori all' ω del quarzo. I cristalli di biotite presentano contorni irregolari e sono spesso a brandelli e frequentemente distorti. Caratteristica la disposizione di cristalli di biotite normalmente alla scistosità. Molto spesso sono parzialmente o quasi totalmente cloritizzati. Porfiroblasti di mm. 5 ed oltre di lunghezza sono completamente trasformati in pennina sia positiva che negativa. La biotite presenta il pleocroismo: α - verdino pallido, β - verde bruno, γ - marrone rossastro.

Ho determinato gli indici di rifrazione, usando un miscuglio di ioduro di metilene e bromo-naftalina; i valori medi risultarono: $\alpha = 1,618 \pm 0,002$, $\beta = 1,673 \pm 0,002$, $\gamma = 1,682 \pm 0,002$.

Molto più abbondante è la muscovite, disposta più frequentemente in streterelli subparalleli alla scistosità, con cristalli squamosi, sfrangiati, arcuati;

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia e Petrografia dell'Università di Bologna.

(**) Pervenuta all'Accademia il 14 luglio 1952.

si trova anche entro tracce di sfaldatura e di frattura di altri minerali. Non mancano la *magnetite* e gli *idrossidi di ferro*. Qualche rarissimo cristallo di *zoisite*, allungato o isodiametrico, mostra ambedue le sfaldature, la facile (010) e la (100).

La *staurolite* è sempre in porfiroblasti riccamente crivellati, con notevole rilievo e sagrinatura e con le tre sfaldature (010), (110), e (001) evidenti; presenta numerose fratture riempite da muscovite, biotite, clorite, ossidi di ferro e anche quarzo. Ha il pleocroismo:

$\alpha = \beta$ — giallo chiaro

γ — giallo oro.

Preparai opportune miscele di ioduro di metilene e di zolfo, come consigliano A. Rogers e P. Kerr (bibl. [2]) e riuscii ad avere i seguenti valori medi per gli indici di rifrazione:

$$\alpha = 1,740 \pm 0,002$$

$$\gamma = 1,748 \pm 0,002$$

$$\beta = 1,742 \pm 0,002$$

$$\gamma - \alpha = 0,008$$

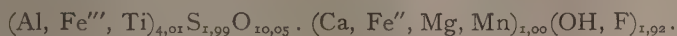
Con l'aiuto del T. U. ho calcolato (+) 2V uguale 88°.

Il *granato* si presenta sotto forma di cristalli isodiametrici ad indice di rifrazione 1,80, ottenuto usando una soluzione di fenildiiodoarsina con ioduro di metilene.

Per procedere all'analisi chimica dei cristalli di staurolite, poichè essa si presenta molto impura, soprattutto per inclusioni abbondanti di biotite entro le incrinature di sfaldatura, nonchè di granuletti di quarzo e di cristalli di ossidi di ferro, dovetti compiere una lunga, accurata e coscienziosa cernita con il controllo costante del binoculare. La polvere di colore grigio marrone fu sottoposta all'analisi, che fu pure impegnativa principalmente a causa del forte contenuto di trivalenti, specie di Fe_2O_3 totale. Eseguii due analisi complete su due porzioni diverse, provenienti da cristalli diversi. Riporto la media dei valori ottenuti:

SiO_2	28,68	Si	1,9896	
TiO_2	0,68	Ti	0,0354	} 4,0078
Al_2O_3	41,30	Al	3,3758	
Fe_2O_3	11,44	Fe'''	0,5966	
FeO	6,51	Fe''	3,3775	} 1,0037
MnO	0,04	Mn	0,0025	
MgO	2,30	Mg	0,2375	
CaO	5,20	Ca	0,3862	
$\text{H}_2\text{O} \pm$	0,13			
$\text{H}_2\text{O} +$	4,11	OH {	1,9204	
F	0,09	F {		
		O	10,0525	
	100,48			

Nella tabella sono riportati anche i rapporti tra i quozienti atomici, posta la somma dei quozienti dei cationi $Al_4 + Si_2 = 6,00$, in base alla formula $Al_4Si_2O_{10} \cdot Fe(OH)_2$. La formula della staurolite risulta la seguente:

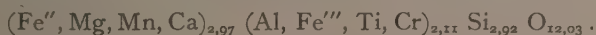


Il valore del numero di tutti gli atomi a coordinazione 6 e del silicio risulta vicinissimo al teorico. Un leggero deficit si nota nel valore del numero degli OH e F. Le somme totali delle valenze cationiche ed anioniche sono risultate soddisfacenti.

I cristalli di *granato* sono molto cloritizzati ed impuri per inclusioni di quarzo, ematite, sericite e biotite. Con il controllo del binoculare compii una minuziosa cernita dei cristallini uniformemente colorati in rosa, scartando i frammenti con passaggi al rosa tea, al bruno o al bianco. Il risultato delle analisi è il seguente:

SiO ₂	35,32	Si	2,9140	
TiO ₂	0,19	Ti	0,0114	
Al ₂ O ₃	17,18	Al	1,6700	} 2,1124
Fe ₂ O ₃	6,90	Fe'''	0,4281	
Cr ₂ O ₃	0,06	Cr	0,0029	
FeO	32,26	Fe''	2,2255	} 2,9743
MnO	2,53	Mn	0,1769	
MgO	3,55	Mg	0,4376	
CaO	1,52	Ca	0,1343	
H ₂ O	0,52	O	12,0260	
<hr/>				
100,03				

Nella tabella sono riportati i rapporti tra i quozienti atomici, posta la somma dei quozienti dei cationi $M_3' + M_2''' + Si_3 = 8,00$, in base alla formula $M_3' M_2''' (SiO_4)_3$. Perciò la formula del granato risulta la seguente:

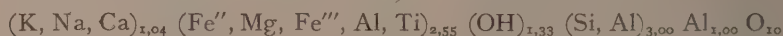


Leggermente inferiore al teorico è il numero degli atomi bivalenti e quello degli atomi di silicio. Un poco eccedente, invece, è il numero degli atomi trivalenti.

Infiltrate densamente tra le sfaldature dei cristalli di staurolite, stanno, come dissi, piccolissime lamelle di mica nera, che solo un'attenta operazione microscopica permette di separare dalla staurolite stessa. Poichè, nel compiere la cernita dei cristallini di quest'ultima, sono riuscita ad ottenere una quantità sufficiente di mica, ho eseguito tre analisi della stessa, delle quali riporto la media:

SiO ₂	34,17	Si	2,5145	} 0,4855	} 3,0000
Al ₂ O ₃	18,25	Al	1,5824		
TiO ₂	1,42	Ti	0,0787	} 1,0969	} 3,5474
Fe ₂ O ₃	5,71	Fe'''	0,3165		
FeO	18,35	Fe''	1,1289	}	
MgO	8,45	Mg	0,9264		
MnO	tr.	—	—		
CaO	1,07	Ca	0,0844	} 1,0408	
K ₂ O	8,56	K	0,8035		
Na ₂ O	1,07	Na	0,1529		
H ₂ O—	0,37				
H ₂ O+	2,70	OH	1,3251		
		O	10,0000		
	100,12				

Ho riportato, accanto ai valori ottenuti, i rapporti tra i quozienti atomici, posto l'ossigeno uguale a 10, in base alla formula $K Mg_3 (OH)_2 Si_3 Al O_{10}$. La formula della biotite studiata risulta, perciò, la seguente:



Il valore degli atomi K, Na e Ca è vicino al teorico. La presenza di Ti e di Fe''' può spiegare la diminuzione nel valore del numero degli ioni esacoordinati.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] C. ANDREATTA, *Il metamorfismo delle formazioni del gruppo dell'Ortler*. « Ricerca Scientifica », Anno 21º, n. 2, febbraio 1951.
 ID., *Carta geologica 1:100.000 « M. Cevedale »*, Magistrato alle Acque di Venezia, 1951.
 [2] A. F. ROGERS-P. K. KERR, *Optical Mineralogy*. Mc Graw-Hill Book Company, New York, London 1942.

Mineralogia. — *I minerali del gruppo dell'Ortler.* — IV. *Antofyllite e actinolite di Val di Bresimo. Solubilità di questa actinolite*^(*).
Nota ^(**) di ROSSANA PIRANI, presentata dal Corrisp. C. ANDREATTA.

Nella Val di Bresimo è noto un piccolo giacimento di amianto, formato da alcune lunghe e sottili vene comprese nelle lame di olivinite che si estendono sopra il costone nord-est della Cima Zoccolo. Le intercalazioni di olivinite, come risulta dagli studi di C. Andreatta ⁽¹⁾, sono comprese entro i pa-

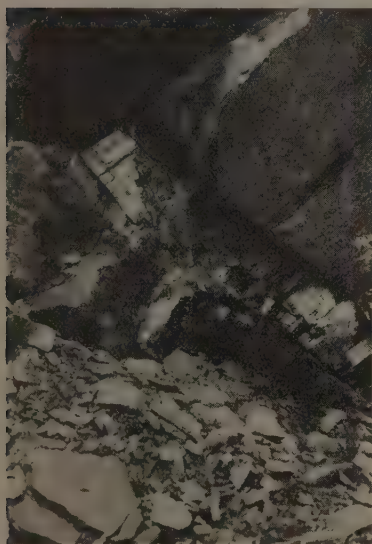


Fig. 1.



Fig. 2.

ragneis e i micascisti di catazona. Si tratta di una intercalazione olivinitica che si sviluppa dal fondo della Val Zoccolo formando un costone lungo ben 2 Km. che si divide poi in quattro distinte intercalazioni sul versante est della già citata Cima Zoccolo.

Nelle lame olivinitiche del costone nord-est di Cima Zoccolo si trovano le lenti di amianto con le fibre e i cristalli prismatici disposti perpendicolarmente alle pareti (figg. 1 e 2), talora miste a piccoli nidi di grossi cristalli di biotite. Le lenti sono concordanti con la scistosità dell'olivinite.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia e Petrografia dell'Università di Bologna.

(**) Pervenuta all'Accademia il 22 luglio 1952.

(1) C. ANDREATTA, *Carta geologica « M. Cevedale »* 1:100.000, Magistrato alle Acque di Venezia, 1951; *La tettonica « a vortici » nei Monti della Val di Sole*, « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei », vol. VIII, pp. 60-67, Roma 1948.

Il giacimento di amianto è stato nel passato oggetto di una coltivazione; poi, in conseguenza della fragilità del materiale e delle difficoltà di escavazione per l'alta quota di detto giacimento e per conseguenti difficoltà logistiche, la coltivazione fu abbandonata.

Ho condotto le mie ricerche sui numerosi campioni di amianto raccolti dal prof. C. Andreatta.

Questo amianto ad anfibolo è costituito unicamente da antofillite e actinolite, intimamente associate in associazione subparallela.

Macroscopicamente l'aggregato è bianco-argenteo, filamentoso con striature verdi dovute ai cristalli di actinolite. Le singole fibre sono lunghe anche parecchi decimetri. La tessitura è subparallela; la resistenza è minima in alcune zone prive di actinolite, più alta in altre.

Microscopicamente la struttura è varia. Dove l'actinolite è assente l'antofillite costituisce un feltro finissimo in cui fibrille minute e fratturate si intrecciano fra loro. A nicols incrociati si nota che fasci di tali fibre apparentemente non orientate estinguono contemporaneamente. In altre zone, l'orientazione dei cristalli, sempre fibroso-aciculari ma di maggiori dimensioni, è marcatamente subparallela e l'actinolite si insinua fra le fibre più esili e più allungate di antofillite. In altri luoghi, infine, bande con cristalli aciculari si alternano a bande di feltro attraversate da actinolite con disposizione orientata.

Rari minerali accessori o secondari accompagnano i due tipi di anfibolo. Sui bordi di alcuni individui più grossi di anfibolo si notano fini granulazioni di magnetite e rare lamelle di biotite; nell'interno, invece, si trovano aghetti di rutilo e noduletti di epidoto ben riconoscibili per i colori di interferenza irregolari e relativamente elevati.

L'*antofillite* è nettamente predominante sull'*actinolite*.

I cristalli fibroso-aciculari sono di colore bianco e di lucentezza sericea. In sezione sottile sono sempre incolori, trasparenti, senza apprezzabile pleocroismo. La sfaldatura, data l'esilità delle fibre, è raramente visibile, mentre è frequente una fratturazione trasversale quasi normale all'allungamento. La rifrazione è abbastanza elevata: il valore di γ a luce monocromatica (linea D = 586, filtro Lifa n. 395) è

$$\gamma = 1,637 \pm 0,002.$$

Tale valore rappresenta la media di determinazioni eseguite su diversi cristalli.

$2V$ determinato al T. U., è, come media di otto determinazioni,

$$2V = 79^\circ.$$

La densità, calcolata col picnometro, usando cinque grammi del minerale accuratamente separato col binoculare, è:

$$p. s. = 3,21.$$

L'analisi chimica eseguita pure su materiale opportunamente scelto, ha dato le seguenti percentuali in ossidi, media di due analisi:

% in peso		Quoz. atom.		
SiO ₂	56,94	Si	0,9481	7,61
Al ₂ O ₃	2,57	Al	0,0504	0,41
TiO ₂	0,21	Ti	0,0026	0,02
Fe ₂ O ₃	0,32	Fe'''	0,0040	0,03
FeO	6,43	Fe''	0,0895	0,72
MnO	0,20	Mn	0,0028	0,02
MgO	29,76	Mg	0,7381	5,92
CaO	0,64	Ca	0,0114	0,09
Na ₂ O	0,59	Na	0,0188	0,15
K ₂ O	0,34	K	0,0072	0,06
H ₂ O ⁺	1,74	OH	0,1932	1,55
H ₂ O ⁻	0,51	O	2,7412	22,00
100,25				

8,00

6,73

7,03

0,30

Anche per questa antofillite, come già per le actinoliti precedentemente studiate ⁽²⁾, ⁽³⁾, nella tabella, accanto ai pesi percentuali, ho riportato i quozienti atomici e i numeri degli atomi con cui ciascun elemento entra nella formula.

La formula della antofillite di Val di Bresimo risulta:



dove $z = \text{Si} + \text{Al}$; $x = \text{Mg} + \text{Al} + \text{Cr} + \text{Fe}''' + \text{Fe}'' + \text{Mn} + \text{Ca} + \text{Na}$, seguendo la simbologgiatura proposta per le antofilliti dal Bermann e adottata dal Rabbitt ⁽⁴⁾.

Come è evidente, la formula risponde quasi esattamente alle esigenze di quella teorica.

Il primo gruppo (Si + Al) è di limitata vicariabilità; infatti l'alluminio sostituisce il silicio fino a un massimo di due atomi su otto, come si può dedurre dalle formule di cento antofilliti calcolate da Rabbitt.

Il secondo gruppo è a tre vicarianti principali: Mg-Fe''-Al. La sostituzione di atomi di Al al posto del Mg dovrebbe essere equivalente a quella

(2) C. ANDREATTA e R. PIRANI, *I minerali del gruppo dell'Ortler. - I. Actinolite e biotite di Val Madriccio*. « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei », vol. IX, pp. 320-324, Roma 1950.

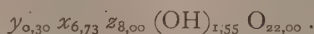
(3) R. PIRANI, *I minerali del gruppo dell'Ortler. - II. Actinolite di Malga Mont in Val di Rabbi e di Celledizzo in Val di Peio*. « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei », vol. X, pp. 315-319, Roma 1951.

(4) JOHN C. RABBITT, *A new study of the anthophyllite series*. « The American Mineralogist », vol. 33, pp. 263-323, May-June 1948.

che si ha nel gruppo z ; spesso è, invece, assai inferiore e la saturazione delle valenze è probabilmente operata da ioni K, Na, Ca, che in piccole percentuali entrano in tutte le antofilliti.

La posizione di questi elementi, però, è alquanto discussa. Il Bermann li pone nel gruppo x che comprende gli atomi a coordinazione 6. Non è da escludere che, in relazione al loro volume, presentino una coordinazione maggiore: 8 il calcio; 12 gli ioni di potassio e di sodio. In tal caso costituirebbero un aggruppamento a parte analogo a quello stesso che entra nella formula delle actinoliti.

Perciò la presenza di tali cationi ci fa pensare che il minerale analizzato, anziché essere un'antofillite pura, costituisca un primo termine di passaggio alle actinoliti e, in tal caso, la formula dell'antofillite verrebbe ad essere:



Le ricerche da me condotte sull'actinolite dell'amianto di Val di Bresimo, come vedremo, conferma tale ipotesi.

L'ossidrilite teoricamente dovrebbe essere $\text{OH} = 22$ ma, oltre che in questa antofillite, anche in altri anfibioli da me studiati, il valore è inferiore. Si può supporre che si sia avuta una disidratazione in seguito ad azione atmosferica, ma non è da escludere che si tratti di imperfezioni analitiche. Infatti, la determinazione dell'acqua di costituzione, anche usando il metodo proposto da Penfield, può essere inesatta, giacché è accertato che l'acqua negli anfibioli non è completamente asportata neppure a 1000 °C.

L'*actinolite*, in quantità subordinata, si insinua entro l'antofillite più addensata in alcune zone, del tutto assente in altre.

L'abito è prismatico alquanto allungato, il colore è verde di tonalità varia in relazione alla diversa dimensione dei cristalli; la lucentezza è vitrea fino a madreperlacea, sempre vivace per lo stato freschissimo dei cristalli che presentano le facce di prisma perfettamente lisce.

Non è stato possibile eseguire determinazioni goniometriche, perché anche gli individui più minuti sono formati da gruppi di cristalli paralleli e i riflessi appaiono sempre doppi oppure deboli e sfumati; inoltre manca costantemente la faccia di pinacoide, per le fratture trasversali.

Al microscopio l'actinolite è sempre trasparente e per lo più incolore; alcuni individui presentano distorsioni ed estinzione ondulata e sono attraversati da incrinature di sfaldatura e di frattura. Dove esiste una lieve colorazione si ha un leggero pleocroismo secondo il seguente schema:

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta = \text{incolore o verde pallidissimo} \\ \gamma &= \text{verde-grigio o giallo-verde chiaro.} \end{aligned}$$

Gli indici di rifrazione, determinati su dieci cristalli mediante la linea di Becke con una mescolanza di bromonaftalina e iodobenzolo a luce monocromatica, sono:

$$\begin{aligned}\alpha &= 1,619 \pm 0,002 \\ \beta &= 1,628 \pm 0,002 \\ \gamma &= 1,634 \pm 0,002.\end{aligned}$$

La potenza biriffrattiva massima calcolata è:

$$\gamma - \alpha = 0,015.$$

L'angolo z/γ è di 19° e $2 V$, misurato direttamente al tavolino di Fedoroff come media di otto letture, è risultato per la luce bianca:

$$2 V = 79^\circ,5.$$

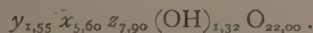
Il valore del peso specifico, determinato col metodo del picnometro, non è molto dissimile da quello ottenuto per l'antofillite, e, su una media di quattro determinazioni, è:

$$p. s. = 3,19.$$

Riporto anche qui i dati analitici, media di due analisi, riuniti in una tabella assieme ai rapporti stechiometrici:

% in peso		Quoz. atom.			
SiO ₂	53,96	Si	0,8984	7,30	} <i>z</i> = 7,90
Al ₂ O ₃	3,79	Al	0,0744	0,60	
TiO ₂	0,12	Ti	0,0015	0,01	
Cr ₂ O ₃	0,18	Cr	0,0024	0,02	} <i>x</i> = 5,60
Fe ₂ O ₃	1,15	Fe'''	0,0144	0,12	
FeO	3,48	Fe''	0,0484	0,39	
MnO	0,20	Mn	0,0028	0,02	} <i>y</i> = 1,55
MgO	25,01	Mg	0,6203	5,04	
CaO	9,53	Ca	0,1694	1,38	
Na ₂ O	0,54	Na	0,0174	0,14	} <i>y</i> = 1,55
K ₂ O	0,13	K	0,0028	0,03	
H ₂ O ⁺	1,47	OH	0,1632	1,32	
H ₂ O ⁻	0,31	O	2,7065	22,00	
99,87					

La formula di questa actinolite è perciò:



Ho condotto i calcoli usando i valori fino alla quinta decimale e così ho potuto constatare la perfetta saturazione delle valenze di anioni e cationi. Malgrado ciò, si notano diverse discordanze dei valori teorici: la somma degli atomi (Si + Al) non raggiunge il limite 8 e gli aggruppamenti x e y risultano rispettivamente l'uno in eccesso, l'altro in difetto.

In vario modo possono essere interpretate tali anomalie.

Il minerale potrebbe rappresentare un termine intermedio tra le antofilliti e le actinoliti e, nel passaggio da un reticolo all'altro, si sarebbe avuta una incompleta sostituzione di due atomi di magnesio da parte del calcio. Tale ipotesi non spiega però il valore inferiore dell'aggruppamento z . È da escludere un'inesattezza analitica, giacchè per ottenere risultati più precisi, ho eseguito l'analisi in doppio.

Neppure improbabile è che la roccia abbia subito un'azione dilavatrice ad opera di acque di infiltrazione o termali, che potrebbero avere allontanato dal reticolo cristallino parte dei cationi metallici e forse anche della silice od allumina.

Per conoscere il potere solvente dell'acqua sui vari ioni costituenti l'edificio spaziale di questo anfibolo, ho eseguito un'esperienza di soluzione.

Ho lavato cinque grammi di minerale polverizzato non molto finemente in un filtro a pori finissimi, con acqua distillata per la durata di 15 giorni ed ho determinato quantitativamente i componenti passati in soluzione.

Nella tabella riporto i pesi percentuali di tali componenti espressi in ossidi ed il rapporto percentuale indicante la solubilità relativa di essi:

		%
SiO ₂	0,076	0,144
Triv.	0,051	0,515
MgO	0,052	0,206
CaO	0,179	1,878
K ₂ O	0,081	49 c. a
Na ₂ O	0,221	40 c. a

Le cifre che esprimono la solubilità dei cationi K e Na sono assai alte: è evidente che lo scarso o scarsissimo contenuto di questi ossidi nel minerale non permettono di attribuire un valore assoluto ai dati ottenuti.

Per controllo, ho determinato la percentuale degli ossidi alcalini sul residuo secco del minerale dilavato. I risultati si possono così riassumere:

	% nel minerale	% nel filtrato	% nel residuo
K ₂ O	0,13	0,08	0,09
Na ₂ O	0,54	0,22	0,29

Risulta, perciò, confermata la forte solubilità dei cationi alcalini nei confronti di tutti gli altri ioni pur senza poterla indicare con precisione.

Prescindendo dalla solubilità del K e del Na, si può dire che nell'actinolite di Val di Bresimo il calcio è abbastanza solubile relativamente a tutti gli altri cationi che si dimostrano difficilmente allontanabili. Non è perciò da escludere che un'azione di soluzione abbia veramente agito sulla roccia.

D'altra parte, in relazione ai valori stechiometrici ottenuti, è da ammettere che l'anfibolo monoclinico compreso nell'amianto di Val di Bresimo rappresenti un termine intermedio tra l'actinolite e l'antofillite, anzichè una tipica actinolite.

Patologia. — *Sulla liberazione di nucleotidi da cellule batteriche per azione degli alcoli*^(*). Nota di G. FALCONE e G. PONTIERI, presentata ^(**) dal Corrisp. L. CALIFANO.

Da cellule di *Escherichia coli*, tenute a contatto per un'ora con alcoli primari, e poi lavate alla centrifuga e risospese in soluzione fisiologica, si ha passaggio in questa di sostanze fortemente assorbenti nell'ultravioletto con un massimo a 2575 Å. Questo comportamento spettrofotometrico e la positività della reazione di Bial indicano che tali sostanze sono nucleotidi non potendosi per ora dire se si tratti di mononucleotidi o di polinucleotidi e nel primo caso se siano mononucleotidi liberi, esistenti come tali nelle cellule, o provengano dalla scissione di più complessi composti.

Si è trovato che la concentrazione più adatta di alcool per la dimostrazione del fenomeno è quella del 60 % per gli alcoli dal metilico all'isopropilico mentre per il butilico terziario è del 20 %. La prima figura dimostra la dipendenza del fenomeno dalla concentrazione per l'alcool propilico, la curva di assorbimento più alta corrisponde appunto alla concentrazione del 60 %, mentre per una concentrazione maggiore (90 %) essa è molto più bassa (curva 2).

La seconda figura illustra l'azione dell'alcool butilico terziario; la curva più alta corrisponde alla concentrazione del 20 %.

L'azione degli alcoli sull'estrazione di nucleotidi è in rapporto con la lunghezza della catena carboniosa perchè col crescere di quest'ultima essa diventa progressivamente più accentuata: minima per il metilico è massima per il butilico terziario, progressione che risulta anche dal fatto cui si è accennato che mentre per i primi termini della serie la concentrazione ottimale è del 60 %, per il butilico, invece, è del 20 %. La terza figura riproduce tale comportamento.

L'alcool isopropilico si comporta più come l'alcool etilico che quello propilico ciò che forse si può spiegare col fatto che esso è, in effetti, un alcool 1-metil etilico e perciò con comportamento fisico molto più simile a quello dell'alcool etilico che a quello del propilico.

Se cellule batteriche che hanno subito l'azione dell'alcool, vengono esposte al calore alla temperatura ottimale utile per la massima liberazione di nucleotidi per azione del calore, si ha un più cospicuo passaggio di nucleotidi nel mezzo di sospensione in confronto di quello che si ha dalle cellule non trattate con alcool. La quarta figura mostra questo fatto.

Da queste ricerche risulta un fatto fino ad ora non dimostrato e cioè che gli alcoli esercitano potere estrattivo sulle cellule batteriche. Con ciò

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Microbiologia della Università di Napoli.

(**) Nella seduta del 14 giugno 1952.

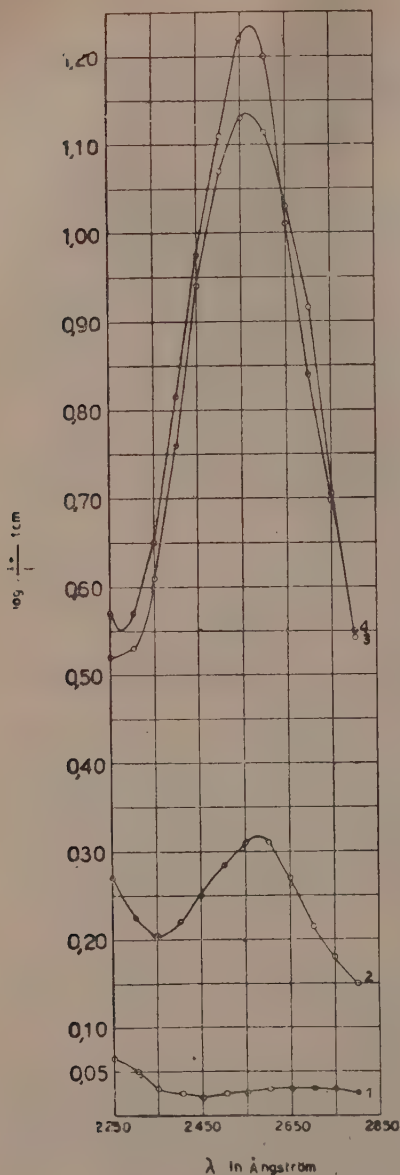


Fig. 1. - Curve di assorbimento di liquidi di terzo lavaggio di sospensioni di *E. coli* tenute per 3 h:

- 1) in soluzione fisiologica
- 2) in alcool propilico al 90 %
- 3) in alcool propilico al 30 %
- 4) in alcool propilico al 60 %

non si vuol dire che essi estraggano direttamente nucleotidi dalle cellule perchè è possibile che questi passino in soluzione perchè sono stati solubilizzati altri costituenti del citoplasma o dei suoi involucri ed i nucleotidi vengano fuori dalla cellula appunto in virtù dello scompaginamento determinatosi sulla cellula per l'allontanamento, da estrazione, di tali costituenti.

Si può in questo fenomeno di estrazione dei nucleotidi vedere una analogia di comportamento con il potere disinfettante degli alcoolli, per il fatto che in entrambi i casi la concentrazione ottimale è tra il 50 ed il 70 %. Sin dal 1898 Minervini⁽¹⁾ dimostrò che l'alcool etilico diluito esercita potere disinfettante più intenso dell'alcool assoluto; ciò è stato confermato più recentemente da Price⁽²⁾, Kokko⁽³⁾, Witz⁽⁴⁾ e Tanner e Wilson⁽⁵⁾ ed è ora cognizione comune per quanto non spiegata nè dal punto di vista fisico nè da quello biologico.

Anche il fatto che il potere estrattivo è dipendente dalla lunghezza della catena carboniosa degli alcoolli, trova corrispondenza in analogo comportamento del potere disinfettante degli alcoolli. Infatti questo aumenta con l'aumentare della catena carboniosa (Tilley e Scheffer⁽⁶⁻⁷⁾), fenomeno che,

(1) R. MINERVINI, «Z. Hyg. Infektionskr.», 29, 117 (1898).

(2) P. B. PRICE, «Arch. Surg.», 38, 528 (1939).

(3) V. P. KOKKO, «Arch. Hyg. Bact.», 122, 44 (1939).

(4) M. WITZ, «Arch. Hyg.», 124, 243 (1940).

(5) F. W. TANNER and F. L. WILSON, «Proc. Soc. Exptl. Biol. Med.», 40, 143 (1943).

(6) F. W. TILLEY and J. M. SCHAFFER, «J. Bact.», 12, 303 (1926).

(7) F. W. TILLEY and J. M. SCHAFFER, «J. Bact.», 16, 279 (1928).

secondo Fergusson⁽⁸⁾, è dovuto ad una regolare variazione di proprietà fisiche da un membro al seguente di una determinata serie di omologhi. Inoltre Tanner e Wilson⁽⁹⁾, stabilirono come diminuisca per un dato

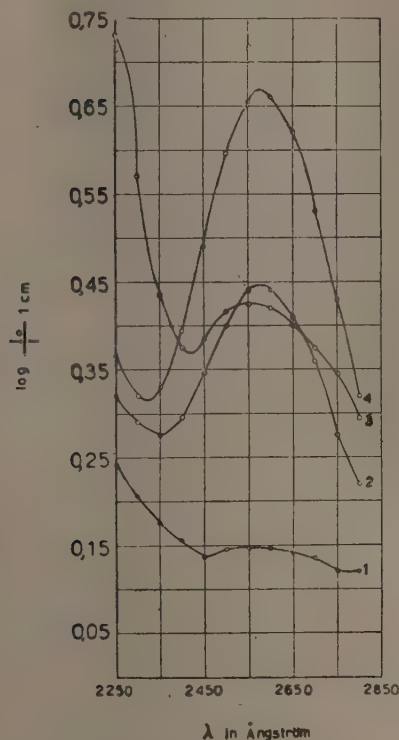


Fig. 2. - Curve di assorbimento di liquidi di terzo lavaggio di sospensioni di *E. coli* tenute per 1 h.:

- 1) in soluzione fisiologica
- 2) in alcool butilico terziario al 60%
- 3) in alcool butilico terziario al 90%
- 4) in alcool butilico terziario al 20%

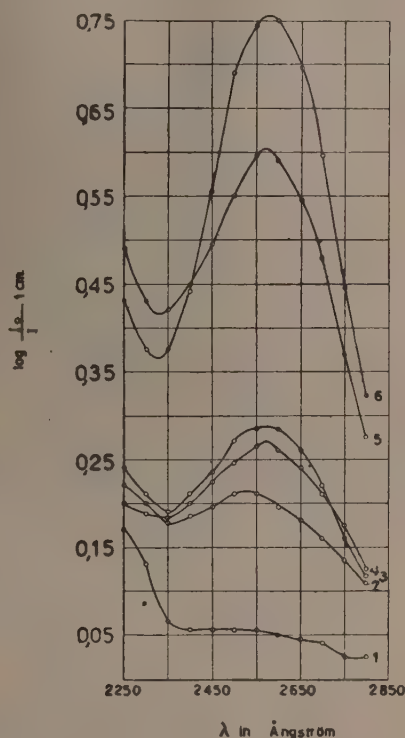


Fig. 3. - Curve di assorbimento di liquidi di terzo lavaggio di sospensioni di *E. coli* tenute per 1 h.:

- 1) in soluzione fisiologica
- 2) in alcool metilico al 60%
- 3) in alcool isopropilico al 60%
- 4) in alcool etilico al 60%
- 5) in alcool propilico al 60%
- 6) in alcool butilico terziario al 20%

alcool dal composto primario, all'iso, al secondario, al terziario, il potere disinfettante; fatto già messo dal Cowles⁽⁹⁾ in stretta relazione con un'azione di superficie.

La osservazione che gli alcoli in concentrazione ottimale per la liberazione di nucleotidi inducono più cospicuo distacco degli stessi composti per azione del calore è di particolare interesse.

(8) J. FERGUSSON, «Proc. Roy. Soc.», B. 127, 387 (1939).

(9) P. B. CAWLES, «Yale J. Biol. Med.», 11, 33 (1938).

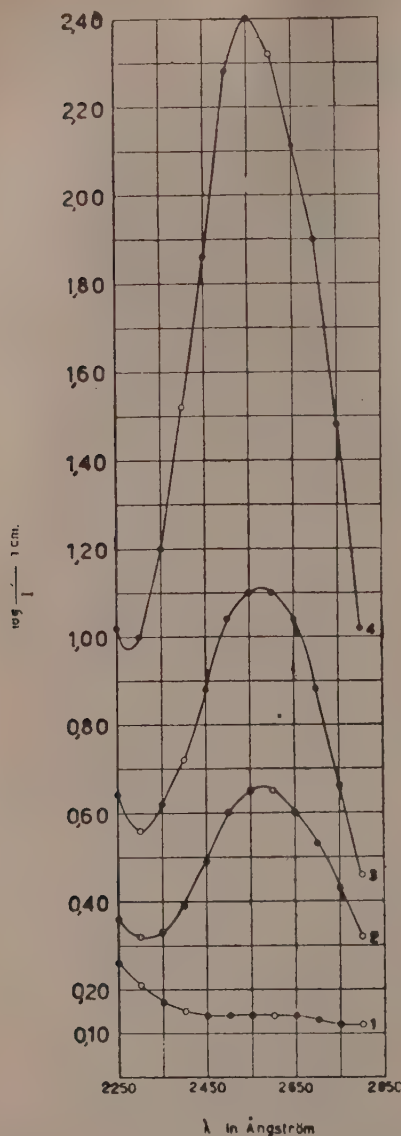


Fig. 4. - Curve di assorbimento di liquidi di terzo lavaggio di sospensioni di *E. coli* tenute per 1 h.:

- 1) in soluzione fisiologica
- 2) in alcool butilico terziario al 20 %
- 3) in soluzione fisiologica e poi riscaldate a 60° C. per 10'
- 4) in alcool butilico terziario al 20 % e poi riscaldate a 60° C. per 10'

Da ricerche variamente eseguite è risultato che la denaturazione proteica indotta dal calore (Califano ⁽¹⁰⁻¹¹⁾), come da raggi ultravioletti (Califano ⁽¹²⁾), o da denaturanti chimici (Califano ⁽¹³⁾), ostacola od anche annulla la liberazione di nucleotidi per azione del calore forse perchè è impedita la rottura dei legami chimici che uniscono i nucleotidi alle proteine o forse perchè nel precipitato essi vengono inclusi e non sono pertanto solubilizzabili. Con le presenti ricerche si è trovato che non solo il trattamento delle cellule con alcoli - in concentrazioni ottimali - non esercita analogo effetto, ma anzi favorisce il passaggio in soluzione dei nucleotidi dalle cellule per azione del calore. Il quale fatto porta a concludere che denaturazione proteica per quelle concentrazioni non ha luogo. Se ciò è vero se ne deve anche dedurre che l'azione dell'alcool sui batteri non comporta necessariamente coagulazione delle proteine e l'azione disinfettante da essi esercitata non si avvera esclusivamente con tale meccanismo ma anche con quello della estrazione di costituenti del citoplasma e degli involucri cui consegue distacco dalle cellule batteriche di nucleotidi. L'uno e l'altro fatto possono evidentemente rendere ragione della morte delle cellule.

Si deve notare che Gale e Taylor ⁽¹⁴⁾ riportano ad estrazione di costi-

(10) L. CALIFANO, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », ser. VIII, 8, 94 (1950).

(11) L. CALIFANO, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », ser. VIII, 9, 142 (1950).

(12) L. CALIFANO, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », ser. VIII, 12, 37 (1952).

(13) L. CALIFANO, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », ser. VIII, 12, 30 (1952).

(14) E. F. GALE and E. SHIRLEY TAYLOR, « J. Gen. Micr. », 1, 77 (1947).

tuenti cellulari l'azione disinfettante del fenolo. Più significative sono, però, le ricerche di Dagley, Dawes e Morrison ⁽¹⁵⁾, che hanno dimostrato come sia reversibile l'azione degli alcoli etilico, n-propilico n-butilico, n-esilico, n-amilico, dell'acetone, del fenolo, dell'acetato di etile per aggiunta di nutrienti ciò che sta ad esprimere il fatto che l'alcool nelle concentrazioni da essi usate determina passaggio all'esterno di tali nutrienti che la cellula non è in grado di sintetizzare per l'azione dell'alcool esercitata sui relativi fermenti la cui rigenerazione si avvera quando la cellula è messa in condizioni di potersi riprodurre.

Per concentrazioni più elevate di alcool è probabile che una denaturazione proteica abbia luogo; certo è, che l'azione estrattiva è molto meno intensa. Poichè l'azione disinfettante degli alcoli è, come si è detto, meno intensa per tali concentrazioni si può dedurre che se la denaturazione ha luogo essa non si eserciti su costituenti essenziali della cellula e questi vengono ricostituiti tosto che il germe sia messo in grado di assumere i costituenti dal mezzo di sviluppo o rigenerarli con la riproduzione, ciò che esso può fare perchè non ha subito l'azione estrattiva, cioè l'azione veramente letale per la economia cellulare.

La maggiore liberazione di nucleotidi per azione del calore da parte delle cellule trattate con alcool si può spiegare quale espressione dello scompaginamento della microstruttura cellulare per la solubilizzazione di suoi costituenti. In altri termini, sia il passaggio di nucleotidi da cellule non riscaldate, come quello di più elevata quantità di essi per azione del calore è espressione di uno stesso fatto cioè il distacco dalla superficie cellulare di costituenti solubilizzati dall'alcool.

MATERIALE E METODO. — Si è sperimentato con cellule di *E. coli* (806 I.S.I.) provenienti da culture in agar di 24 h, lavate tre volte in centrifuga con soluzione fisiologica, e quindi filtrate per filtri di Jena a pori larghi (3 G 1, 3 G 2) al fine di rendere le sospensioni del tutto omogenee. Si è sperimentato con alcool metilico, etilico, propilico, isopropilico, butilico terziario ed è stata determinata la concentrazione ottimale di ogni tipo di alcool, la concentrazione cioè che provoca estrazione di maggiore quantità di nucleotidi dalle cellule. A tale uopo, in tubi contenenti ciascuno 1 cc. di sospensione batterica venivano aggiunti rispettivamente cc. 9 di alcool variamente diluito in soluzione fisiologica, ottenendo concentrazioni finali del 30 %, 60 %, 90 %. Per l'alcool butilico terziario si sono adoperate anche soluzioni al 20 % ed al 40 %. I germi venivano tenuti a contatto con gli alcool per 1 h a temperatura ambiente, quindi centrifugati per 15-20 m' a 10.000 giri e poi lavati due volte ancora in centrifuga con soluzione fisiologica, ponendo cura che ogni volta la sospensione di germi fosse omogenea.

Dopo il secondo lavaggio le sospensioni batteriche venivano divise in due quote eguali: di queste una veniva riscaldata per 10 m' a 60 °C., tempe-

(15) S. DAGLEY, E. A. DAWES and G. A. MORRISON, « J. Bacter. », 60, 369 (1950).

ratura ottimale per il distacco di nucleotidi da cellule di *E. coli*, e l'altra restava per 30 m' a temperatura ambiente. Si centrifugava quindi per 20 m' a 10.000 e sui sopranatanti limpidi, se necessario, opportunamente diluiti, si ricercava, a mezzo di uno spettrofotometro di Beckmann con vaschette di quarzo di 1 cm. di lato, la curva di assorbimento nell'ultravioletto. Naturalmente per ogni prova veniva allestito un controllo costituito da 1 cm. della sospensione batterica con 9 cc. di soluzione fisiologica.

Esperimenti analoghi sono stati poi eseguiti adoperando contemporaneamente tutti i vari alcoli provati fatti agire in concentrazione ottimale, per osservarne il diverso potere estrattivo.

D. DE BLASI e U. AMALDI.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Ferie 1952 - Settembre-ottobre

NOTE DI SOCI

(Ogni Nota porta a piè di pagina la data di arrivo o di presentazione)

Analisi matematica. — *Equazioni differenziali ordinarie negli spazi astratti; osservazioni su una Nota del prof. B. Ferretti.* Nota (*) del Corrisp. RENATO CACCIOPPOLI.

Con una Nota recentemente pubblicata in questi « Rendiconti » (*) il prof. Bruno Ferretti ha voluto far conoscere agli analisti alcune considerazioni su certe « equazioni operatoriali », di cui fa uso in ricerche di Fisica teorica. Per questa ragione potranno forse essere opportune le semplici osservazioni seguenti; i teoremi qui appresso enunciati essendo troppo ovvi per avere una qualsiasi pretesa di originalità.

1. Sia A un punto variabile in uno spazio lineare metrico completo Σ , e con $\|A\|$ si indichi la norma che definisce le distanze in Σ . Consideriamo l'equazione differenziale

$$(1) \quad \frac{dA}{d\lambda} = F(A, \lambda),$$

essendo $F(A, \lambda)$ un punto di Σ funzione continua di A e λ .

Quando sia verificata una disuguaglianza del tipo

$$\|F(A_1, \lambda) - F(A_2, \lambda)\| \leq K \|A_1 - A_2\| \quad (K \text{ cost.})$$

si dice che $F(A, \lambda)$ è *lipschitziana*, rispetto ad A .

Se $F(A, \lambda)$ è *lipschitziana*, sussiste per l'equazione differenziale (1) il teorema di esistenza e di unicità; la dimostrazione è letteralmente quella, fondata sulle approssimazioni successive, del teorema elementare sulle equazioni differenziali ordinarie.

(*) Pervenuta all'Accademia il 23 settembre 1952.

(1) Su di una classe di equazioni operatoriali. Vol. XII, fasc. 5, pp. 473-76 (1952).

Se $F(A, \lambda)$ è supposta soltanto continua, resta valido il teorema di esistenza; anche questo risultato si stabilisce immediatamente con procedimenti classici nella teoria delle equazioni differenziali ordinarie.

Parlando di continuità in Σ , senz'altro, si intende quella definita in base alla nozione di distanza: $A_n \rightarrow A$ significa $\|A_n - A\| \rightarrow 0$. Ma nel precedente enunciato la continuità si può supporre subordinata ad una definizione di convergenza (debole) meno restrittiva, introdotta a priori, purchè questa consenta, con qualche condizione supplementare se del caso, il passaggio al limite sotto il segno di integrale; la continuità rispetto a λ può poi sostituirsi con l'integrabilità.

Per esempio se $A \equiv (x_1, x_2, \dots)$ è naturale definire per un verso $\|A\|$ mediante l'estremo superiore della successione $\{|x_i|\}$, e per un altro la convergenza debole in base alle relazioni di limite $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{in} = x_i$, con l'ulteriore condizione che le x_{in} siano limitate nel loro complesso.

Tale caso particolarmente semplice, quello cioè dei sistemi di infinite equazioni differenziali con infinite funzioni incognite, è stato considerato da gran tempo ⁽²⁾. Un altro esempio è fornito dalle matrici A delle forme bilineari limitate secondo Hilbert, cioè dagli operatori lineari continui nello spazio hilbertiano; $|A|$ è allora l'estremo o confine (*Schranke, borne*) della matrice.

2. Il prof. Ferretti si è occupato del caso che le matrici siano hermitiane; e naturalmente, ai fini del teorema generale precedente, questa o altra proprietà speciale che definisca una varietà lineare è indifferente. Ma l'Autore ha voluto più particolarmente considerare matrici prive di spettro continuo: ora è ovvio che queste non costituiscono una varietà lineare ⁽³⁾.

L'Autore introduce quelli che chiama «operatori hermitiani» sostanzialmente in base a due proprietà. La prima è quella di essere definiti in tutto uno spazio hilbertiano, ciò che notoriamente implica la limitatezza o continuità che dir si voglia (teorema di Hellinger-Toeplitz ⁽⁴⁾). La seconda è il carattere (non lineare) esclusivamente puntuale dello spettro, e conduce a definire la norma $\|A\|$ come l'estremo superiore $L(A)$ dei moduli degli autovalori. Dopo ciò l'Autore applica indiscriminatamente operazioni lineari, come somme ed integrazioni; e sembra ammettere così (stando almeno alla lettera della trattazione) che in tal modo non possano introdursi spettri continui.

Il teorema segnalato dal prof. Ferretti va dunque enunciato semplicemente per operatori limitati (hermitiani o meno non importa), prescindendo

(2) Fra altri specialmente da W. L. HART, «Trans. of the Am. Math. Soc.», 18 (1917), 23 (1922); «Am. Journal of Math.», 43 (1921).

(3) È noto anzi che già l'aggiunzione di una matrice completamente continua (*vollstetig*) può fare apparire o scomparire lo spettro continuo (WEYL, «Rend. Circ. Mat. Palermo», 27 (1909)).

(4) «Math. Annalen», 69 (1910).

La susseguente definizione di «operatore hermitiano limitato» non ha dunque ragione d'essere, tutti gli operatori considerati essendo limitati.

da qualsiasi ipotesi o illazione sulla natura degli spettri; e rientra allora nel precedente teorema generale.

3. Non sarà forse inopportuno illustrare le precedenti osservazioni con un facile esempio.

Si ponga, in termini di forme quadratiche (matrici simmetriche)

$F_1 = x_1 x_2 + x_3 x_4 + \dots$, $F_2 = x_2 x_3 + x_4 x_5 + \dots$, $F(\lambda) = \alpha(\lambda) F_1 + \beta(\lambda) F_2$,
con

$$\alpha(\lambda) \beta(\lambda) = 0, \quad \int_0^1 \alpha(\lambda) d\lambda = \int_0^1 \beta(\lambda) d\lambda = 1.$$

$F(\lambda)$ ha spettro esclusivamente puntuale (anzi finito) per ogni valore di λ ; ma l'integrale

$$\int_0^1 F(\lambda) d\lambda = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + \dots$$

è la notissima forma quadratica a spettro esclusivamente continuo, addotta come primo esempio da Hilbert.

Fisica. — *Considerazioni sulle forze nucleari.* Nota (*) del Socio QUIRINO MAJORANA.

Il nucleo atomico è costituito dalla riunione in piccolo spazio, di un certo numero di particelle elementari (protoni e neutroni), che va da 1 a 242. Questo limite massimo è invece di 239 (isotopo dell'uranio), se si considerano solo gli elementi esistenti in natura; al di là, si tratta di qualche elemento instabile, ottenuto artificialmente. Ammettendo che il nucleo sia costituito da soli protoni e neutroni, con esclusione di elettroni, è stato possibile formularne una teoria, come ha fatto Fermi, prevedendo anche l'esistenza del neutrino. Ma, secondo Beck, non vi sarebbe ragione fondata, per quella esclusione; rimarrebbe il problema di concretare un'altra soddisfacente teoria. Comunque, è certo che la costituzione del nucleo atomico è possibile, grazie all'esistenza di forze attrattive, che vogliamo chiamare *forze nucleari*, e che trattengono insieme i vari nucleoni. A tali forze, se ne contrappongono altre di natura elettrica, e repulsive, fra le cariche dei protoni, ma che, a piccola distanza, sono trascurabili, di fronte alle forze nucleari. La fisica teorica ammette, in base a risultati sperimentali, che tali ultime forze siano 10^{38} volte superiori, rispetto a quelle calcolabili, applicando la legge di Newton. La complessità dei fatti che danno luogo alla costituzione del nucleo, o che si svolgono nel suo interno, porta ad ammettere che le forze nucleari debbono

(*) Pervenuta all'Accademia il 12 agosto 1952.

più propriamente definirsi forze di scambio, come aveva proposto a suo tempo Heisenberg, analogamente a quelle di natura chimica.

Deriva da quanto si è detto, che il valore 10^{38} non può rappresentare al più, che un valore medio, di cui non si conosce bene l'approssimazione. Si ammette, inoltre, che le forze nucleari fanno sentire la loro azione, soltanto sino a distanza paragonabile alle dimensioni dei nucleoni. E si ha ragione di credere che queste dimensioni, nella formazione dei nuclei, restano sensibilmente invariate. Da ciò consegue, che il volume complessivo del nucleo è proporzionale alla sua massa atomica, cioè al numero dei propri costituenti. La fisica teorica ammette che un nucleone abbia un raggio d'azione (per quanto concerne le sue forze nucleari) dell'ordine di $1,5 \cdot 10^{-13}$ cm., che si può ritenere coincidente con quello della sfera, che, per semplicità, corrisponde alla sua forma, e che ha perciò un diametro di $3 \cdot 10^{-13}$ cm. Ma da ciò, risulterebbe evidentemente, per ragioni geometriche, ed in un ipotetico caso statico, che non tutte le parti di ciascun nucleone agirebbero su tutte quelle dell'altro, posto in immediato contatto. Per cui, penso che il raggio d'azione di una singola particella, sia pure in modo rapidamente decrescente, debba essere portato al diametro di essa, e forse a due o tre volte tanto.

Il più semplice nucleo atomico, dopo il rotone (${}^1\text{H}^+$), è il deutone (${}^2\text{H}^+$), risultante dall'unione di un protone e di un neutrone. Questa è l'unica combinazione binaria constatabile, delle tre immaginabili, fra quelle particelle elementari. Essa ha dato luogo a molti studi sperimentali e teorici. La sua energia di legame, corrispondente al lavoro necessario per scindere le due particelle, risulta di $3,48 \cdot 10^{-6}$ erg, ossia 2,19 MeV. Essa apparisce piuttosto bassa, rispetto a quella di nuclei più complessi; e darebbe perciò ragione di credere che le dimensioni del deutone debbano essere notevolmente maggiori del raggio d'azione delle forze nucleari. Per vero, una simile asserzione non appare intuitiva, senza complesse ipotesi supplementari; si conferma così il dubbio precedentemente espresso.

Ciò premesso, venendo allo scopo principale di questa Nota, vogliamo prescindere da molte caratteristiche costitutive del deutone, ed ammettere che esso consista nella semplice riunione di un protone e di un neutrone, che risultano così permanentemente in contatto, ed in quiete. Evidentemente, questa condizione di cose è ben lontana dal vero, e dai risultati teorici e sperimentali, che permettono di stabilire, oltre all'energia di legame, gli spin delle particelle ed il momento angolare del deutone. Ma si ricorre a tale ammissione, per semplicità, pur senza venir meno all'attendibilità di quanto ora sarà esposto.

Ammettendo, come si è detto, che il rapporto tra la forza attrattiva nucleare, fra un protone ed un neutrone, sia 10^{38} volte quella newtoniana, ci si può chiedere quale possa essere la ragione intima della coesistenza di questi due tipi di forze, tanto diverse per valore, l'una dall'altra. Se, come si tenta di fare in altri casi, si volesse stabilire una teoria unitaria, fra le forze attrattive della materia neutra (e tale progetto riuscirebbe più opportuno, in confronto di altri, fra fenomeni del tutto dissimili), non si comprenderebbe la

ragione di quella coesistenza. A parte ciò, sembra formalmente possibile, scrivere una funzione $f(r)$, della distanza, fra le particelle materiali m_1, m_2 , che esprima tanto le forze newtoniane, quanto le nucleari. Anzi tale possibilità può non essere univoca; ma nella forma più semplice, può la detta funzione venire così espressa:

$$(1) \quad f(r) = k m_1 m_2 \left(\frac{1}{r^2} + \frac{a}{r^n} \right),$$

dove, k è la costante newtoniana o di Cavendish ed a ed n delle costanti da determinare. Si comprende che, per l'opportuna scelta di queste ultime; a seconda dei valori, grandi o piccoli di r , la $f(r)$ possa risultare limitata al primo od al secondo termine fra parentesi. Per la ricerca di a ed n , occorre stabilire due relazioni, che possono esser fornite da fatti sperimentali o da ipotesi, precedentemente accettate. Una prima relazione si ha, scrivendo che la forza attrattiva fra due nucleoni, in contatto, è come si è detto, uguale ad $\alpha = 10^{38}$ volte quella newtoniana. Ammettiamo dunque che tale rapporto α , valga per il caso di un protone ed un neutrone. I loro centri risultano, così, alla distanza $\rho = 3 \cdot 10^{-13}$ cm. Essendo la quantità $k m_1 m_2$ costante, i termini fra parentesi della (1) stanno anch'essi, per $r = \rho$, nel rapporto α . Si ha dunque:

$$(2) \quad \alpha/\rho = a/\rho^n, \quad \text{cioè:} \quad a = \alpha \rho^{n-2}.$$

Per avere una seconda relazione, si deve considerare l'energia E , sviluppata in conseguenza della riunione del protone col neutrone, corrispondente al lavoro della loro forza attrattiva. D'altra parte, l'ipotesi di Einstein ammette che $E = \Delta m c^2$, essendo Δm il difetto o variazione di massa, che si verifica nel congiungimento delle due particelle che formano il deutone. Come è noto, quell'ipotesi sembra venire verificata esattamente dall'esperienza. In essa, non è però considerato il lavoro di caduta delle due particelle l'una sull'altra. Se ciò fosse plausibile, si dovrebbe ammettere che le forze nucleari vengano a manifestarsi, solo quando le particelle sono in contatto, senza compiere alcun lavoro preventivo: ciò non sembra accettabile. Ora, ammessa la liberazione di E , se ne può anche stabilire il valore servendosi della meccanica classica. Si avrà:

$$(3) \quad E = \Delta m c^2 = \int_{\rho}^{\infty} f(r) dr = k m_1 m_2 \int_{\rho}^{\infty} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{a}{r^n} \right) dr.$$

Nell'integrazione, si può trascurare il primo termine fra parentesi; tenendo conto della (2), si hanno così i valori:

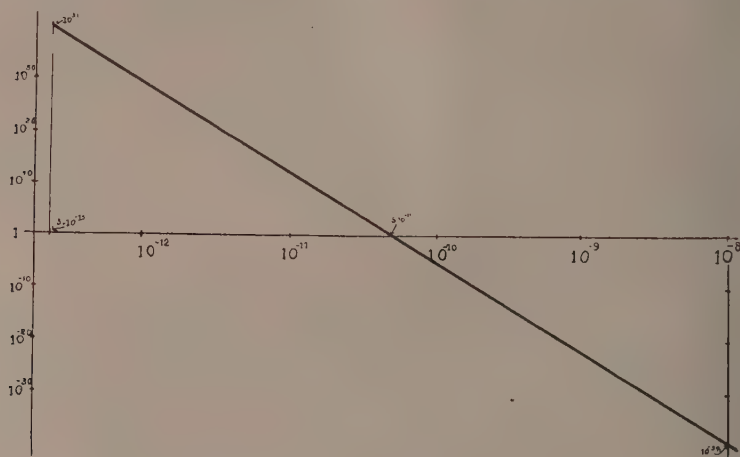
$$(4) \quad n = \frac{k m_1 m_2}{\Delta m c^2} \frac{\alpha}{\rho} + 1; \quad a = \alpha \rho^{n-2}.$$

I valori noti, delle costanti, in queste formule, sono: $k = 6,68 \cdot 10^{-8}$; $m_1 = 1,67348 \cdot 10^{-24}$ gr. (protone); $m_2 = 1,67482 \cdot 10^{-24}$ gr. (neutrone); $\rho = 3 \cdot 10^{-13}$ cm.; $\alpha = 10^{38}$; $\Delta m = 3,8678 \cdot 10^{-27}$ gr.; $c = 2,9976 \cdot 10^{10}$ cm. Sosti-

tuendo, si ha $n = 18,95$; $\alpha = 4,450 \cdot 10^{-175}$. A proposito di questi risultati numerici, si avverte che, dipendendo essi da una funzione esponenziale, potrebbero subire notevoli variazioni, qualora le costanti, prima riportate, subissero anche lievi cambiamenti. E ciò è possibile che avvenga, anche perchè i vari autori non sono d'accordo sui precisi valori di quelle costanti. A parte ciò, possiamo così scrivere la funzione $f(r)$:

$$(5) \quad f(r) = 6,68 \cdot 10^{-8} m_1 m_2 \left(\frac{1}{r^2} + \frac{4,450 \cdot 10^{-175}}{r^{18,95}} \right).$$

Tale relazione soddisfa in modo quasi perfetto, alla predominanza della forza nucleare sulla newtoniana, nel caso di piccolissime distanze. Così, mentre tali forze stanno nel rapporto $\alpha = 10^{38}$, per la distanza $3 \cdot 10^{-13}$ cm., di-



Rapporti fra forza nucleare e newtoniana.

Ascisse: Logaritmi delle distanze atomiche.

Ordinate: Logaritmi dei rapporti.

ventano fra loro eguali, a circa $5 \cdot 10^{-12}$ cm. Per rendersi facilmente conto di simili relazioni, si può costruire il diagramma della figura, nel quale sono riportati come ascisse, i logaritmi delle distanze, fra i due nucleoni, da $3 \cdot 10^{-13}$ a 10^{-8} cm.; e come ordinate quelli dei rapporti fra forza nucleare e newtoniana. Come si vede, l'andamento del diagramma è rettilineo. Tale retta, tagliando l'asse delle ascisse nel punto $5 \cdot 10^{-12}$, conferma quanto ora si è detto. Inoltre, si vede che a distanza $3 \cdot 10^{-12}$, il rapporto è circa 10^3 ; e a 10^{-12} è circa 10^{29} . Per distanze $\gg 5 \cdot 10^{-12}$, il secondo termine fra parentesi della (5) diventa del tutto trascurabile. Così, alla distanza 10^{-8} cm., la forza newtoniana è circa 10^{38} volte maggiore, di quella nucleare (il contrario di quanto succede per $3 \cdot 10^{-13}$ cm.). Ma incidentalmente, va osservato, che tale forza newtoniana è, a sua volta, assai inferiore a quella di coesione della materia solida (ed anche liquida). Infatti, si può approssimativamente calcolare tale forza, deducendola dal carico di rottura di un solido. Per l'acciaio tale sforzo,

riportato a quello presumibile fra due atomi prossimi, sarebbe 10^{26} volte maggiore: tali nuclei sono alla distanza di 10^{-8} cm. Da ciò si deduce che la forza di coesione ha origine diversa da quella nucleare, e più propriamente essa è analoga a quelle di carattere chimico.

Occupiamoci ora di una più minuta interpretazione delle (4) e (5). Siamo pervenuti ad esse, considerando tre fatti diversi; 1° la caduta di un neutrone su di un protone (o viceversa) e la conseguente congiunzione di tali particelle; 2° la liberazione di una certa quantità di energia E ; 3° il difetto di massa Δm , manifestatosi insieme ai due fatti precedenti. La fisica teorica accetta l'ipotesi di Einstein, della equivalenza fra massa ed energia, espressa dalla relazione $E = \Delta m \, c^2$. Non pare che essa dia alcun rilievo al 1° fatto. Secondo la relazione ora citata, si dovrebbe solo ammettere che la massa sparita Δm , si sia trasformata nell'energia E , e null'altro vi sarebbe da considerare. Ma il difetto di massa è solo constatabile, quando più nucleoni si sono avvicinati; e non si è mai rilevato che uno di essi diventi più leggero, in assenza degli altri. Appare quindi più logico ritenere che il 3° fatto sia una necessaria conseguenza del primo. Si può pensare che, a sua volta, la riunione di due nucleoni, seguita dal manifestarsi del difetto di massa, lasci sviluppare l'energia E . Per cui, il 2° fatto sarebbe l'ultima conseguenza del 1° e del 3° insieme. Ma se si ammettesse ciò, cadrebbe la generalità della legge di Einstein, che avrebbe valore soltanto se si verificasse il 2° fatto, insieme con gli altri due. Sembra dunque più intuitivo ammettere che il 1° fatto dia luogo al 2° (cioè la riunione, sino al loro contatto, dei nucleoni, provoca la liberazione di energia); e che, a sua volta, il 3° sia un'altra conseguenza di una parte del 1° (cioè l'avvicinamento delle particelle produce, per suo conto, il difetto di massa). A conferma di tali considerazioni si osserva che non si è mai constatato che nucleoni riuniti abbiano la stessa massa di quando sono liberi; mentre nulla vieta di pensare che essi possano accrescere la loro energia, assorbendola dall'ambiente.

E d'altronde, la manchevolezza dell'ipotesi di Einstein si può anche rilevare, dal fatto che non si è mai osservato che un nucleone si sia trasformato completamente in energia. Si cerca di sminuire la portata di tale osservazione, contando sulla futura scoperta dell'*antiprotone* (protone negativo). Esso, combinandosi col protone positivo conosciuto, darebbe luogo ad una quantità di energia dell'ordine di mille volte quella che si sviluppa nella formazione del deutone, ed alla completa sparizione dei due nucleoni, di segno opposto. Ma credo che una simile aspettativa sia del tutto vana.

Vogliamo ancora considerare il processo inverso, cioè di assorbimento di energia da parte della materia, con conseguente accrescimento della sua massa. Ciò avviene, per esempio, in un processo di fotodisintegrazione, lasciando cadere sul deutone raggi γ , ottenuti con elettroni di alta energia, oppure del torio C'. Se l' $h\nu$ corrispondente a tali raggi, ha il preciso valore dell'energia di legame del deutone, le due particelle che lo compongono si staccano e rimangono lontane l'una dall'altra, senza energia cinetica. Corrisponde ciò al caso macroscopico, di un ipotetico lancio di un sasso, dalla Terra (supposta

nulla la resistenza dell'aria), con la velocità di fuga di circa 11 km/sec. L'energia del fotone si è così trasformata in energia potenziale, essendosi accresciuta la distanza fra i centri delle due particelle, componenti il deutone. Basta all'uopo che tale distanza sia passata da $3 \cdot 10^{-13}$ cm., a qualcosa come 10^{-12} o 10^{-11} cm. Con ciò, la massa delle particelle si verrebbe ad accrescere, tornando al valore che essa ha, se isolata. La legge di attrazione fra le particelle è, a quella distanza, tanto in base alla fisica teorica, quanto alla formula ora proposta, quella di Newton.

È bene formulare ora un'ulteriore considerazione, circa il principio di equivalenza fra massa ed energia, asserito da Einstein. Si suole invocare questo principio, quale la più bella e suggestiva prova della perfetta attendibilità della teoria speciale della relatività. Tale asserzione apparisce del tutto ingiustificata, per le seguenti ragioni. La velocità della luce, c , era ben conosciuta nel caso di sistemi in quiete, già prima dell'avvento di quella teoria. Questa, come è ben noto, considera sistemi in reciproco moto di traslazione uniforme. Ed il suo 2° postulato afferma la invarianza di c , per qualunque osservatore. Ora, questo principio, del quale ho mostrato, in Note precedenti ed in più maniere, la completa manchevolezza ed inattendibilità, non viene mai ad esser ricordato, nell'asserzione di detta equivalenza tra massa ed energia. Questa rappresenta un'ardita ipotesi (basantesi su di una gratuita semplificazione di relazioni matematiche, concernenti il caso di elettroni in moto; e l'elettricità non entra nelle considerazioni di massa ed energia) di Einstein. Essa non si appoggia al 2° postulato; ed anche riferendosi alle belle esperienze che sembrano confermare la formula di Einstein, queste non rappresentano affatto, un controllo della relatività, perchè il sistema nel quale avviene l'asserita trasformazione tra massa ed energia, è per noi in assoluta quiete.

Occorre dunque, cercare di spiegare in altra guisa l'interessante fenomeno del difetto di massa, non più interpretabile con l'ipotesi di Einstein. Per vero, nulla sappiamo, circa la intima natura delle forze attrattive tra masse materiali. Nel campo macroscopico quelle che noi consideriamo, riportate idealmente alle particelle ultime che costituiscono la materia (prescindendo dagli elettroni, per la piccolezza della loro massa), si manifestano a distanze, che sono almeno 10^4 volte le dimensioni di tali particelle. È stato un complesso compito della fisica nucleare, stabilire quale sia il valore di tali forze attrattive, quando, per esempio fra i centri del protone e del neutrone interceda la distanza dell'ordine del loro diametro. La diversità di distanza alla quale agiscono la comune forza di Newton, e quella delle forze nucleari, ci autorizza a pensare che, nei due casi possa accadere qualcosa di diverso. È indubbio ritenere, che nel primo caso le linee di forza che collegano due elementi isolati, siano esattamente rettilinee. Un fascetto di linee di forze che parte da un neutrone e va ad un lontano protone, non può essere costituito che da raggi di forza paralleli. Nel caso nucleare, invece, le dette linee di forza che legano due particelle in contatto o quasi, sono necessariamente divergenti, o convergenti. Di fronte alla necessità di dover spiegare il difetto

di massa, che in tali condizioni si manifesta, ritengo opportuno formulare le seguenti ipotesi:

La massa di particelle materiali (i nucleoni), estremamente vicine si affievolisce, alquanto, rispetto a quella che esse hanno a distanze maggiori. L'affievolimento complessivo, per nuclei composti di più di due nucleoni, non è proporzionale al numero di questi. Quello relativo (riportato cioè all'unità di massa) cresce sino a masse di circa 50 unità, per poi tornare a diminuire. Questa complessità si spiega, ammettendo che l'affievolimento si verifica di preferenza fra masse elementari molto vicine. Esso rappresenta una sorta di saturazione (peraltro molto lieve) delle qualità attrattive della materia, che apparisce così meno pesante. Si deve ritenere che tal fatto possa esser connesso con un proporzionale affievolimento della inerzia, volendo conservare un noto principio meccanico.

Tali nuove ipotesi corrispondono ad una modificazione delle cause, per noi del tutto ignote, della forza materiale di attrazione. Simile modificazione si manifesterebbe alle piccole distanze. Tuttavia, in assenza dell'ipotesi eterea, si può pensare che la forza di attrazione possa dipendere dalla emissione continua, da parte della materia, di una sorta di fluido gravifico, attrattivo, o di particelle (assai più minute di quelle nucleari, già note), che vogliamo chiamare gravitoni. L'emissione di tali gravitoni non si esaurirebbe, nei tempi occorrenti alle nostre osservazioni, intese anche quali previsione del lontano avvenire o comprensione del passato. Le traiettorie od il numero di tali gravitoni resterebbero, in qualche modo cambiati, dalla presenza immediata di masse materiali, come avviene nell'interno dei nuclei atomici.

A tutto ciò, verrebbe a corrispondere una modificazione della legge di Newton, che conserva la sua caratteristica di semplicità geometrica, alle grandi distanze, per le quali non intervengono né deformazioni delle linee di forza, né variazioni nel numero di gravitoni emessi. A tali grandi distanze (e per vero solo di ordine superiore a 10^{-12} o 10^{-11} cm.), il secondo termine della nuova funzione $f(r)$, è del tutto trascurabile. Va però ricordato che la funzione $f(r)$, espressa dalla (5), si riferisce al caso di due nucleoni. Se in natura esistessero particelle elementari più piccole, fra le quali si potessero studiare le forze attrattive, nel caso del loro contatto, i valori di n, a potrebbero essere diversi.

Per chiudere questa esposizione, dirò che mi sembra evidente l'attendibilità di quanto ho esposto nelle precedenti Note ed in questa. Penso che i relativisti dovrebbero prendere in considerazione il mio punto di vista, decisamente contrario alla relatività di Einstein. Se il loro silenzio dovesse continuare, mentre io da anni manifesto il mio pensiero, ciò dovrebbe interpretarsi con l'impossibilità di dimostrare l'inesattezza dell'insieme delle mie considerazioni. Invece, la serena discussione, potrebbe chiarificare una questione, che tanta importanza avrebbe per il progresso della scienza.

Biologia. — *Fenomeni sessuali nei Metazoi ed in un Protozoo («Cryptochilum echini» Maupas).* (*Bisessualità nel gamete femminile del Ciliato e nell'ovo dei Metazoi. Funzione originaria di attivatore del gamete maschile del Ciliato e dello spermio in alcuni Metazoi*). Nota (*) del Socio ACHILLE RUSSO.

PRELIMINARE. — Non ostante fin'oggi si sconosca il significato biologico di alcuni fenomeni sessuali, il problema fondamentale della determinazione dell'uno e dell'altro sesso, fu riferito dai cultori della *Genetica* ad un processo ereditario, soprattutto perchè i due sessi, conforme alla *legge dei reincroci*, sono nel rapporto del 50 %, essendo uno di essi *omozigote*, l'altro *eterozigote*.

Tali risultati, interessanti in *Genetica* per altri fenomeni ereditari, non furono ritenuti applicabili al problema della originaria determinazione del sesso, considerando che non tutte le coppie hanno i caratteri digametici suddetti e che il rapporto numerico, che non dovrebbe essere in alcun modo alterato secondo le leggi fondamentali di tale *scienza*, è stato artificialmente modificato in specie diverse (da R. Hertig *nelle rane* e da altri anche nei *Mammiferi*).

A tali fatti, contrari alla teoria *ereditaria mendeliana*, ne furono aggiunti altri a sostegno della teoria *metabolica*; ma, ciò che è veramente singolare si è che alcuni di essi furono invocati a sostegno dell'una e dell'altra teoria, contendendosi quasi un campo comune.

Un esempio della differente interpretazione di tali fatti è dato dalla diversa quantità di sostanza nucleare osservata nelle due cellule sessuali di alcuni *Metazoi* e quella dei gameti maschile e femminile del *Ciliato*, di cui fu studiato, per la prima volta, il ciclo vitale (1). È da rilevare, difatti, che la diversità, mentre nei primi fu riferita, come si è detto, a *digametia*, connessa alla trasmissione di caratteri ereditari relativi agl'*incroci*, ai quali arbitrariamente si vollero associare quelli sessuali originari, nel secondo tale diversità è chiaramente e solo connessa al diverso metabolismo dei gameti e degli individui adulti, dai quali essi derivano.

QUANTITÀ DI SOSTANZA NUCLEARE NEI GAMETI DEL CILIATO IN RAPPORTO AL METABOLISMO. — La diversità delle due cellule sessuali in alcuni *Metazoi*, dovuta a numero, a grandezza o presenza-assenza dei cromosomi sessuali, ha un significato diverso da quello ad essi assegnato dai mendelisti nella differenziazione iniziale del sesso. Tale diversità, oltre alla *digametia*, necessaria

(*) Pervenuta all'Accademia il 7 luglio 1952.

(1) A. RUSSO, *Sul ciclo di sviluppo di «Cryptochilum echini» Mps.* (Nota preliminare). «Atti Acc. Gioenia», Catania, 1914); *Ciclo evolutivo di «Cryptochilum echini» Mps. (Ciliato parassita di «Paracentrurus lividus» Mrs.)*. «Memorie R. Acc. Lincei», 1930.

negli incroci per intendere i caratteri trasmessi dai due sessi nelle successive generazioni filiali, è anche manifestazione di diverso potere metabolico legato al sesso, analogo a quello dei due gameti del *Ciliato*, nei quali la diversità è chiaramente legata a differente attività cellulare. Difatti, il gamete femminile (♀), che ha maggiore quantità di sostanza nucleare nel suo nucleo sessuale (*micronucleo*), compie due *mitosi* successive e produce 4 nuclei nella stessa unità di tempo, in cui il nucleo del gamete maschile (♂), che ne ha di meno (la metà), nel corso della stessa coniugazione, come si vede nella figura 1^a, 2-3, si divide una sola volta, producendo due nuclei con processo divisorio diverso, *atipico*, che è proprio degl'individui con potere metabolico attenuato ⁽²⁾.

FUNZIONE DIVERSA DEI 4 NUCLEI PRODOTTI DAL GAMETE FEMMINILE E DEI 2 PRODOTTI DAL GAMETE MASCHILE. — I nuclei, derivati dai due gameti del *Ciliato*, durante la loro coniugazione, assumono particolari funzioni, delle quali alcune potrebbero identificarsi con fenomeni finora oscuri in animali superiori (*Metazoi*).

Dei 4 nuclei, formatisi nel gamete femminile, che, come si vede nel n. 3 della figura 1^a, formano spesso due coppie parallele, mentre due di essi, posti al polo inferiore, ricostituiscono parte dell'apparato nucleare del nuovo individuo adulto, gli altri due, posti al polo anteriore, hanno destinazione e funzione diversa.

Uno di essi, quello della coppia nucleare al lato dorsale, come si vede nella fig. 1^a, n. 4, è riassorbito dal protoplasma insieme al *macronucleo*; quello della coppia del lato ventrale emigra nel gamete maschile per formare in esso il nucleo sessuale del nuovo individuo di tale sesso. Il primo si dissolve per arricchire di sostanze plastiche il protoplasma del gamete femminile, mostrando, nella sua elementare manifestazione, un'analogia con i *polociti*, che si producono nelle ova mature dei *Metazoi*; il secondo migrato nel gamete maschile, oltre a costituire il nucleo sessuale del nuovo gamete di tale sesso, ha un più vasto valore biologico, perchè dimostra che il gamete femminile *contenga le due sessualità* ⁽³⁾.

I due nuclei, formatisi nel gamete maschile (fig. 1^a, nn. 3-4), hanno funzione diversa da quelli formatisi nel gamete femminile, in quanto, essendo anch'essi disposti lungo l'asse maggiore del *Ciliato*, quello al polo inferiore si divide, formando *due macronuclei*, che faranno parte dell'apparato nucleare dell'individuo adulto maschile (fig. 1^a, nn. 5-6-7); quello al polo superiore emigra invece nel gamete femminile (fig. 1^a, n. 4, dentro il quale si divide

(2) A. RUSSO, *Su l'attenuazione del potere sessuale dei gameti impuri che compiono la 2^a coniugazione accessoria in «Cryptochilum echini» Mps.* «Rend. R. Accad. Naz. dei Lincei», Roma, vol. VI, 1927; ID., *Ciclo evolutivo di «Cryptochilum echini» Mps.* «Atti Acc. Lincei», 1930, Parte II, p. 46.

(3) L'osservazione, che dà fondamento a tale deduzione, fu fatta nel 1914 e fu illustrata con le microfotografie dei preparati microscopici 4-5-6 nella Tavola VII della Memoria del 1930, senza che ad essa fosse dato alcun significato biologico per anni non pochi.

per formare due altri *macronuclei*, che completano l'apparato nucleare dell'adulto, che deriva da tale gamete (fig. 1, nn. 10-11-12).

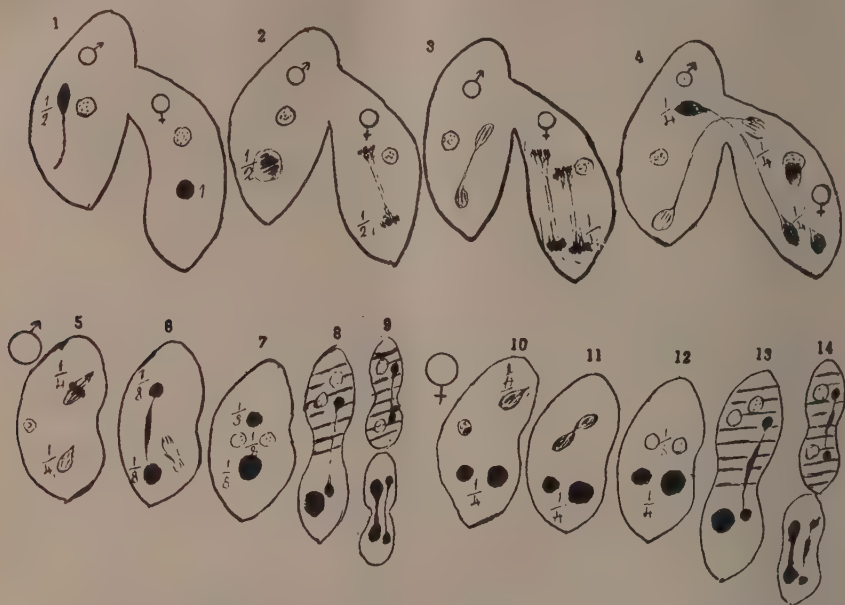


Fig. 1. - Ciclo germinale di *Cryptochilum echini* Mps. Le figure schematizzate corrispondono alle microfotografie degli stadi del ciclo, riprodotte dai preparati microscopici nella Tavola VII della Memoria pubblicata negli Atti dei Lincei nel 1930.

1° Coniugazione del gamete maschile con nucleo sessuale (*miconucleo*) a forma di virgola, e del gamete femminile che lo ha a forma di globulo.

2° Il *miconucleo* del gamete femminile compie la 1ª *mitosi*, quello maschile si prepara a dividersi con *processo atipico*.

3° Il gamete femminile compie due *mitosi* e forma 4 nuclei, quello maschile, nella stessa unità di tempo, forma due nuclei.

4° Dei quattro nuclei formati nel gamete femminile i due posteriori faranno parte dell'apparato nucleare dell'individuo adulto (n. 12), dei due anteriori uno è riassorbito dal protoplasma, l'altro emigra nel gamete maschile, al quale fornisce il nucleo per la formazione del nuovo individuo di tale sesso (n. 7).

5° Ex coniugante del gamete maschile con il nucleo migrato dal gamete femminile in alto, il nucleo proprio in basso. Il primo si divide per *mitosi*, emettendo parte del suo contenuto, il secondo con *processo atipico* (n. 6).

7° Individuo adulto maschile con due *macronuclei* derivati dal proprio nucleo, rappresentati in bianco, mentre il *miconucleo* ed uno dei *macronuclei*, rappresentati in nero, derivano dal nucleo emigrato dal gamete femminile.

8° *Divisione differenziale* dell'individuo adulto maschile. La parte anteriore tratteggiata darà origine al *ciclo somatico*, la parte inferiore a quello *germinale*.

9° Formazione dei *gameti somatici* e *germinali*.

10° Ex coniugante del gamete femminile con il nucleo migrato dal gamete maschile in alto, i due nuclei propri in basso.

11° Il nucleo migrato in alto si divide e forma due *macronuclei*.

12° Individuo adulto femminile, nel cui apparato nucleare i due *macronuclei* in bianco sono derivati dal gamete maschile. Il *miconucleo* si è conservato $1/4$ mentre nell'individuo adulto maschile (n. 7) è la metà $1/8$.

13° e 14° *Divisione differenziale* e formazione dei *gameti somatici* (tratteggiati) e *germinali*.

COMPARAZIONI. - Quanto si è avanti cennato merita dei chiarimenti, che potrebbero dare nuova luce a problemi ancora insoluti.

Innanzitutto la diversa attività proliferativa dei nuclei sessuali dei due gameti nel *Ciliato*, dovuta alla quantità diversa della sostanza nucleare, fa

ritenere che anche nei *Metazoi* il corredo cromosomico delle due cellule sessuali comunque costituito abbia in origine relazione con il metabolismo particolare dei due sessi.

Tale accostamento ha fatto riconoscere alcune analogie con fenomeni osservati nell'ovocite dei *Metazoi*, analogie che non era stato possibile stabilire prima; come è riassunto nei seguenti paragrafi.

1. LE DUE MITOSI FINALI NEL GAMETE FEMMINILE DEL CILIATO E NELL'UOVO MATURO DEI METAZOI. — Un'identità potrebbe esistere tra le due *mitosi*, che compie il nucleo sessuale del gamete femminile del *Ciliato* nella fase finale della coniugazione e le due *mitosi* che compie l'ovocite nella fase di maturazione per formare le due *vescicole polari* (fig. 2^a). Tale identità sarebbe avvalorata dal fatto che, in entrambi i casi, i nuovi nuclei sono in tutto o in parte riassorbiti dal protoplasma delle due cellule sessuali femminili, come si è detto avanti.

2. BISESSUALITÀ NEL GAMETE FEMMINILE DEL CILIATO E NELL'UOVO DEI METAZOI. — L'origine del nucleo sessuale del gamete maschile nel *Ciliato*, dovuta alla divisione del nucleo del gamete femminile, non solo dà a questo gamete il valore della bisessualità, ma dà anche ragione a quanto teoricamente si era supposto, che l'*ovogonio* dei *Metazoi* dovesse contenere in potenza i due sessi ⁽⁴⁾.

L'origine del nucleo sessuale del gamete maschile in quello femminile e la bisessualità di questo, è il documento più valido, che dimostra la diversa sessualità assunta dall'*ovocite* della Coniglia giunto a maturità, che sarebbe manifesta nei due stadi finali, distinti da prodotti metabolici diversi (fig. 2^a, nn. 1-2-3-4). A conferma di tale distinzione dopo il coito furono raccolte nelle trombe uterine della Coniglia due tipi di ova, già fecondate, con i due pronuclei, nei quali la diversa struttura dell'ovoplasma richiama quella osservata nelle ova ovariche, nei due stadi finali sopra cennati (fig. 3^a).

La bisessualità del gamete femminile del *Ciliato* darebbe anche la spiegazione causale dei risultati sperimentali, ottenuti con vari mezzi, che avviano lo stesso uovo verso l'uno o l'altro sesso. Al riguardo interessanti studi sono fatti in Italia da U. D'ANCONA e dalla sua Scuola con ricerche sui *Pesci*, gli *Anfibi* e gli *Amnioti*, nei quali il sesso, indeterminato in origine, fu determinato a mezzo di particolari ormoni, quali il *testosterone* ed il *dipropionato di estradiolo*, che esplicano la loro azione sul *ricambio* proprio a ciascuno di essi ⁽⁵⁾.

(4) Se non fosse stato messo in dubbio (cfr. A. RUSSO, « Atti Accad. Gioenia », 1952) il processo di coniugazione descritto in origine (1887) da Maupas in *Paramecium caudatum*, cioè che i due gameti siano omologhi e che in ciascuno con la 3^a *mitosi* si differenzia un nucleo maschile (*migrante*) ed uno femminile (*stazionario*), anche tale processo dimostrerebbe che in ogni individuo coesisterebbero le due sessualità.

(5) U. D'ANCONA e E. VANNINI, *La determinazione e il differenziamento del sesso nei Vertebrati*. « La Ricerca scientifica », n. 5, 1949. In questo lavoro è riportato l'elenco delle pubblicazioni fatte da D'Ancona e dalla sua Scuola su la determinazione sessuale.

3. FUNZIONE DI ATTIVATORE DEL GAMETE MASCHILE NEL CILIATO E DELLO SPERMIO NEI RAGNI. - È singolare la funzione del gamete maschile del *Ciliato*, che si collega al problema del suo valore originario. La sua funzione è, difatti, legata al destino del suo nucleo sessuale, il quale si trasforma in *macronuclei*, che, essendo riassorbiti dal protoplasma, non lasciano traccia finora apprezzabile.

Indipendente dalla trasmissione di caratteri propri, esso ha nel *Ciliato* la funzione di attivatore necessario dei processi riproduttivi, senza della quale essi si arresterebbero.

Tale condizione è stata dimostrata in organismi superiori, quali i Ragni, che Br. Monterosso studia da molti anni con allevamenti razionali. Egli, difatti, ha osservato che le ova di alcuni di essi iniziano lo sviluppo per *partenogenesi*, ma che subito vanno a male ove non vi penetri uno spermatozoo, che ne attivi lo sviluppo e lo porti a compimento, indipendente dall'apporto dei cromosomi, che completano il corredo del 1° *nucleo embrionale* ⁽⁶⁾.

L'influenza che ha l'attività diversa degli spermii su l'ovulazione della Coniglia, attività modificata sperimentalmente, potrebbe avere anche relazione con la funzione originaria di attivatore, assunta dall'elemento maschile ⁽⁷⁾. Difatti, come è stato illustrato in una recente Memoria ⁽⁸⁾, avendo osservato un aumento della vitalità degli spermii nei conigli digiunanti, negli accoppiamenti con essi, fu rilevato lo scoppio dei *follicoli di Graaf* e la caduta nelle trombe uterine di un maggior numero di ova di fronte ai controlli. Tale condizione, artificialmente prodotta, come fu riferito in tale Memoria, ha dato il mezzo di osservare tutti gli stadi delle ova deposte in relazione al sesso dei nascituri.

4. INDIPENDENZA DEL GAMETE FEMMINILE DEL CILIATO E DELL'OVO DEI METAZOI. - Mentre il gamete maschile del *Ciliato* distrugge il suo nucleo sessuale, che si rinnova in ogni ciclo biologico fornitogli dal gamete femminile, questo dimostra una propria individualità ed indipendenza, che, senza esaurirsi, si trasmette da un ciclo a quello successivo. Tale prerogativa è dovuta al potere germinativo del suo nucleo sessuale (*micronucleo globuliforme*), il quale, con successive divisioni, non solo forma i nuclei degli individui del *ciclo principale*, ma anche di quelli del *ciclo accessorio somatico*, originatisi con la *divisione differenziale*. Entrambi conservano lo stesso *potere germina-*

(6) B. MONTEROSSO e C. RONISVALLE, *Partenogenesi in «Tetragnatha extensa»*, «Rend. Acc. Naz. Lincei», ser. VIII, vol. I, f. 10, 1946; ID., *Nuovi dati sulla partenogenesi naturale degli Araneidi*. Ibid., vol. II, 1947; ID., *Considerazioni sul tipo di partenogenesi riscontrata negli Araneidi*. Ibid., 1947; ID., *Partenogenesi in «Teutana triangulosa»*, «Boll. Acc. Gioenia», Catania, ser. IV, fasc. 2°, 1949.

(7) Cfr. A. RUSSO, *Influenza del riproduttore sulla proporzione numerica dei due sessi nella Coniglia*. «Arch. di Fisiologia», 1915.

(8) A. RUSSO, *Identità di fenomeni sessuali nei Metazoi ed in un Protozoo («Cryptochilum echini» Mps.)*, (fondata su ricerche del primo ventennio del secolo). «Atti Acc. Gioenia», 1952.



Fig. 2. - Stadi del ciclo vitale dell'ovo di coniglia dentro l'ovaia.

1° Ovogoni (metodo Benda, color. Ematossilina ferrica),

2° ovocite, nel follicolo di Graaf, che compie la 1ª mitosi per emettere la 1ª vescicola polare. Su la rete ovoplasmica sono sparsi globuli di lipoide.

3° Lo stesso ovocite che compie la 2ª mitosi per emettere la 2ª vescicola polare. Nell'ovoplasma sono cristalli di acido stearico derivati dalla disintegrazione dei globuli lipidoidi.

4° Ultima fase del ciclo dell'ovo - ovo degenerato e in cui i cristalli di acido stearico formano cumuli nei quali spesso si osservano goccioline di grasso neutro annerite dall'acido osmico.

5° Stadio della coniugazione di *Cryptochilum e.*, in cui il nucleo sessuale del gamete femminile compie la 1ª mitosi.

6° Stadio finale della coniugazione di *Cryptochilum e.*, in cui il nucleo sessuale del gamete femminile compie la 2ª mitosi.

7° Stadio terminale, in cui uno dei 4 nuclei è riassorbito dal protoplasma, come le vescicole polari, un altro emigra nel gamete maschile.

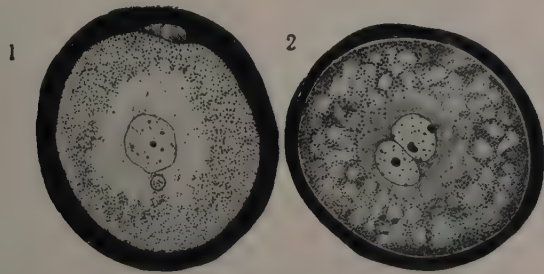


Fig. 3. - Due tipi di ova fecondate con i due pronuclei, raccolti 17 ore dopo il coito nelle trombe uterine della coniglia, con caratteri molto simili ai due stadi di ova mature dentro le ovaie, come nella fig. precedente n. 2 e 3.

tivo del nucleo dal quale derivano, sicchè essi costituiscono un *sistema unitario*, che assicura la perpetuazione della specie sia nell'uno sia nell'altro caso, come fu illustrato nei diagrammi inseriti nella Memoria pubblicata nel 1930 negli « Atti dei Lincei ».

5. In conseguenza di quanto sopra si è detto, si aggiunge che la bisessualità, osservata nel gamete femminile del *Ciliato*, riconosciuta nell'ovocite della Coniglia, fra l'altro, a mezzo dei prodotti metabolici, potrebbe estendersi a tutti i *Mammiferi pluripari*. In essi, difatti, in ciascuna portata, si ha promiscuità dei sessi nei neonati ed irregolarità del loro rapporto numerico, che conferma la condizione metabolica diversa delle ova al momento di essere fecondate, senza alcuna relazione con la proporzione fra i due sessi, voluta dal mendelismo. La diversità del metabolismo, osservato nei due stadi finali del ciclo vitale dell'ovo dentro l'ovaia della Coniglia (fig. 2^a), è conservata nei due tipi di ova fecondate, raccolte nelle trombe uterine 17 ore dopo il coito. Difatti, come si vede nella fig. 3^a, uno ha l'ovoplasma compatto ricco di globuli lipoproteici, l'altro lo ha vacuolizzato con cristalli di *acido stearico* sparsi, che attestano la loro derivazione dalla disintegrazione dei globuli. L'uno e l'altro tipo sarebbe indirizzato verso l'uno o l'altro sesso, conforme ai risultati sperimentali ⁽⁹⁾, ottenuti con l'aumento dei nati di sesso femminile, aumentando le ova con i globuli, a mezzo delle iniezioni di *Lecitina* (1904), con l'aumento di quelli maschili, facendo cadere nelle trombe un maggior numero di ova, come fu dimostrato nel 1915 ⁽¹⁰⁾ e cennato nel precedente paragrafo 3.

Simile riconoscimento potrebbe essere esteso ai *Mammiferi unipari*, i quali, invece di maturare, come nei *pluripari*, più ova all'*epoca dei calori* per deporle insieme nell'utero, ne maturano per lo più uno, che, nella donna, cade nelle trombe, circa ogni quattro settimane con un riposo di 14 giorni ed altrettanti mestruali.

A differenza della *teoria cromosomica ereditaria*, su la quale gravano molte incongruenze per essere ritenuta ancora valida, negli *unipari* la determinazione del sesso potrebbe essere anche in relazione con gli stadi, che l'unico ovo percorre, distinti da metabolismo diverso. Tali stadi, che si succederebbero durante il periodo mestruale, prima che l'ovo sia fecondato e s'impianti nella *decidua*, non ostante le molte incognite, potrebbero, teoricamente, essere rappresentati nel diagramma fondato su la bisessualità del gamete femminile nel *Ciliato* e sulla bisessualità potenziale delle ova dei *Metazoi*, che si manifesterebbe indirizzata in un primo tempo verso la femminilità (♀), verso la mascolinità (♂) in un secondo tempo.

(9) A. RUSSO, *Modificazioni sperimentali all'elemento epiteliale dell'ovaia dei Mammiferi*. « Atti R. Accad. Lincei », 1907.

(10) A. RUSSO, *Influenza del riproduttore sulla proporzione numerica dei due sessi nella Coniglia*. « Archivio di Fisiologia », 1915.

Periodi mestruali della donna.

Giorni	Premestruale 6-7 giorni	Mestruale 3-5 giorni	Postmestruale 4-6 giorni	Riposo 14 giorni
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				

RIASSUNTO. - Sono messi in rilievo fatti contrari alla *teoria ereditaria* del sesso e si riassumono ricerche, che convalidano la *teoria metabolica*, già seguita e documentata dall'autore con prova sperimentale circa mezzo secolo fa (« Atti Lincei », 1907), quando la nuova scienza, la *Genetica*, aveva avvocato a sè il problema sessuale. Oggi, dopo sì lungo tempo, a sostegno della teoria metabolica, tanto contrastata, si può aggiungere, come è detto in questo scritto, che, essendosi osservato nel gamete femminile di un *Protozoo* (Ciliato) la produzione anche del nucleo sessuale del gamete maschile, tale bisessualità, essendosi estesa all'ovocite dai *Metazoi*, non dà più credito alla coppia originaria (*primigenia*) con caratteri antagonisti (*allemorfi*), fondamento della teoria ereditaria mendeliana del sesso.

Oltre a tale constatazione, viene rilevato che il gamete maschile del Ciliato, trasformando il suo nucleo in *macronuclei*, che sono riassorbiti dal protoplasma, ha funzione prevalente di *attivatore*, confermata dagli studi su gli *Araneidi*, che da molti anni Br. Monterosso prosegue con allevamenti razionali e continui.

I due fenomeni, che sono fondamentali fra i problemi della sessualità, pure essendo stati trattati in una recente Memoria (« Atti Acc. Gioenia », Catania, 1952), si è creduto opportuno ripetere con maggiori dettagli in questa Nota.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Teoremi di esistenza e di unicità per il problema di Cauchy nella teoria delle equazioni lineari a derivate parziali*^(*). Nota II di CARLO PUCCI, presentata^(**) dal Socio M. PICONE.

2. Indichiamo con A la classe delle funzioni reali $u(x, t)$ definite in R ed ivi con derivate parziali rispetto a t fino all'ordine m continue in R rispetto alla variabile t , e con derivate parziali di qualsiasi ordine rispetto ad x che soddisfano in R le limitazioni

$$(II) \quad \left| \frac{\partial^s u(x, t)}{\partial x^s} \right| < \frac{M_u \Gamma\left(\frac{m}{n} s + 1\right)}{\rho_u^{\frac{m}{n} s}}, \quad s = 1, 2, \dots,$$

ove i numeri positivi M_u e ρ_u possono variare da funzione a funzione con la condizione $\rho_u > l \sqrt[m]{|a|}$. Indichiamo con $f(x, t)$ una funzione reale definita in R e con $u_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, m-1$, una funzione reale definita nello intervallo $[x', x'']$.

TEOREMA II. — *Esiste al più una funzione $u(x, t)$ appartenente alla classe A che sia soluzione in R del problema di Cauchy (1), (2).*

Supposto, per assurdo, che esistano due funzioni $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ appartenenti alla classe A e soluzioni in R del problema di Cauchy (1), (2), posto

$$(12) \quad v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t),$$

la funzione $v(x, t)$ è della classe A ed è in R

$$(I_0) \quad \frac{\partial^m v}{\partial t^m} - a \frac{\partial^n v}{\partial x^n} = 0,$$

$$(2_0) \quad v(x, 0) = 0, \quad \left[\frac{\partial^i v}{\partial t^i} \right]_{t=0} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m-1.$$

Dalla (I₀) segue

$$\int_0^t \frac{(t-\tau)^{m-1}}{(m-1)!} \frac{\partial^m v(x, \tau)}{\partial \tau^m} d\tau = a \int_0^t \frac{(t-\tau)^{m-1}}{(m-1)!} \frac{\partial^n v(x, \tau)}{\partial x^n} d\tau$$

e, integrando per parti il primo membro, per le (2₀) si ottiene

$$(13) \quad v(x, t) = a \int_0^t \frac{(t-\tau)^{m-1}}{(m-1)!} \frac{\partial^n v(x, \tau)}{\partial x^n} d\tau.$$

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta del 14 giugno 1952.

Si ha anche

$$(14) \quad \frac{\partial^n v(x, \tau)}{\partial x^n} = a \int_0^\tau \frac{(\tau - \vartheta)^{m-1}}{(m-1)!} \frac{\partial^{2n} v(x, \vartheta)}{\partial x^{2n}} d\vartheta$$

e quindi, sostituendo la (14) nella (13),

$$v(x, t) = a^2 \int_0^t \frac{(t - \tau)^{2m-1}}{(2m-1)!} \frac{\partial^{2n} v(x, \tau)}{\partial x^{2n}} d\tau.$$

Così procedendo si ottiene per s comunque grande

$$v(x, t) = a^s \int_0^t \frac{(t - \tau)^{sm-1}}{(sm-1)!} \frac{\partial^{sn} v(x, \tau)}{\partial x^{sn}} d\tau.$$

Ne segue

$$|v(x, t)| \leq |a|^s \int_0^t \left| \frac{(t - \tau)^{sm-1}}{(sm-1)!} \right| \left| \frac{\partial^{sn} v(x, \tau)}{\partial x^{sn}} \right| d\tau$$

ed essendo $v(x, t)$ della classe A per la (11) è anche

$$|v(x, t)| < |a|^s \frac{M_v \Gamma(ms+1)}{\rho_v^{ms}} \frac{|t|^{ms}}{(ms)!} = \frac{|a|^s |t|^{ms}}{\rho_v^{ms}}.$$

Ma $\rho_v > l \sqrt[m]{|a|} \geq |t| \sqrt[m]{|a|}$ e quindi per l'arbitrarietà di s la funzione $v(x, t)$ è nulla in R. Per la (12) ciò comporta l'identità in R delle soluzioni $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$.

3. Indichiamo con S la striscia del piano (x, t) definita dalle limitazioni $x' \leq x \leq x''$. Indichiamo con A_r la classe delle funzioni definite in S che:

a) sono dotate in S di derivate parziali rispetto a t fino all'ordine m continue rispetto alla variabile t ;

b) sono dotate in S di derivate parziali di qualsiasi ordine rispetto ad x ;

c) comunque fissato un numero positivo l le derivate parziali di $u(x, t)$ rispetto ad x soddisfano per $|t| < l$ e $x' \leq x \leq x''$ a una limitazione del tipo

$$\left| \frac{\partial^s u(x, t)}{\partial x^s} \right| < \frac{K_l \Gamma\left(\frac{m}{n}s + 1\right)}{\tau_l^{\frac{m}{n}s}}, \quad s = 1, 2, \dots,$$

ove K_l, τ_l sono numeri positivi dipendenti dalla scelta di l e dalla funzione $u(x, t)$ considerata con la condizione che $\tau_l > l \sqrt[m]{|a|}$.

Sia $f(x, t)$ una funzione reale definita nella striscia S e $u_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, m-1$, una funzione reale definita nell'intervallo $[x', x'']$.

TEOREMA III. — Se $f(x, t)$ è continua in S rispetto alla variabile t e se le funzioni $f(x, t)$, $u_i(x)$ nel loro dominio di definizione hanno derivate di qualsiasi ordine rispetto ad x che per ogni numero positivo l soddisfano per $|t| < l$ e $x' \leq x \leq x''$ alla limitazione

$$(15) \quad \left| \frac{\partial^h f(x, t)}{\partial x^h} \right|, \left| \frac{\partial^h u_i(x)}{\partial x^h} \right| < \frac{M_l \Gamma\left(\frac{m}{n} h + 1\right)}{\rho_l^{\frac{m}{n} h}}, \quad h = 1, 2, \dots,$$

ove M_l, ρ_l sono numeri positivi dipendenti da l e con $\rho_l > l \sqrt[n]{a}$, allora esiste una e una sola funzione appartenente alla classe A_x che è soluzione in S dell'equazione differenziale (1) e soddisfa le condizioni iniziali (2). Tale soluzione è la somma della serie (4) che è assolutamente convergente in tutto S .

Fissato un numero positivo l indichiamo con S_l il rettangolo $[x' \leq x \leq x'', -l \leq t \leq l]$. In S_l sono verificate le ipotesi del teorema I e quindi la serie (4) converge assolutamente in S_l e la sua somma è la soluzione in S_l del problema di Cauchy (1), (2). Per l'arbitrarietà di l ne segue che la serie (4) converge assolutamente in tutto S e la sua somma è soluzione in S del problema di Cauchy (1), (2). Inoltre, sempre nel teorema I, è provato che la soluzione $u(x, t)$ ha in S_l derivate rispetto a t fino all'ordine m continue rispetto alla variabile t , ed ha in S_l derivate di qualsiasi ordine rispetto ad x che soddisfano in $S_{l/3}$ alla limitazione (5). Per l'arbitrarietà di l ne segue che la soluzione $u(x, t)$ è della classe A_x .

Essendo poi verificate in S_l anche le ipotesi del teorema II esiste una sola funzione della classe A_x che in S_l è soluzione del problema di Cauchy (1), (2). Per l'arbitrarietà di l ne segue l'unicità in tutta la striscia S .

4. Esaminiamo ora separatamente i casi $m > n$, $m = n$, $m < n$, confrontando i risultati conseguiti con quelli già noti e svolgendo alcune osservazioni critiche sulle ipotesi impiegate.

Caso $m > n$. — L'equazione differenziale (1) è di tipo parabolico.

Per $n = 2$, $m > 2$, $a > 0$, il problema è stato trattato da M. Picone⁽³⁾ che ha provato l'unicità della soluzione in tutta la striscia S relativamente alla classe delle funzioni che hanno derivate continue fino all'ordine m rispetto a t e fino al secondo ordine rispetto ad x .

Nel caso omogeneo, $f(x, t) \equiv 0$, e nel caso che m e n non abbiano divisori comuni, l'equazione differenziale (1) è stata studiata da H. Block⁽⁴⁾ che ha determinato l'espressione di una soluzione fondamentale.

Nel caso $m = 2$, $n = 1$ si ha la nota equazione del calore. Per tale equazione e con riferimento alle condizioni alla frontiera (2) E. Holmgren⁽⁵⁾

(3) Cfr. (1).

(4) H. BLOCK, *Sur les équations lineaires aux dérivées partielles à caractéristiques multiples*. « Arkiv för Mat. Astr. Fys. », VII, nn. 13 e 21 (1911).

(5) E. HOLMGREN, *Sur l'équation de la propagation de la chaleur*. « Arkiv för Mat. Astr. Fys. », IV, n. 14 (1908).

nell'ipotesi $f(x, t) \equiv 0$ ha dato un teorema di esistenza che, in tali ipotesi particolari, coincide col teorema I.

In un successivo lavoro E. Holmgren⁽⁶⁾ ha messo in luce come fossero aderenti alla natura del problema le ipotesi del suo teorema di esistenza prima citato e cioè le ipotesi che i dati alla frontiera $u_0(x)$, $u_1(x)$ abbiano derivate di qualsiasi ordine soddisfacenti alla limitazione (3) (con $m = 2$, $n = 1$).

Con considerazioni diverse da quelle svolte da Holmgren, basandoci sul teorema di unicità di M. Picone facciamo ora un esame critico delle ipotesi impiegate nei teoremi I e III.

Relativamente al dominio rettangolare $R \equiv [-1 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1]$ consideriamo il seguente problema di Cauchy:

$$(16) \quad \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

$$(17) \quad u(x, 0) = \frac{(3h)!}{(2h)!} |x| x^{2h-1}, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]_{t=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right]_{t=0} = 0 \quad (7),$$

ove h è un numero intero positivo e del resto arbitrario. Si verifica facilmente che, posto

$$P(x, t) = \sum_{i=0}^h \frac{(3h)!}{(2i)! [3(h-i)]!} t^{3(h-i)} x^{2i},$$

$P(x, t)$ è una soluzione nel quadrato $Q_1 \equiv [0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1]$ e $-P(x, t)$ è una soluzione nel quadrato $Q_2 \equiv [-1 \leq x \leq 0, 0 \leq t \leq 1]$. Per il teorema di unicità stabilito da M. Picone vi è una sola soluzione del problema (16), (17) nel quadrato Q_1 , e tale soluzione è quindi $P(x, t)$, e vi è una sola soluzione nel quadrato Q_2 , e tale soluzione è $-P(x, t)$. Se quindi esistesse una soluzione relativa a tutto il rettangolo R essa dovrebbe coincidere in Q_1 con $P(x, t)$ e in Q_2 con $-P(x, t)$. Ciò è assurdo perchè in tal caso la funzione $u(x, t)$ sarebbe discontinua sull'asse delle t essendo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x, t) = P(0, t) = t^{3h}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} u(x, t) = -P(0, t) = -t^{3h}.$$

Ne segue quindi che il problema di Cauchy (16), (17) non ha soluzione in R .

Notiamo che le ipotesi del teorema I non sono verificate soltanto per quanto riguarda la funzione $u_0(x)$ che possiede derivate solo fino all'ordine $h-1$ ove h è arbitrariamente grande. Ciò prova che le ipotesi del teorema I relative alla derivabilità di $u_0(x)$ non possono essere sostituite *sic et simpliciter* dalla ipotesi che $u_0(x)$ abbia derivate solo fino a un dato ordine. Anzi notiamo che tale riduzione non è possibile neanche aumentando le ipotesi di tipo differenziale su $u_1(x)$, $u_2(x)$ o su $f(x, t)$ perchè nell'esempio considerato $u_1(x) \equiv u_2(x) \equiv f(x, t) \equiv 0$.

(6) E. HOLMGREN, *Sur les solutions quasi analytiques de l'équation de la chaleur*. « Arkiv för Mat. Astr. Fys. », XVIII, n. 9 (1924).

(7) Questo esempio mi è stato indicato dal dottore Ennio De Giorgi.

Analoghe considerazioni possono esser svolte anche relativamente alle funzioni $u_1(x)$, $u_2(x)$, $f(x, t)$. Consideriamo infatti il seguente problema di Cauchy relativo sempre al rettangolo R

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{[3(h+1)]!}{(2h)!} x |x|^{2h-1},$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]_{t=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right]_{t=0} = 0.$$

Si verifica facilmente che, posto

$$N(x, t) = \sum_{i=0}^h \frac{[3(h+1)]!}{(2i)! [3(h-i+1)]!} t^{3(h-i+1)} x^{2i},$$

$N(x, t)$ è una soluzione nel quadrato Q_1 e $-N(x, t)$ è una soluzione nel quadrato Q_2 e che quindi non esiste una soluzione in R del problema di Cauchy considerato. In tal caso le ipotesi del teorema I non sono verificate solo per quanto riguarda $f(x, t)$ che ha in tutto R derivate parziali rispetto ad x solo fino all'ordine $h-1$.

Esempi analoghi possono essere costruiti anche per $m > 3$.

Caso $m = n$. — Le limitazioni (3), (12) per le derivate di $f(x, t)$, $u_i(x)$ rispetto ad x equivalgono all'ipotesi dell'analiticità di tali funzioni rispetto ad x .

Nel caso ellittico, $m = 2$, $a < 0$, il problema è stato studiato nel campo analitico. L'esistenza della soluzione è assicurata dal teorema di Cauchy-Kowalevsky in un intorno del segmento portante i dati ⁽⁸⁾.

Nel caso iperbolico, $m = 2$, $a > 0$, vi sono vari teoremi di esistenza nel campo reale con ipotesi molto meno restrittive di quelle dei teoremi I, III ⁽⁹⁾.

I teoremi classici di unicità nel campo reale per il caso iperbolico sono sempre relativi a domini limitati dalle linee caratteristiche e dalla linea portante i dati diversamente dai teoremi II, III in cui l'unicità è provata in un rettangolo o in una striscia, però sotto ipotesi molto più restrittive, richiedendosi l'analiticità rispetto ad x .

Caso $m < n$. — Tale problema fu studiato da S. Kowalevsky ⁽¹⁰⁾. Ella osservò che l'analiticità dei dati non è sufficiente per assicurare l'esistenza della soluzione nel campo analitico; osservò anzi che occorre che i dati siano funzioni intere, pur non essendo tale condizione sufficiente. In concordanza

(8) Si può determinare un dominio ove la soluzione sicuramente esiste determinando il raggio di convergenza di una funzione maggiorante. J. HADAMARD osserva che tale procedimento *conduit généralement... à des limites qui sont trop petites au point d'être inutilisables en pratique. (Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles, Paris 1932, pp. 19-20).*

(9) Naturalmente però i teoremi I, III, richiedendo ipotesi maggiori, stabiliscono l'esistenza di soluzioni che, di conseguenza, godono di proprietà differenziali più numerose.

(10) Cfr. E. PICARD, *Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles*, Paris, pp. 2-8 (1927).

con tali risultati nei teoremi I, III, si fanno ipotesi su $f(x, t)$, $u_i(x)$ dalle quali segue che $f(x, t)$, $u_i(x)$ sono funzioni intere in x e le disuguaglianze (3), (15) precisano anche a quale classe di funzioni intere in x $f(x, t)$, $u_i(x)$ devono appartenere perchè esista la soluzione.

Notiamo infine che i teoremi II, III stabiliscono l'unicità della soluzione, relativamente a una particolare classe di funzioni, per un problema di Cauchy ove i dati alla frontiera sono in numero inferiore all'ordine della equazione differenziale.

Meccanica. — *Trasformazioni nello spazio-tempo pseudoeuclideo che lasciano la metrica in forma statica.* Nota ^(*) di EMILIO CLAUSER, presentata dal Corrisp. B. FINZI.

È notissimo che il problema fondamentale della teoria della relatività ristretta consiste nella determinazione delle leggi di trasformazione delle coordinate dello spazio-tempo pseudoeuclideo fra due osservatori assoluti in moto traslatorio rettilineo ed uniforme l'uno rispetto all'altro ⁽¹⁾.

Alcuni autori, occupandosi dello stesso problema, hanno considerato un osservatore che si muove di moto rettilineo accelerato rispetto ad un osservatore assoluto, dando varie definizioni di tale moto ⁽²⁾.

Si presenta quindi spontaneamente il problema, oggetto di questa Nota, di determinare le leggi di trasformazione delle coordinate dello spazio-tempo pseudoeuclideo fra un osservatore assoluto O ed un osservatore O' per il quale sia statica la metrica dello spazio-tempo. Il problema considerato è quindi una generalizzazione dei problemi citati le cui soluzioni si ritrovano come casi particolari ⁽³⁾.

(*) Pervenuta all'Accademia il 21 agosto 1952.

(1) Vedere ad esempio, FINZI-PASTORI, *Calcolo tensoriale e applicazioni*, Bologna, cap. X (1949).

(2) Fra questi, E. L. HILL, *On accelerated coordinate systems in Classical and Relativistic Mechanics*, « Physical Review », 67, p. 358 (1945), cerca le trasformazioni fra un osservatore assoluto O ed un osservatore non assoluto O' che conservano il modulo della quadriaccelerazione di un osservatore rispetto all'altro; C. MØLLER, *On Homogeneous Gravitational Fields in the General Theory of Relativity and the Clock Paradox*, « Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab, Matematisk-Fysiske Meddelelser », Bind XX, n. 19, Copenhagen (1943), considera i due casi seguenti: *a*) moto traslatorio rettilineo uniformemente accelerato dell'osservatore O' rispetto all'osservatore O , conseguenza dell'ipotesi che la metrica di O' sia statica; *b*) moto traslatorio rettilineo non uniformemente accelerato, conseguenza dell'ipotesi che la metrica di O' non sia stazionaria. Egli determina le trasformazioni nello spirito della relatività generale, facendo uso delle equazioni gravitazionali e della legge della geodetica cronotopica (1).

(3) Per l'imposta condizione di staticità, sono esclusi quegli osservatori O' rispetto ai quali la propagazione luminosa è soltanto stazionaria e quindi dipende dalla direzione del raggio di propagazione; ad esempio osservatori O' in moto rotatorio uniforme rispetto ad osservatori O . (Vedere B. FINZI-M. PASTORI, loc. cit. (1) ed ancora T. LEVI-CIVITA, *Fondamenti di Meccanica Relativistica*, Bologna (1928), cap. I, par. 12 e 17).

1. IMPOSTAZIONE DEL PROBLEMA. — La metrica dello spazio-tempo pseudoeuclideo è individuata per l'osservatore O dalla seguente forma pseudopitagorica:

$$(1) \quad ds^2 = dx_0^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$$

se O si avvale di coordinate cartesiane ortogonali x_1, x_2, x_3 e se, detta c la velocità della luce nel vuoto rispetto ad O, $x_0 = ct$ è la coordinata temporale, misurata in unità rømeriane e fornita da un orologio normale ⁽¹⁾. La metrica di O', statica per ipotesi, è caratterizzata dalla seguente forma:

$$(2) \quad ds^2 = g_{\infty} dx_0'^2 - dl^2$$

ove

$$(3) \quad dl^2 = \sum_{i,k} a^{ik} dx_i' dx_k'$$

individua l'elemento lineare dello spazio geometrico i cui coefficienti, al pari di $c/\sqrt{g_{\infty}}$, velocità della luce rispetto ad O', possono dipendere soltanto dalle coordinate spaziali ⁽²⁾. Si tratta quindi di individuare le funzioni

$$(4) \quad x_v = x_v(x_0', x_1', x_2', x_3') \quad (v = 0, 1, 2, 3)$$

che permettono di passare dalla (1) alla (2).

2. PSEUDOEUCLEIDITÀ DELLO SPAZIO-TEMPO. — Si noti che lo spazio geometrico di O' è euclideo. Infatti, dette R_{ilhk} ed R'_{ilhk} le componenti del tensore di Riemann dello spazio geometrico (3) e dello spazio-tempo (2), si ha: $R_{ilhk} = -R'_{ilhk} = 0$ ($i, l, h, k = 1, 2, 3$) essendo statica la metrica (2) e pseudoeuclideo lo spazio-tempo ⁽⁴⁾.

Si può quindi scegliere nella (3) un riferimento per cui la (2) diventa:

$$(5) \quad ds^2 = g_{\infty} dx_0'^2 - (dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2).$$

Eseguendo allora la trasformazione (4) la (1) si muta nella (5) quando e solo quando le (4) soddisfano al sistema seguente:

$$(I) \quad \begin{cases} (6) & \left(\frac{\partial x_0}{\partial x_i'} \right)^2 - \sum_v \left(\frac{\partial x_v}{\partial x_i'} \right)^2 = g_{ii} & (i = 0, 1, 2, 3) \\ (7) & \frac{\partial x_0}{\partial x_i'} \frac{\partial x_0}{\partial x_j'} - \sum_v \frac{\partial x_v}{\partial x_i'} \frac{\partial x_v}{\partial x_j'} = 0 & (i, j = 0, 1, 2, 3) \quad (i \neq j) \end{cases}$$

ove per la (5) è $g_{ii} = -1$ ($i = 1, 2, 3$).

3. INTEGRAZIONE DEL SISTEMA. — Dal sistema (I) consegue il sistema:

$$\frac{\partial^2 x_v}{\partial x_i' \partial x_j'} = \sum_k \left\{ \begin{matrix} k \\ i \ j \end{matrix} \right\} \frac{\partial x_v}{\partial x_k'} \quad (v, i, j = 0, 1, 2, 3) \quad (5).$$

(4) Vedere B. FINZI-M. PASTORI, loc. cit. (1), cap. V, par. 5 e 6, e cap. X, par. 7.

(5) Vedere L. BIANCHI, *Lezioni di Geometria Differenziale*, Bologna (1927), vol. I, parte I, cap. II, par. 33.

Esplicitando i simboli di Christoffel di seconda specie

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ i \ j \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \sum_l^3 g^{lk} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x'_j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x'_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x'_l} \right) \quad (6)$$

che si riferiscono alla metrica (5), si ottiene:

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{ll} (8) & \frac{\partial^2 x_v}{\partial x'_i \partial x'_0} = \frac{1}{2 g_{00}} \frac{\partial g_{00}}{\partial x'_i} \frac{\partial x_v}{\partial x'_0} \quad (i = 1, 2, 3) \\ (9) & \frac{\partial^2 x_v}{\partial x'_i \partial x'_j} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \\ (10) & \frac{\partial^2 x_v}{\partial x'^2_0} = \frac{1}{2} \sum_k^3 \frac{\partial g_{00}}{\partial x'_k} \frac{\partial x_v}{\partial x'_k} \quad (v = 0, 1, 2, 3). \end{array} \right.$$

L'integrale generale delle equazioni (8) è:

$$(II) \quad x_v = \varepsilon \sqrt{g_{00}} \alpha_v(x'_0) + \beta_v(x'_1, x'_2, x'_3)$$

con α_v e β_v funzioni arbitrarie dei loro argomenti ed $\varepsilon = \pm 1$.

Se α_v non è costante, le (9) si spezzano quindi nelle seguenti equazioni:

$$(12) \quad \frac{\partial^2 \sqrt{g_{00}}}{\partial x'_i \partial x'_j} = 0 \quad , \quad (13) \quad \frac{\partial^2 \beta_v}{\partial x'_i \partial x'_j} = 0.$$

L'integrale generale delle (12) e (13) è costituito dalle seguenti funzioni lineari delle coordinate spaziali:

$$(14) \quad \sqrt{g_{00}} = \sum_i^3 \gamma_i x'_i + \gamma_4 \quad , \quad \beta_v = \sum_i^3 a_{vi} x'_i + H_v \quad (v = 0, 1, 2, 3) \quad (7).$$

La (11) vale manifestamente anche se g_{00} è una costante, e allora $\gamma_k = 0$ ($k = 1, 2, 3$); in questo caso la (10) dà poi: $\alpha_v = b_{v0} x'_0 + B_v$ con b_{v0} e con B_v costanti arbitrarie.

Nell'ipotesi opposta le γ_k ($k = 1, 2, 3$) non sono tutte nulle; risulta perciò

$$(15) \quad \gamma^2 = \sum_k^3 \gamma_k^2 \neq 0$$

e la (10) diventa:

$$\frac{d^2 x_v}{dx'^2_0} - \alpha_v \gamma^2 = \delta_v$$

ove è

$$\delta_v = \varepsilon \sum_k^3 a_{vk} \gamma_k.$$

Ne segue:

$$\alpha_v = \mathcal{A}_v C h \gamma x'_0 + \mathcal{B}_v S h \gamma x'_0 - \delta_v \gamma^{-2} \quad (v = 0, 1, 2, 3).$$

(6) Vedere B. FINZI-M. PASTORI, loc. cit. (1), cap. V, par. 3.

(7) Se α_v è costante dalle (9) si deduce che $\varepsilon \sqrt{g_{00}} \alpha_v + \beta_v$ è funzione lineare delle coordinate spaziali e vien quindi meno la biunivoca invertibilità delle due quaterne x e x' .

In definitiva, l'integrale che interessa del sistema (II) è il seguente:

$$(16) \quad x_v = \sum_0^3 a_{vi} x'_i + h_v \quad \text{se } g_{00} = \text{cost.}$$

oppure, se g_{00} non è costante:

$$(17) \quad x_v = \sqrt{g_{00}} (A_v C h \gamma x'_0 + B_v S h \gamma x'_0) + \sum_i^3 b_{vi} x'_i + h_v.$$

Sostituendo le (16) nel sistema (I) si ottengono dieci relazioni fra le costanti che identificano la (5) con la (1). Le (16) costituiscono quindi la trasformazione generale di Lorentz ⁽⁸⁾.

Sostituendo le (17) nel sistema (I) si ha innanzitutto, per la prima delle (6):

$$(IV) \quad \begin{cases} A_0^2 - \sum_v A_v^2 = -\gamma^{-2} \\ B_0^2 - \sum_v B_v^2 = \gamma^{-2} \\ A_0 B_0 - \sum_v A_v B_v = 0. \end{cases}$$

Le altre equazioni (6) e le (7) forniscono i sistemi seguenti:

$$(V) \quad \begin{cases} A_0 b_{0i} - \sum_v A_v b_{vi} = 0 \\ B_0 b_{0i} - \sum_v B_v b_{vi} = 0 \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$(VI) \quad b_{0i} b_{0j} - \sum_v b_{vi} b_{vj} = A_{ij} \quad \text{con } A_{ij} \begin{cases} \gamma_i \gamma_j \gamma^{-2} & \text{per } i \neq j \\ \gamma_i^2 \gamma^{-2} - 1 & \text{per } i = j \end{cases}$$

$$(i, j = 1, 2, 3).$$

4. MOTO PIANO. — La risoluzione dei sistemi (V) e (VI) è particolarmente semplice nel caso di moto piano caratterizzato dalla condizione $x'_3 = x_3$ per la quale si ha:

$$A_3 = B_3 = b_{3i} = h_3 = \gamma_3 = 0 \quad (i = 1, 2), \quad b_{33} = 1.$$

Risolviendo il sistema (V), che ha caratteristica due ⁽⁹⁾, rispetto alle b_{vi} , e sostituendo nel sistema (VI), si ottiene in ogni caso, comunque sia stato scelto il determinante fondamentale:

$$(VII) \quad \begin{cases} x_0 = \sqrt{g_{00}} (A_0 C h \gamma x'_0 + B_0 S h \gamma x'_0) + \varepsilon_1 \gamma (\gamma_2 x'_1 - \gamma_1 x'_2) (A_1 B_2 - A_2 B_1) + h_0 \\ x_1 = \sqrt{g_{00}} (A_1 C h \gamma x'_0 + B_1 S h \gamma x'_0) + \varepsilon_1 \gamma (\gamma_2 x'_1 - \gamma_1 x'_2) (A_0 B_2 - A_2 B_0) + h_1 \\ x_2 = \sqrt{g_{00}} (A_2 C h \gamma x'_0 + B_2 S h \gamma x'_0) + \varepsilon_1 \gamma (\gamma_2 x'_1 - \gamma_1 x'_2) (A_1 B_0 - A_0 B_1) + h_2 \end{cases}$$

(8) Vedere B. FINZI-M. PASTORI, loc. cit. (1), cap. IX e cap. X, e R. BECKER, *Théorie des électrons*, Paris (1938), cap. F.

(9) Infatti dal sistema IV consegue:

$$(18) \quad (A_0 B_2 - A_2 B_0)^2 + (A_1 B_0 - A_0 B_1)^2 - (A_1 B_2 - A_2 B_1)^2 = \gamma^{-4} = 0 \quad \text{per la (15).}$$

ove $\epsilon_i = \pm 1$. Ne segue che l'origine spaziale Ω del riferimento non inerziale non può stare in quiete poichè, per il sistema (IV), non può essere

$$A_i = B_i = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (10).$$

Se $(A_1 B_2 - A_2 B_1) = 0$ dalle equazioni del sistema (VII) consegue che la traiettoria di Ω è la retta di equazione:

$$(A_0 B_2 - A_2 B_0) \xi = (A_0 B_1 - A_1 B_0) \eta$$

dove è $\xi = x_1 - h_1$, $\eta = x_2 - h_2$.

Si può riottenere il caso a) del Møller ⁽²⁾ assumendo:

$$A_0 = A_2 = B_1 = B_2 = \gamma_2 = 0 \quad \text{ed} \quad A_1 B_0 \neq 0 \quad \text{per la (18)}.$$

Se invece è

$$(20) \quad (A_1 B_2 - A_2 B_1) \neq 0$$

la traiettoria di Ω è l'iperbole reale (non degenerare per la (19) e per la (20)) di equazione:

$$\xi^2 (B_2^2 - A_2^2) + \eta^2 (B_1^2 - A_1^2) + 2 \xi \eta (A_1 B_2 - A_2 B_1) = \gamma_4^2 (A_1 B_2 - A_2 B_1)^2.$$

Le dodici costanti che intervengono nel sistema (VII) si possono calcolare tenendo conto del sistema (IV), assegnando posizione e velocità iniziali di Ω , angoli e velocità angolari iniziali degli assi x'_1 ed x'_2 rispetto all'osservatore O e fissando infine l'origine della coordinata temporale x'_0 rispetto ad x_0 . Com'era prevedibile, l'angolo formato dagli assi x'_1 ed x'_2 , valutato in Ω , appare all'osservatore O genericamente variabile col tempo x_0 . Infine la velocità di Ω è sempre inferiore alla velocità c della luce.

Astronomia. — *Sulla variazione del profilo di alcune righe spettrali dal centro al lembo del Sole.* Nota II ^(*) di MASSIMO CIMINO, presentata dal Socio G. ARMELLINI.

Si fa seguito ad una Nota dallo stesso titolo apparsa in questi « Rendiconti » ⁽¹⁾.

3. CARATTERISTICHE DELLE LASTRE. — Darò ora le caratteristiche essenziali delle lastre che ho utilizzato per il tracciamento dei profili delle righe spettrali.

a) *Lastre per i profili delle righe spettrali.* — In tutto sono 16 lastre elencate nella Tabella I. Ciascuna di esse contiene 8 spettrogrammi, nume-

(10) Si può sempre scegliere Ω in guisa che non appartenga alla retta, luogo di punti singolari per la propagazione luminosa, di equazione $V_{g\infty} = 0$ con che per la (14) risulta:

(19) $\gamma_4 \neq 0$.

(*) Pervenuta all'Accademia il 14 agosto 1952.

(1) Serie VIII, vol. IX, fasc. 3-4, pp. 177-181.

rati da 1 ad 8, procedenti dal lembo al centro del Sole lungo un raggio polare, come è stato spiegato al n. 2 (Nota I). I quattro tempi di posa indicati per ciascuna lastra si riferiscono rispettivamente agli spettri 1-2-3 (verso il lembo); 4; 5-6; 7-8 (l'ultimo è del centro). Le ore sono date in *Tempo Medio del Pacifico* (T.M.P.; California), ed occorre perciò aggiungere 8 ore per avere il Tempo Universale (Greenwich).

b) *Lastre per la calibrazione.* — Queste lastre, — in numero di 18 con due calibrazioni per ogni lastra —, portano gli stessi numeri di quelle utilizzate per i profili, e sono state sviluppate assieme ad esse nella stessa bacinella. In generale (come è stato spiegato al n. 2) è stata fatta una *calibrazione per ogni tempo di posa impiegato*.

Delle rimanenti lastre, — delle quali 17 per il controllo della calibrazione e 50 circa utilizzate solo parzialmente —, credo inutile dare qui le caratteristiche dettagliate.

4. CARATTERISTICHE DEL MICROFOTOMETRO REGISTRATORE. — Per il tracciamento dei profili delle righe spettrali ho utilizzato il microfotometro registratore « Zeiss » a cella fotoelettrica ed elettrometro di Wulff ad una sola fibra, con trasmissione a leva, del Gabinetto di Fisica dell'Istituto Superiore di Sanità in Roma.

Le registrazioni possono effettuarsi sia su pellicole, che su lastre del formato 9×18 (io ho adoperato sempre lastre, tipo « Fine-orto-antialo Ferrania », con ingrandimento della trasmissione fino a 100 volte, ma che, in realtà, può spingersi ad un valore considerevolmente maggiore. L'apparecchio è dotato di diverse coppie di obbiettivi (uno per il condensatore, l'altro per il microscopio), che consentono differenti ingrandimenti dell'immagine della riga sulla fotocella. Delle due fenditure, — una anteriore alla lastra, l'altra posteriore —, la prima è regolabile in altezza e larghezza, la seconda soltanto in larghezza. Quest'ultima è la fenditura di precisione, che delimita esattamente la zona di trasmissione dello spettrogramma, mentre la prima si mantiene di pochissimo maggiore, in modo da ridurre al minimo la diffusione della luce nella gelatina ⁽²⁾.

L'escursione del punto luminoso (immagine di un piccolo tratto del filo illuminato dell'elettrometro) sulla lastra di registrazione è di circa 8 cm.; si può renderla però artificialmente maggiore aumentando l'illuminazione della fotocella e introducendo (o togliendo), al momento opportuno durante la registrazione, alcuni filtri di trasmissione esattamente conosciuta (per esempio del 10 %). Invece la *sensibilità*, — che è il rapporto dy/dT della deviazione dy alla variazione dT del flusso luminoso —, può essere variata entro larghi limiti agendo sulla distanza del filo dell'elettrometro dalle placche. Un reostato sul motore regola infine la velocità della registrazione.

(2) È questo un inconveniente dei microfotometri a fenditura posteriore, e che è stato eliminato nei microfotometri del tipo « Moll », i quali adoperano solo la fenditura anteriore (che è allora quella di precisione).

TABELLA I.

Caratteristiche delle lastre per i profili delle righe spettrali.

N. della lastra	Data	Ora	Zona spettrale	Tempi di posa	Ordine del reticolo	Filtro	Tipo (Eastman)	Cielo	Definizione dell'immagine solare	Lembo	Note
	1950	T. M. P.	A	secondi							
26 _a + 26 _b	15-II	7.30- 8.30	8500	220 ; 180 ; 120 ; 100	I	W 87	N-IV	sereno	ottima	calmo	
30 _a + 30 _b	16-II	7.10- 7.55	8500	180 ; 145 ; 105 ; 80	I	W 87	N-IV	sereno	buona	assai calmo	(1)
34 _a + 34 _b	17-II	7.05- 7.40	8500	140 ; 110 ; 80 ; 60	I	W 87	N-IV	limpido	ottima	assai calmo	(2)
38 _a + 38 _b	18-II	7.15- 7.45	8500	140 ; 110 ; 80 ; 60	I	W 87	N-IV	assai limpido	ottima	calmo	
32 _a	16-II	9.10- 9.30	5890	90 ; 70 ; 50 ; 40	II	—	F-IV	assai limpido	buona	calmo	(1)
36 _a	17-II	9.40-10.00	5890	90 ; 70 ; 50 ; 40	II	—	F-IV	assai limpido	mediocre	calmo	(2) (3)
40 _a	18-II	8.40- 9.05	5890	140 ; 110 ; 80 ; 60	II	—	F-IV	assai limpido	buona	calmo	
33 _a	16-II	9.45-10.30	5170	280 ; 220 ; 160 ; 120	II	—	F-IV	assai limpido	discreta	poco agitato	(1)
35 _a	17-II	8.40- 9.25	5170	280 ; 220 ; 160 ; 120	II	—	F-IV	assai limpido	mediocre	calmo	(2)
41 _a	18-II	9.20-10.20	5170	420 ; 420 ; 230 ; 180	II	—	F-IV	assai limpido	buona	calmo	
31 _a	16-II	8.10- 8.35	4227	35 ; 25 ; 20 ; 15	II	—	K 33	sereno	buona	assai calmo	(1)
39 _a	18-II	7.55- 8.15	4227	60 ; 45 ; 30 ; 25	II	—	K 33	assai limpido	ottima	calmo	

(1) Spettro n. 8 appena fuori del centro, per evitare zone perturbate.

(2) Zona perturbata in vicinanza della posa del centro (spettro n. 8).

(3) Spettri 1-2-3 guida un po' difficile.

Chiamando con y e T rispettivamente la deviazione del filo ed il flusso luminoso che cade sulla fotocella, — ambedue misurati in unità dei rispettivi massimi valori —, la funzione: $y = y(T)$ rappresenta allora la *curva caratteristica*, mentre la sua derivata dy/dT dà, come si è detto, la *sensibilità*. Per una assegnata coppia di obbiettivi e per un dato potenziale delle placche dell'elettrometro, la curva caratteristica dipende essenzialmente da due fattori: la tensione meccanica del filo dell'elettrometro e la sua distanza dalle placche. Aumentando (con un dispositivo a ciò predisposto) la tensione meccanica si ottiene un sistema meno elastico, che risponde meglio intorno alle piccole sollecitazioni ($T = 0$), che non alle grandi ($T = 1$), mentre avvicinando (simmetricamente) le placche al filo si aumenta la sensibilità generale, ma con relativo vantaggio per le grandi deviazioni. Da ciò si comprende come, agendo su ambedue questi fattori, sia possibile adattare, entro certi limiti, la forma della curva caratteristica al particolare problema fotometrico (registrazioni di densità molto forti o molto deboli). Però, nelle condizioni di impiego « *normali* » ⁽³⁾ si cerca che la relazione tra y e T sia per quanto è possibile *lineare*, con una sensibilità dell'ordine dell'unità. Alcune prove da me fatte in tali condizioni, — aprendo *a mano* di mezza divisione in mezza divisione (mezzo micron sulla lastra) la seconda fenditura —, confermano la linearità della relazione entro i limiti degli errori del metodo.

5. REGISTRAZIONE DEGLI SPETTROGRAMMI. — Come ho accennato nella precedente Nota, gli spettrogrammi da registrare avevano un'altezza di 3 mm., ad eccezione di quelli presi con fenditura dello spettrografo orientato radialmente al bordo solare. Per i primi è stata mantenuta durante la registrazione una altezza della fenditura del microfotometro di 1.5 mm. in modo da essere sufficientemente distante dai bordi e consentire, nello stesso tempo, la massima chiusura della fenditura senza troppo disturbo da parte della granulazione della lastra fotografica. Per gli altri spettrogrammi invece — che servono per il tracciamento dei profili nelle zone vicinissime al lembo — l'altezza della fenditura è stata mantenuta (necessariamente) assai più piccola. La larghezza della II fenditura (di precisione) è stata fissata in 0.05–0.08 mm., corrispondenti a 5–8 micron *sulla lastra* (usando la coppia di obbiettivi con ingrandimento 10). Solo in pochi casi eccezionali si è usato una larghezza 3–4 volte maggiore. Con la larghezza scelta rimane assicurata la massima risoluzione pratica degli spettrogrammi, assieme al massimo fattore di purezza, mentre le oscillazioni derivanti dalla granulazione della lastra rimangono appena sensibili. Sarà bene ricordare che il limite risolvante dello spettro-

(3) Queste si possono così fissare: 1° ingrandimento dei microscopi 10 volte, rapporto di luminosità 0.3; 2° potenziale delle placche dell'elettrometro ± 300 volta; 3° distanza delle placche dal filo 5.10 divisioni dei relativi tamburi; 4° tensione meccanica del filo 202.30 divisioni del relativo tamburo.

grafo era di 0.14 e 0.07 mm. *sulla lastra*, rispettivamente nel I e II ordine del reticolo.

Una volta scelta l'altezza e la larghezza della fenditura del microfotometro, restava da scegliere la scala della registrazione (in ascissa ed ordinata) e la forma della curva caratteristica. Per gli spettrogrammi presi nel I ordine del reticolo si è scelto un rapporto di trasmissione da 1 a 10, ciò che ha richiesto da 3 a 4 lastre (formato 9×18) affiancate per ciascuna riga del tripletto infrarosso del calcio ionizzato. In definitiva, 1 Angstrom risultò 14 mm. circa sulla registrazione. Per gli spettrogrammi presi nel II ordine, il rapporto di trasmissione è stato invece portato a 20. Questa scala delle ascisse si è dimostrata più che sufficiente per lo studio dei tracciati entro i limiti fissati dal potere risolutivo dello spettrografo. Per le ordinate, l'escursione massima (tra il fondo chiaro e il buio) di circa 8 cm. si è pure dimostrata sufficiente per una sicura lettura delle deviazioni dell'elettrometro entro l'1 % di tale escursione. Non ho creduto di aumentare (artificialmente, nel modo già spiegato) la scala delle ordinate per non complicare ancora (senza un sostanziale vantaggio) le operazioni di registrazione di già abbastanza laboriose ⁽⁴⁾.

Per quanto riguarda infine la scelta della curva caratteristica e della sensibilità, bisogna tener presente che il materiale fotografico fu da me raccolto *badando molto* (cfr. Nota I) a che i valori massimi e minimi delle densità da misurare cadessero, se non proprio entro i limiti rigorosi del tratto corretto della curva di calibrazione, almeno in un tratto non molto più ampio. Questo compito è stato assai facilitato dalla qualità delle lastre e da qualche accorgimento negli sviluppi. In conclusione, per la quasi totalità delle lastre si hanno trasmissioni che sono sempre contenute in un intervallo che va dal 10 % all'85 %, e questo buon equilibrio degli spettrogrammi ha consigliato (anche per non cimentare troppo le tensioni del delicatissimo filo del microfotometro) di utilizzare la curva caratteristica lineare (normale). Solo in pochissimi casi (di cui diremo a suo tempo) è sembrato opportuno un aumento della sensibilità dell'elettrometro.

6. CONTROLLO DELLA CALIBRAZIONE DELLE LASTRE. - Al n. 2. (Nota I) abbiamo accennato al metodo seguito per il controllo della calibrazione delle lastre. Si trattava, in poche parole, di controllare fino a qual punto il rapporto tra le intensità trasmesse alla lastra da due fenditure successive della fenditura a gradini (*step-slit*) corrispondesse ai rapporti geometrici delle loro aperture. Il metodo seguito è stato il seguente: sopra una *stessa lastra* si sono impresse con lo stesso *step-slit* due calibrazioni (luce del centro del disco solare), senza cambiare tra le due pose, né i filtri, né il tempo di

(4) La registrazione completa delle tre righe del tripletto infrarosso del Ca^+ su 8 spettrogrammi dal centro al lembo richiede, - per ogni gruppo di lastre della Tabella I -, 24 registrazioni su 3 lastre affiancate, cioè 72 operazioni, senza contare le registrazioni delle lastre di calibrazione.

esposizione, ma soltanto riducendo nella seconda posa l'illuminazione in un rapporto *ben noto*, mediante l'aggiunta di un filtro « neutro » di gelatina di trasmissione conosciuta (per ogni lunghezza d'onda) ⁽⁵⁾, ovvero diaframmando il reticolo secondo un determinato rapporto. È allora facile dimostrare che è possibile costruire, per una tale lastra, la curva caratteristica, — che dà la densità in funzione dell'illuminazione —, *senza che sia necessario conoscere il rapporto tra le intensità trasmesse alla lastra da due fenditure successive dello step-slit*. Anzi, una volta disegnata la curva di calibrazione, è possibile ricavare i rapporti in questione, e quindi confrontarli con quelli delle aperture geometriche.

Un eventuale divario può dipendere da moltissime cause, tra le quali, principalmente, le aberrazioni dello spettrografo e la luce diffusa (e quindi l'ordine del reticolo e, a parità di ordine, la lunghezza d'onda); un'indagine completa sul fenomeno avrebbe perciò richiesto molte prove e tempo, che io, purtroppo, non avevo a mia disposizione. Perciò la ricerca è stata effettuata con riferimento speciale a due sole zone spettrali che a me particolarmente interessavano: la λ 8500 nel I ordine del reticolo e la λ 4227 nel II ordine, mentre soltanto un numero minore di prove sono state fatte nella zona λ 5170 (pure nel II ordine), più che altro per controllo. In tutto 17 lastre, dalle quali è stato possibile ricavare (con 37 registrazioni al micro-fotometro) 26 curve di calibrazione, avendo per 9 lastre disegnato, indipendentemente, due curve per reciproco controllo.

Riferirò qui brevemente il risultato della mia indagine. Indichiamo coi numeri romani: I, II, ..., IX le *nove* fenditure dello *step-slit*, a partire dalla più larga (l'altezza comune essendo di circa 2 mm. ed altrettanto la distanza tra due gradini). Le *aperture geometriche*, accuratamente misurate, sono (*in millimetri*):

<i>Fenditura</i>	:	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
<i>Apertura geometrica:</i>		5.02	3.42	2.26	1.52	1.02	0.67	0.49	0.35	0.25

Si ha allora per i *rapporti geometrici* R_g tra due fenditure successive:

	II/I	III/II	IV/III	V/IV	VI/V	VII/VI	VIII/VII	IX/VIII	Media
R_g :	0.681	0.661	0.673	0.671	0.657	0.731	0.714	0.714	0.688

Il « passo » dello *step-slit* è stato dunque scelto in modo che nel passaggio dall'una fenditura alla successiva si abbia una variazione nella intensità della luce trasmessa pari a 0.4 grandezze stellari circa.

Diamo ora, — nella Tabella II —, i valori degli stessi rapporti ricavati sperimentalmente col metodo descritto; li indicheremo con R_o . Dal loro

(5) Questo filtro mi è stato cortesemente donato, per l'interessamento del Dr. S. B. NICHOLSON, dal *California Institute of Technology* di Pasadena, ove è stato possibile anche determinarne la trasmissione per il campo spettrale tra λ 4000 e λ 10.000.

confronto) coi rapporti R_g si vede che: 1° *in media*, i valori dei rapporti osservati coincidono *assai bene* con quelli geometrici nelle due zone λ 4227 e λ 5170 (II ordine del reticolo). *Invece* un *piccolo* divario si ha per la zona λ 8500 (I ordine del reticolo); 2° che anche il confronto tra i valori individuali degli R_o e degli R_g è, *in generale*, soddisfacente, poichè il divario non supera il valore di 0.03, ad eccezione dei due rapporti VI/V e VII/VI, pei quali si arriva a divari un po' maggiori (0.06 e 0.04).

TABELLA II.

Valori di R_o .

Zona spettrale	Ordine del reticolo	N. delle lastre	II/I	III/II	IV/III	V/IV	VI/V	VII/VI	VIII/VII	IX/VIII	Media
λ 4227	II	6	0.69	0.69	0.69	0.66	0.67	0.73	0.70	—	0.690
λ 5170	II	4	0.71	0.67	0.67	0.70	0.68	0.68	0.71	—	0.689
λ 8500	I	7	0.69	0.69	0.67	0.65	0.60	0.69	0.70	—	0.668

Un esame più dettagliato dei valori singoli (che ritengo inutile pubblicare) concorrenti a formare i valori della Tabella II, sembrerebbe escludere che i rapporti R_o possano dipendere dai tempi di esposizione (che vanno, a seconda del tipo di lastra, da 15^s a 10^m), e resta la convinzione che gli scarti — qualche volta sensibili, fino a ± 0.15 dalla media —, debbano attribuirsi al caso, o meglio ad una quantità di cause imponderabili per l'analisi delle quali il materiale a mia disposizione non è sufficiente. *Si tratta però sempre di divari che, nelle medie, tendono ad annullarsi, o a rimanere entro ordini di grandezza tollerabili.* Anche il massimo cambiamento, — dell'ordine di 0.06 —, in qualcuno dei rapporti R non altera sensibilmente la curva di calibrazione delle lastre; alcune prove mostrano che la massima sua influenza sul disegno dei profili delle righe spettrali non supera, nei rapporti delle intensità al fondo continuo, l'1 % di quest'ultimo per le ali o il 3 % per il centro della riga. Si rientra dunque nei limiti degli errori che è lecito attendersi nel tipo di fotometria di cui ci occupiamo.

In conclusione e nei limiti di tali errori, è del tutto lecito assumere i rapporti geometrici delle aperture delle fenditure dello *step-slit* come rapporti delle effettive intensità luminose trasmesse alla lastra fotografica.

In una prossima Nota darò un primo gruppo di profili delle righe del tripletto infrarosso del calcio ionizzato dal centro al lembo del Sole, ricavati da un primo gruppo di lastre.

Fisica matematica. — *Sulla propagazione del fronte d'onda nei mezzi dispersivi eterogenei.* Nota (*) di MARZIANO MARZIANI, presentata dal Corrisp. B. FINZI.

In un recente lavoro (1) ho dimostrato che il fronte (2) di un'onda elettromagnetica piana si propaga, in un mezzo dispersivo omogeneo, di costante dielettrica ϵ e permeabilità magnetica μ , con velocità $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$, cioè come se il mezzo non fosse dispersivo. Tale risultato, nel caso del mezzo omogeneo, era già stato ottenuto, per altra via e in ipotesi meno generali, da Sömmersfeld e Brillouin.

Nella presente Nota estendo tali considerazioni, dimostrando che la velocità di propagazione del fronte d'onda in un mezzo dispersivo eterogeneo è $c(z) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon(z)\mu}}$, in cui μ è costante e ϵ è funzione di z , essendo l'asse z la direzione di propagazione dell'onda. Otterrò questo risultato mediante la seguente formula:

$$(1) \quad E(z, t) = \sqrt{\frac{\epsilon(0)}{\epsilon(z)\mu}} \exp\left(-\int_0^z \frac{\gamma(z')}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon(z')}} dz'\right) \left[E_0(t-n) + \int_0^{t-n} E_0(\tau) \Psi(z, t-\tau-n) d\tau \right]$$

dove è

$$(2) \quad n = \int_0^z \sqrt{\epsilon(z')\mu} dz'$$

e $\gamma(z)$ indica la conduttività del mezzo e t il tempo. Si denota poi con $E_0(t)$ il valore assunto dall'intensità $E(z, t)$ del campo elettrico per $z = 0$, e con $\Psi(z, t)$ una funzione che verrà specificata nel seguito.

La relazione (1), che generalizza la (8) del precedente lavoro, mi sembra anche di per se stessa di un certo interesse, in quanto dà una forma espressiva per il campo dell'onda che si propaga in un mezzo dispersivo non omogeneo e permette, come si vedrà, di stabilirne il valore in vicinanza del fronte d'onda.

1. Per ottenere la (1) supporremo, come in (P.M.D.), $E_0(t)$ identicamente nullo per $t < 0$, continuo o almeno continuo a tratti per $t > 0$, lo zero estremo inferiore dei valori di t per cui risulta $E_0(t) \neq 0$. Supporremo

(*) Pervenuta il 26 settembre 1952.

(1) M. MARZIANI, *Sulla propagazione del fronte d'onda nei mezzi dispersivi.* « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », ser. VIII, vol. XII, pp. 683-687 (1952). Tale Nota verrà in seguito indicata con la sigla (P.M.D.).

(2) Superficie che in ogni istante separa la regione dello spazio ove il campo elettromagnetico è identicamente nullo, da quella ove è diverso da zero (almeno in prossimità di tale superficie).

poi $\varepsilon(z)$ e $\gamma(z)$, per $z \geq 0$, funzioni positive, continue e limitate, dotate di derivate dei primi tre ordini limitate. Inoltre faremo l'ipotesi che per $z > l$ (l numero positivo arbitrario) si abbia il vuoto, cioè $\varepsilon(z)$ sia costante e uguale a ε_v , $\gamma(z) = 0$, ipotesi questa, per nulla restrittiva nei casi pratici. Conforme all'esperienza avremo $\varepsilon(z) \geq \varepsilon_v$. Il nucleo ereditario

$G(z, t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_r(z) t^r}{r!}$ che rappresenta la dispersività, sarà funzione continua, nulla per $z > l$, con coefficienti $a_r(z)$ dotati di derivate limitate.

Analogamente a quanto si è ammesso in (P.M.D.), si supporrà che $G(z, t)$ sia, rispetto a t una trascendente intera di tipo normale ρ del primo ordine, con ρ indipendente da z .

Infine faremo l'ipotesi, per niente restrittiva dal punto di vista fisico, che $E(z, t)$ e $H(z, t)$ (intensità del campo magnetico), assieme alle loro derivate prime temporali e a $E_0(t)$ siano per $z > 0$ funzioni trasformabili secondo Laplace rispetto a t , con trasformate continue e derivabili almeno due volte rispetto a z ed esista anche un parametro complesso p indipendente da z , con parte reale positiva sufficientemente grande per cui siano $e(z, p)$, $h(z, p)$, $e_0(p)$ le trasformate delle suddette funzioni e $g(z, p)$ quella di $G(z, t)$ ⁽³⁾.

Inoltre ammetteremo le derivate prime e seconde di $e(z, p)$, $h(z, p)$ rispetto a z uguali alle trasformate delle analoghe derivate di $E(z, t)$, $H(z, t)$.

Considerazioni identiche a quelle svolte in (P.M.D.) portano che $e(z, p)$ soddisfa all'equazione

$$(3) \quad \frac{d^2}{dz^2} e(z, p) - [\varepsilon(z) \mu p^2 + \mu \gamma(z) p + \mu p g(z, p)] e(z, p) = 0$$

con le condizioni

$$(4) \quad e(0, p) = e_0(p), \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} e(z, p) = 0.$$

2. Consideriamo l'integrale $f(z, p)$ della (3) continuo assieme alla sua derivata prima, uguale a 1 per $z = 0$ e nullo per z tendente all'infinito ⁽⁴⁾. La $f(z, p)$ soddisfa pure, come tosto si verifica ⁽⁵⁾, l'equazione integrale

$$(5) \quad f(z, p) = u(z, p) + u(z, p) \int_0^z \frac{d\xi}{u^2(\xi, p)} \int_{\xi}^{\infty} a(\eta, p) f(\eta, p) d\eta$$

(3) Risulta $g(z, p) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_r(z)}{p^{r+1}}$ convergente all'esterno di un cerchio di raggio $p_1 > p$.

(4) Osserviamo che $f(z, p)$ per $z \geq l$ si comporta come $\exp(-z p \sqrt{\varepsilon_v \mu})$, a parte un fattore dipendente solo da l e da p .

(5) Infatti derivando due volte la (5) si trova:

$$f''(z, p) = u''(z, p) + u''(z, p) \int_0^z \frac{d\xi}{u^2(\xi, p)} \int_{\xi}^{\infty} a(\eta, p) f(\eta, p) d\eta - \frac{1}{u(z, p)} a(z, p) f(z, p)$$

e sostituendo nella (3) l'espressione di $f(z, p)$ data dalla (5) e quella di $f''(z, p)$ ora ottenuta, tenendo conto della (6), la (3) risulta identicamente soddisfatta.

con

$$(6) \quad a(z, p) = u''(z, p) - [\varepsilon(z) \mu p^2 + \mu \gamma(z) p + \mu p g(z, p)] u(z, p)$$

$$(7) \quad u(z, p) = \exp(-np) \Phi(z) (1 + \alpha_1(z) p^{-1} + \alpha_2(z) p^{-2})$$

e le funzioni $\Phi(z)$, $\alpha_1(z)$, $\alpha_2(z)$ (la prima uguale a 1, le rimanenti nulle per $z=0$) sono scelte in modo da rendere identicamente uguali a zero i coefficienti di p , p^0 , p^{-1} in $a(z, p)$ ⁽⁶⁾ moltiplicata per $\exp(np)$, nulla, come facilmente si verifica, per $z \gg l$ ⁽⁷⁾.

Pertanto per ogni $z \geq 0$ e qualunque sia p del semipiano $R(p) > \alpha$ ⁽⁸⁾ ($\alpha =$ minima comune ascissa di convergenza di tutte le trasformate di Laplace finora considerate) si potrà scrivere:

$$a(z, p) = \varphi(z, p) \exp(-np)$$

dove $\varphi(z, p)$ è funzione analitica di p , infinitesima come $1/p^2$, e limitata rispetto a z in $(0, +\infty)$.

Se ora poniamo

$$b(z, \xi, p) = \frac{1 + \alpha_1(z) p^{-1} + \alpha_2(z) p^{-2}}{\Phi^2(\xi) (1 + \alpha_1(\xi) p^{-1} + \alpha_2(\xi) p^{-2})^2}, \quad q(z, p) = f(z, p) \exp(np)$$

la (5) diventa:

$$f(z, p) = \Phi(z) \exp(-np) \left[1 + \alpha_1(z) p^{-1} + \alpha_2(z) p^{-2} + \right. \\ \left. + \int_0^z d\xi \int_{\xi}^{\infty} b(z, \xi, p) \varphi(\eta, p) q(\eta, p) \exp\left(2p \int_{\eta}^{\xi} \sqrt{\varepsilon(\eta)} \mu d\eta\right) d\eta \right].$$

Allora se la funzione $|q(z, p)|$ che per $z=0$ vale 1 e che, per quanto si è osservato in precedenza riguardo $f(z, p)$, assume valore costante per $z \geq l$, raggiunge nell'intervallo chiuso $(0, l)$ il suo massimo $|Q(p)|$ per

(6) Sostituendo in $a(z, p)$ l'espressione (7) di $u(z, p)$ e quella della sua derivata seconda, il coefficiente di p^2 risulta identicamente nullo. Se si impone a $\Phi(z)$, $\alpha_1(z)$, $\alpha_2(z)$ di annullare i coefficienti di p , p^0 , p^{-1} si ricavano le seguenti equazioni

$$\frac{\Phi'}{\Phi} = -\frac{\varepsilon'}{4\varepsilon} - \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

$$\alpha_1' = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon\mu}} \left(\frac{\Phi''}{\Phi} - \mu a_0 \right)$$

$$\alpha_2' = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon\mu}} (\alpha_1'' - \mu a_1 + 2\sqrt{\varepsilon\mu} \alpha_1' \alpha_1' + 2\alpha_1')$$

le quali, assieme alle condizioni dichiarate determinano $\Phi(z)$, $\alpha_1(z)$, $\alpha_2(z)$. Per $\Phi(z)$ si trova

$$\Phi(z) = \sqrt[4]{\frac{\varepsilon(0)}{\varepsilon(z)}} \cdot \exp\left(-\int_0^z \frac{\gamma(z)}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon(z)}} dz\right).$$

(7) Poichè per $z > l$ ε' , γ , $G(z, l)$ sono nulle, si ha per la nota precedente $\Phi(z)$, $\alpha_1(z)$, $\alpha_2(z)$ costanti. Allora $u(z, p) = C(p) \exp(-pz\sqrt{\varepsilon\mu})$ dove $C(p)$ non dipende da z . Sostituendo in (6) dove $\varepsilon(z) = \varepsilon_v$, $\gamma(z) = g(z, p)$ sono nulle risulta $a(z, p) = 0$ per $z > l$.

(8) Con $R(p)$ indicheremo la parte reale del numero complesso p .

$z = z_1$, tenuto conto che essendo $\Phi(z)$, $\alpha_1(z)$, $\alpha_2(z)$, $|b(z, \xi, p)|$, $|\varphi(z, p)|$ limitate almeno per $R(p)$ sufficientemente grande e inoltre $\varphi(z, p)$ infinitesime come $1/p^2$, esistono due costanti positive K e A tali che

$$|\Phi(z)| 1 + \alpha_1(z) p^{-1} + \alpha_2(z) p^{-2} < K, \quad |\Phi(z)| |b(z, \xi, p) \varphi(z, p)| < \frac{A}{|p^2|}$$

e pertanto

$$\begin{aligned} |Q(p)| &= |\Phi(z_1) [1 + \alpha_1(z_1) p^{-1} + \alpha_2(z_1) p^{-2} + \\ &+ \int_0^{z_1} d\xi \int_{\xi}^{\infty} b(z_1, \xi, p) \varphi(\eta, p) q(\eta, p) \exp\left(2p \int_{\eta}^{\xi} \sqrt{\varepsilon(\eta)} \mu d\eta\right) d\eta| < K + \\ &+ \frac{A}{|p^2|} |Q(p)| \left| \int_0^l d\xi \int_{\xi}^{\infty} \exp\left[2R(p) \int_{\eta}^{\xi} \sqrt{\varepsilon(\eta)} \mu d\eta\right] d\eta \right| < K + \\ &+ \frac{A}{|p^2|} |Q(p)| \left| \int_0^l d\xi \int_{\xi}^{\infty} \exp\left[2R(p) \int_{\eta}^{\xi} \sqrt{\varepsilon_v} \mu (\xi - \eta) d\eta\right] d\eta \right| < K + \frac{A}{|p^2|} |Q(p)| \frac{l}{2R(p) \sqrt{\varepsilon_v} \mu}. \end{aligned}$$

Allora preso $R(p)$ sufficientemente grande in modo che sia

$$\left| \frac{Al}{2p^2 R(p) \sqrt{\varepsilon_v} \mu} \right| < \frac{1}{2}$$

risulta $|Q(p)| < 2K$, cioè $|q(z, p)|$ è limitata per ogni z in $(0, l)$ e qualunque p , con $R(p)$ sufficientemente grande.

L'ultimo termine della funzione analitica

$$\begin{aligned} \Psi^*(z, p) &= \alpha_1(z) p^{-1} + \alpha_2(z) p^{-2} + \\ &+ \int_0^z d\xi \int_{\xi}^{\infty} b(z, \xi, p) \varphi(\eta, p) q(\eta, p) \exp\left(2p \int_{\eta}^{\xi} \sqrt{\varepsilon(\eta)} \mu d\eta\right) d\eta \end{aligned}$$

è pertanto, per ogni z , infinitesimo almeno come $1/p^2$ in un certo semipiano della variabile complessa p , e quindi ⁽⁹⁾ $\Psi^*(z, p)$ risulta la trasformata di Laplace di una funzione continua di z e di t che indicheremo con $\Psi(z, t)$.

La soluzione del problema (3), (4) è perciò

$$e(z, p) = \Phi(z) \exp(-np) e_o(p) + \Phi(z) \exp(-np) e_o(p) \Psi^*(z, p)$$

da cui antitrasformando segue la (1).

3. Per determinare la posizione del fronte d'onda, basta osservare che essendo $\frac{dn}{dz} > 0$, la (2) definisce n come funzione crescente di z e viceversa z come funzione univoca continua e crescente.

Allora, considerando z come funzione di n , la (1) diventa analoga a (8) di (P.M.D.) e quindi ragionando come in quella Nota, si prova che il fronte d'onda si ha per $n = t$ cioè per quel valore di z tale che

$$t = \int_{\mu}^z \sqrt{\varepsilon(z)} \mu dz.$$

(9) Cfr. G. DOETSCH, *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*, p. 130.

La velocità di propagazione del fronte d'onda vale perciò

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(z)\mu}}$$

come si era affermato.

È da notare poi che nelle vicinanze del fronte d'onda, l'integrale che compare a secondo membro in (1) è trascurabile rispetto all'altro termine, anzi questa ipotesi diventa esatta se sul fronte di onda il campo non è nullo (il che avviene se $E_0(\neq 0) \neq 0$). Allora si può scrivere sensibilmente

$$E(z, t) \cong \sqrt{\frac{\varepsilon(0)}{\varepsilon(z)}} \exp\left(-\int_0^z \frac{\gamma(z')}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon(z')}} dz'\right) E_0(t - n)$$

e questa formula, che non poteva ottenersi con la teoria delle caratteristiche, esprime il campo nelle vicinanze del fronte d'onda.

Chimica fisica. — *Velocità ultrasonora e compressibilità adiabatica di miscele di idrocarburi*^(*). Nota ^(**) di FERDINANDO DANUSSO, presentata dal Corrisp. G. NATTA.

In un precedente lavoro ⁽¹⁾ avevo dedotto per via termodinamica le leggi di variazione della velocità ultrasonora e delle compressibilità adiabatiche con la composizione in miscele liquide atermiche o ideali.

Ammettendo, infatti, che per le miscele così dette atermiche, cioè caratterizzate da entalpia di miscela nulla, si abbia l'additività dei volumi (ciò che può essere termodinamicamente dimostrato), si può scrivere, per un sistema a due componenti:

$$(1) \quad V = V_1(1 - x) + V_2 x$$

essendo x la frazione molare del secondo componente e V , V_1 e V_2 i volumi molecolari della miscela e dei due componenti puri prima della miscelazione; oppure, se w è la frazione in peso (o in massa) del secondo componente e ρ sono le densità:

$$(2) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1 - w}{\rho_1} + \frac{w}{\rho_2}.$$

In una miscela propriamente (e non apparentemente) atermica si può d'altra parte in generale ammettere che l'additività valga, oltrechè per i volumi, anche per loro derivate rispetto alla pressione o alla temperatura; in particolare deve valere l'additività anche per le derivate del volume rispetto alla pressione ad entropia costante, cioè per le compressibilità adiabatiche.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano.

(**) Pervenuta all'Accademia il 4 agosto 1952.

(1) F. DANUSSO, « Rend. Accad. Naz. Lincei », 10, 235 (1951).

Prendendo in considerazione le compressibilità molecolari B (riferite ad una mole) e quelle specifiche b (riferite all'unità di massa) si ha allora:

$$(3) \quad B = B_1(1-x) + B_2x$$

$$(4) \quad b = b_1(1-w) + b_2w$$

Infine, poichè si può dimostrare, ad esempio, la relazione:

$$(5) \quad b = \frac{1}{\rho^2 u^2}$$

in cui u è la velocità ultrasonora nel liquido considerato, dalla (4) si può ricavare la legge di variazione della velocità ultrasonora con la composizione:

$$(6) \quad u = \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{1}{\frac{1-w}{\rho_1^2 u_1^2} + \frac{w}{\rho_2^2 u_2^2}}}$$

Espressioni analoghe possono essere ricavate in funzione di frazioni molari, in volume, ecc. e per sistemi a più di due componenti.

Da quanto detto risulta così possibile, noti due liquidi puri, prevedere quale sia il volume, la velocità ultrasonora e la compressibilità adiabatica di una loro miscela considerata come atermica o ideale.

In realtà si può pensare che non esistano miscele perfettamente atermiche od a volume di miscela rigorosamente additivo. Si potranno però trovare miscele che non si discostano sensibilmente da tale comportamento, come pure altre che deviano notevolmente.

Si apre allora un interessante orizzonte di studio sul significato delle deviazioni che i dati sperimentali possono presentare rispetto a quelli calcolati supponendo la miscelazione rigorosamente ideale. Si ha così, anche rispetto ad eventuali considerazioni teoriche, un confronto tra un comportamento reale e un comportamento concettuale particolarmente semplice, che esclude, all'atto della formazione della miscela, qualsiasi variazione nella natura e nell'entità delle interazioni molecolari. È questo un criterio che può, in definitiva, introdurre elementi quantitativi in un campo di studio che è stato finora trattato in modo prevalentemente qualitativo.

Mi è sembrato opportuno iniziare un esame del genere dalle miscele dei liquidi strutturalmente più semplici, cioè da miscele di idrocarburi.

I componenti sono stati scelti in modo da avere o similitudini o profonde differenze nella forma e nelle dimensioni molecolari; sono state così sistematicamente esaminate tutte le possibili miscele binarie dei seguenti idrocarburi:

n-eptano	cetano
cicloesano	decalina
benzolo	

oltre ad una miscela di esani e olio di paraffina. Come decalina si è usata una miscela di isomeri cis e trans.

Le misure di densità sono state eseguite in picnometro mentre le velocità ultrasonore sono state determinate con un apparecchio messo a punto nell'Isti-

tuto di Ultracustica del C.N.R., a frequenza di 4 MHz e misura per via ottica con cella a doppio quarzo secondo Giacomini ⁽²⁾. In base alle caratteristiche dei metodi usati, i dati di densità possono essere considerati approssimati al 0,04 % e quelli di velocità ultrasonora al 0,2 % circa. Tutte le determinazioni sono state fatte a 30°C.

Nella Tabella I si trovano raccolti tutti i dati sperimentali di densità e di velocità ultrasonora, a cui sono stati aggiunti quelli di volume e compressibilità adiabatica molecolare, calcolati dai primi secondo le relazioni:

$$V = \frac{M}{\rho} \quad \text{e} \quad B = \frac{M}{\rho^2 u^2}$$

in cui M è la massa molecolare.

Da questi dati e da quelli calcolabili nel caso di miscelazione ideale in base ai dati sperimentali dei soli componenti puri (ad esempio mediante le (1), (6) e (3), che risultano particolarmente comode), si sono ottenute le deviazioni percentuali dall'idealità del volume molecolare (o specifico), della velocità ultrasonora e della compressibilità molecolare (o specifica) in funzione della composizione. Con i valori di tali deviazioni si sono costruiti i diagrammi di fig. 1 per tutti i sistemi studiati, distinguendo questi in tre categorie, di cui diremo tra poco, che corrispondono alle tre colonne della figura.

Un esame di tutti i dati sugli idrocarburi qui presentati porta ad alcune conclusioni che, in via preliminare, appaiono come le più importanti.

a) L'atermicità (idealità ?) più completa si verifica in un solo sistema (cetano-decalina) che è anche l'unico che segue l'additività dei volumi in modo rigoroso. Questo fatto resta una conferma sperimentale dell'esattezza delle leggi utilizzate per la velocità ultrasonora e per le compressibilità, leggi che sono state dedotte da quella dell'additività dei volumi.

b) Per un liquido è in generale noto che in qualsiasi circostanza in cui si abbia aumento o diminuzione di densità si ha pure un aumento o diminuzione di velocità, con conseguente diminuzione o aumento di compressibilità. Ci si può domandare se tale regolarità possa estendersi anche a variazioni di densità nella miscelazione rispetto al valore corrispondente a una miscelazione ideale.

Nel nostro caso si nota che quando si ha contrazione di volume tale regola è sempre seguita, mentre con aumenti di volume si possono osservare eccezioni. Nella fig. 1 si possono esaminare, sulle tre colonne di diagrammi, le deviazioni corrispondenti ai seguenti tre gruppi di sistemi, di cui i primi due seguono la regola sopra indicata.

1° Gruppo: Sistemi a contrazione di volume e aumento di velocità (con conseguente diminuzione di compressibilità).

2° Gruppo: Sistemi ad aumento di volume e diminuzione di velocità (con conseguente aumento di compressibilità);

3° Gruppo: Sistemi ad aumento di volume ed aumento di velocità.

(2) A. GIACOMINI, « Rend. Accad. Naz. Lincei », 2, 791 (1947).

TABELLA I.

Densità ρ , volume molecolare V, velocità ultrasonora u e compressibilità molecolare B di alcune miscele di idrocarburi in funzione della frazione molare x a 30°C.

N. d'ordine	Componenti	x % moli	ρ gr/cm ³	V cm ³ /mole	u m/sec	B cm ³ 10 ⁻³ mole at
1	Miscela esani	0,00	0,6934	124,27	1101	14,50
		3,17	0,7073	129,97	1125	14,24
		12,42	0,7399	146,98	1173	14,16
		25,10	0,7735	171,69	1229	14,42
		37,27	0,7975	191,75	1270	14,63
		59,76	0,8292	234,96	1333	15,64
	Olio paraffina	96,33	0,8598	303,93	1403	17,62
		100,00	0,8619	310,94	1406	17,90
2	n-Eptano	0,00	0,6751	148,42	1111	17,47
		10,98	0,6942	164,30	1156	17,37
		18,35	0,7050	174,98	1179	17,52
		25,27	0,7137	185,08	1202	17,68
		35,06	0,7246	199,35	1228	17,90
		51,42	0,7373	223,92	1257	18,86
	Cetano	80,48	0,7582	266,14	1303	20,28
		100,00	0,7673	295,10	1325	21,49
3	n-Eptano	0,00	0,6752	148,40	1111	17,47
		18,32	0,6879	141,38	1129	15,82
		48,79	0,7121	129,71	1158	13,33
		61,33	0,7243	124,75	1174	12,26
		75,82	0,7394	119,07	1193	11,10
		92,59	0,7594	112,39	1218	9,79
	Cicloesano	100,00	0,7690	109,44	1227	9,27
4	n-Eptano	0,00	0,6751	148,42	1111	17,47
		17,93	0,7147	149,74	1158	15,33
		44,95	0,7719	151,96	1229	12,79
		68,75	0,8192	154,24	1288	11,13
		86,00	0,8516	156,07	1328	10,19
		100,00	0,8768	157,66	1363	9,49
	Decalina					
5	Cetano	0,00	0,7671	295,10	1324	21,53
		42,67	0,7656	216,46	1291	16,64
		60,25	0,7651	183,91	1277	14,46
		74,32	0,7652	157,72	1261	12,72
		88,38	0,7661	131,43	1244	10,88
		90,33	0,7663	127,78	1242	10,60
	Cicloesano	100,00	0,7687	109,48	1230	9,23

Segue: TABELLA I.

N d'ordine	Componenti	$x\%$ moli	ρ gr/cm ³	V cm ³ /mole	u m/sec	B cm ³ 10 ⁻³ mole at
6	Cetano	0,00	0,7671	295,10	1324	21,53
		16,41	0,7774	272,65	1326	19,57
		30,33	0,7877	253,50	1329	17,87
		47,13	0,8023	230,42	1333	15,86
		68,68	0,8261	200,77	1342	13,24
		89,89	0,8576	171,59	1355	10,69
	Decalina	100,00	0,8768	157,66	1363	9,49
7	n-Eptano	0,00	0,6751	148,42	1111	17,47
		25,43	0,7057	134,08	1131	14,59
		58,75	0,7600	114,76	1167	10,88
		80,87	0,8095	101,72	1212	8,39
	Benzolo	90,67	0,8366	95,83	1241	7,30
		100,00	0,8663	90,16	1277	6,26
8	Cetano	0,00	0,7671	295,10	1324	21,53
		24,16	0,7742	246,19	1310	18,17
		49,46	0,7860	194,74	1289	14,63
		73,11	0,8065	146,30	1268	11,07
		86,94	0,8285	117,66	1263	8,73
	Benzolo	100,00	0,8663	90,16	1277	6,26
9	Cicloesano	0,00	0,7687	109,48	1230	9,23
		8,64	0,7816	113,65	1243	9,23
		20,68	0,7979	119,47	1260	9,23
		36,66	0,8173	127,24	1286	9,23
		42,21	0,8237	129,89	1293	9,25
		57,06	0,8393	137,04	1313	9,29
	Decalina	75,40	0,8505	145,87	1336	9,36
		100,00	0,8768	157,66	1363	9,49
10	Cicloesano	0,00	0,7690	109,44	1227	9,27
		27,10	0,7878	104,75	1231	8,61
		49,00	0,8067	100,64	1236	8,01
		63,55	0,8213	97,78	1243	7,56
		85,36	0,8468	93,29	1262	6,79
	Benzolo	100,00	0,8668	90,11	1278	6,25
11	Decalina	0,00	0,8768	157,66	1363	9,49
		17,19	0,8749	146,19	1349	9,01
		42,60	0,8717	129,19	1323	8,31
		64,29	0,8692	114,56	1303	7,62
	Benzolo	73,98	0,8681	108,00	1295	7,28
		100,00	0,8663	90,16	1277	6,26

Per i sistemi che non seguono la regola risulta, in linea di principio, egualmente possibile sia un aumento di compressibilità, sia una diminuzione e, come caso intermedio, un andamento ideale, evidentemente apparente. Nel

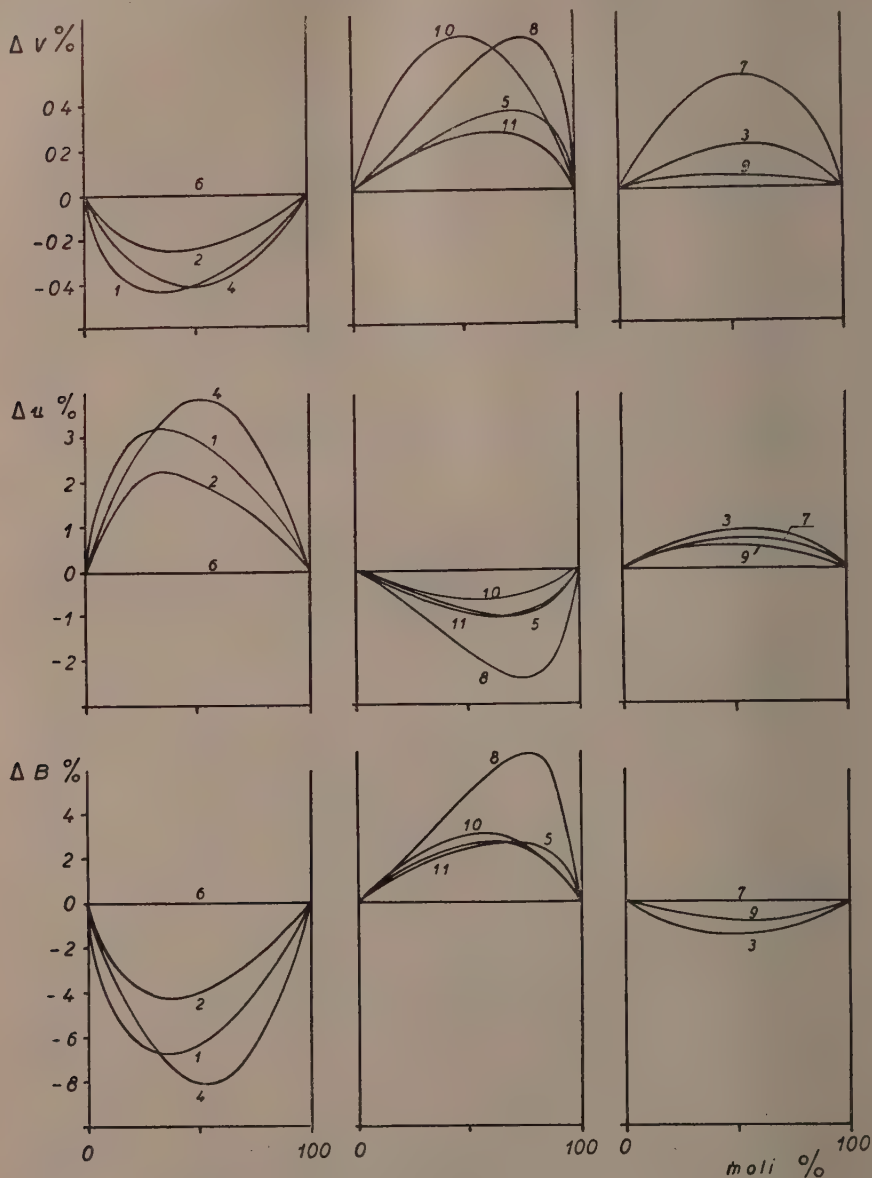


Fig. 1. - Deviazioni dall'idealità del volume molecolare V , della velocità ultrasonora u , e della compressibilità adiabatica molecolare B in miscele di idrocarburi (i numeri che contrassegnano le curve corrispondono al numero d'ordine delle miscele nella Tabella I).

nostro caso troviamo, nel terzo gruppo, diminuzione di compressibilità nei sistemi cicloesano-decalina (le cui deviazioni non sono però di grande entità) ed eptano-cicloesano, mentre si ha in eptano-benzolo il caso singolare intermedio di idealità apparente delle compressibilità, analizzabile nella compensazione delle deviazioni di velocità e volume (queste ultime di notevole entità).

c) Mentre la contrazione di volume comporta un notevole effetto sulla deviazione, sempre positiva, di velocità, ad aumento di volume corrispondono deviazioni di velocità, talvolta negative, talvolta positive, ma sempre di valore assoluto relativamente più piccolo.

d) Le composizioni alle quali si ha la massima deviazione percentuale di volume, velocità e compressibilità, coincidono sensibilmente in uno stesso valore caratteristico di ogni sistema.

e) Le deviazioni percentuali di velocità e di compressibilità sono, in prima approssimazione, direttamente proporzionali alle deviazioni percentuali di volume. Si ha cioè

$$\frac{\Delta u}{u} = k_u \frac{\Delta V}{V} \quad \text{e} \quad \frac{\Delta B}{B} = k_B \frac{\Delta V}{V}$$

in cui k_u e k_B sono costanti caratteristiche di ogni sistema. Conseguente che:

$$\frac{\Delta B}{B} = K \frac{\Delta u}{u}.$$

CONCLUSIONI. — Ricavate per via termodinamica le leggi di variazione della velocità ultrasonora e della compressibilità adiabatica con la composizione in una miscela liquida atermica o ideale (relazioni (3), (4), (6)), si è iniziato uno studio sistematico delle deviazioni che le miscele liquide possono in realtà presentare rispetto al caso concettuale particolarmente semplice di miscelazione ideale.

La tabella I e la fig. 1 raccolgono i risultati di misure su undici miscele binarie di idrocarburi, dai quali è possibile trarre alcune importanti conclusioni:

a) lo sviluppo teorico proposto per le miscele atermiche trova conferma sperimentale nel fatto che l'unico sistema a deviazioni di volume sensibilmente nulle segue, entro gli errori sperimentali, le leggi ricavate per la velocità ultrasonora e per la compressibilità;

b) a contrazioni di volume nella miscelazione corrispondono aumenti di velocità, ciò che è in analogia con la regola generale che si verifica nei liquidi quando se ne alteri in qualche modo la densità. Tale regola non è invece sempre seguita in corrispondenza di un aumento di volume, che in tre sistemi è accompagnato da aumento, anziché da diminuzione, di velocità. Tale irregolarità fornisce anche un interessante caso di idealità apparente nelle compressibilità;

c) mentre la contrazione di volume comporta un notevole effetto sulle deviazioni di velocità, effetti relativamente più piccoli si notano con aumento di volume;

d) i massimi delle deviazioni percentuali di volume, velocità e compressibilità si presentano tutti ad un'unica concentrazione caratteristica di ogni sistema;

e) valgono in prima approssimazione le seguenti semplici relazioni di proporzionalità:

$$\frac{\Delta u}{u} = k_u \frac{\Delta V}{V} \quad ; \quad \frac{\Delta B}{B} = k_B \frac{\Delta V}{V} \quad ; \quad \frac{\Delta B}{B} = K \frac{\Delta u}{u}$$

in cui V è il volume molecolare, u la velocità ultrasonora e B la compressibilità adiabatica molecolare, mentre k_u , k_B e K sono costanti caratteristiche di ogni sistema.

Chimica. — *Sugli arseniuri di Uranio* (*). Nota I di ALDO IANDELLI, presentata (**) dal Socio L. ROLLA.

In questi ultimi anni l'interesse per le terre rare è stato ridestato dallo studio degli elementi transuranici, e dalla scoperta che anche per questi avviene lo stesso processo di riempimento di livelli interni (5f), che è responsabile della quasi identità di comportamento delle terre rare. Da ciò deriva una grande somiglianza degli uranidi fra loro, una stabilità della valenza tre sempre maggiore con l'aumentare del numero atomico, e con quest'ultima una analogia molto stretta fra uranidi e lantanidi.

Dal punto di vista strutturistico, le ricerche di Zachariasen ⁽¹⁾ hanno dimostrato che esiste isomorfismo fra numerosissimi sali delle terre rare ed i corrispondenti derivati trivalenti dell'U, Pu e Ac; isomorfismo che si estende anche a qualche composto non ionico, come per esempio ai disiliciuri MSi_2 ; ed a qualche composto intermetallico di cui è stata riportata la struttura ⁽²⁾.

Per lo studio della valenza metallica può avere un certo interesse il confronto fra i composti intermetallici dell'U e delle terre rare con uno stesso elemento, dato che anche qui si deve manifestare in qualche modo la capacità dell'U di presentare valenze superiori alle tre.

Per la cortesia del prof. Bolla, che ringrazio sentitamente, mi fu possibile avere dal C.I.S.E. dell'uranio metallico di grande purezza, col quale sono stati preparati ed esaminati un certo numero di composti intermetallici e semimetallici, per confrontarli con quelli analoghi delle terre rare. Nella presente Nota riferirò sui risultati ottenuti per il sistema U-As, nel quale ci si può aspettare la formazione di composti intermedi fra ionici e metallici.

(*) Lavoro eseguito col sussidio del C. N. R.

(**) Nella seduta del 14 giugno 1952.

(1) W. H. ZACHARIASEN, Numerosi articoli su «Acta Crystallographica», 1 (1948); 2 (1949).

(2) R. E. RUNDLE, «Acta Crystallographica», 2, 148 (1949).

L'uranio usato era in forma di trucioli, e non conteneva come impurezze che una piccola quantità di ossido (1,2 %). Data la quantità di metallo disponibile, il sistema U-As è stato studiato esclusivamente per via röntgenografica.

In alcuni primi tentativi ho cercato di utilizzare i trucioli di U più piccoli direttamente, facendoli reagire, dopo pulitura accurata (eliminazione magnetica di tracce di Fe, lavaggio con HNO_3 conc., acqua, alcool ed essiccamento a bassa temperatura in corrente di CO_2) direttamente con As ad alta temperatura. Una reazione avviene, ma una volta formato uno strato superficiale di arseniuro (che si è dimostrato poi essere UAs_2), essa non procede ulteriormente, nemmeno con un riscaldamento prolungato. È necessario che l'U entri in reazione in forma molto più suddivisa, e per questo ho dovuto procedere prima ad una rifusione dei trucioli di U puliti (5 gr.) sotto BaCl_2 fuso, per avere poi per limatura del blocchetto ottenuto il materiale da far reagire con arsenico. Il punto di fusione dell'U usato era intorno a 1150° , ed il metallo compatto aveva aspetto argenteo e nessuna fragilità. L'ossidazione del metallo compatto era molto lenta, e solo dopo qualche giorno all'aria la superficie si colorava leggermente in giallo bruno.

I campioni U-As delle varie composizioni (20, da U_3As ad UAs_3) sono stati preparati per riscaldamento nel vuoto dei miscugli di polveri dei due elementi nella quantità voluta in piccoli crogiolini, ricavati da rivestimenti di coppie termoelettriche, contenuti a loro volta in tubetti di quarzo. Prima dell'introduzione del miscuglio il tubetto di quarzo col crogiolino era riscaldato ad un migliaio di gradi nel vuoto di una pompa a diffusione in modo da sgassarlo più completamente possibile; poi veniva riempito della polvere di U + As sempre sotto vuoto, ed infine veniva saldato. Questa operazione è la più delicata di tutte, poichè se rimane aria sulle pareti, nel lungo riscaldamento successivo essa reagisce con l'uranio, ed una parte di questo viene ossidato ed azoturato, facendo variare la composizione dell'arseniuro in maniera imprevedibile. Nelle prime prove si è potuto valutare che con una sgassatura incompleta vengono trasformati in ossido e azoturo quantità di 30-40 mgr. di U, il che varia nettamente la composizione del prodotto finale, se l'U totale è, come di solito, di 0,2-0,3 gr. per preparazione.

Una volta effettuato, con le precauzioni accennante, il riempimento dei tubetti contenenti le varie composizioni; ogni campione veniva lentamente riscaldato, in modo da fare avvenire lentamente la reazione (1-2 giorni e poi la temperatura era aumentata fino ad 800° - 900° , e mantenuta a questo valore per 24-30 ore, raffreddando poi lentamente a 300° - 400° . In qualche caso sono state fatte delle tempere, che non hanno portato però a fasi diverse da quelle stabilite sui campioni normali.

I prodotti ottenuti hanno l'aspetto di polveri grigio scure, sono perfettamente stabili all'aria e poco attaccabili dagli acidi diluiti, specialmente quelli ricchi di As, mentre reagiscono tutti quanti con l'acido nitrico concentrato.

TABELLA I.

Fotogramma delle polveri (asimmetrico) di UAs. Radiazione $K_{\alpha}Cu$

d, n non corretta	Indici	a_0	Intensità	
			calcolata	osservata
3,286	111	5,691	6,2	md
2,851	200	5,702	15,7	mt
2,023	202	5,721	25,1	f
1,727	113	5,728	11,6	m
1,655	222	5,733	12,8	m
1,436	400	5,744	8,2	md
1,317	331	5,741	8,9	md
1,285	420	5,746	28,6	f-ff
1,172	422	5,742	25,8	f
1,107	511+333	5,752	10,0	md
1,018	440	5,759	12,9	m
0,973	531	5,759	16,6	mf
0,960	600+442	5,761	37,2	ff
0,911	620	5,765	35,4	ff
0,879	533	5,766	12,4	m
0,869	622	5,764	43,9	ff
0,832	444	5,764	20,6	mf
0,807	711+551	5,765	51,3	ff
0,799	640	5,765	99,3	fff
per $\theta = 90^\circ$		5,766		
$a_0 = 5,766 \text{ \AA}$				

L'esame röntgenografico dei campioni ha dimostrato l'esistenza delle fasi: UAs , U_3As_4 , UAs_2 . Altri composti non sembrano capaci di formarsi nelle condizioni di preparazione descritte; ed i tre precedenti hanno una composizione definita, senza possibilità di formare soluzioni solide con i costituenti (non si ha mai nessuno spostamento nella posizione delle righe Debye). I due composti UAs ed U_3As_4 appaiono stabili fino ad alta temperatura, mentre UAs_2 si decompone intorno a 900° in $U_3As_4 + As$; ed è neces-

sario perciò tenere una temperatura più bassa nella sua preparazione. È stato esaminato in particolare se potesse esistere a temperatura inferiore un composto più ricco di As di UAs_2 , e a tale scopo è stato riscaldato per vari giorni a 550° un miscuglio di $U + As$ con la composizione UAs_3 . Una parte dell'As non si combina, e si condensa sulla parte più fredda del tubetto, lasciando un residuo corrispondente alla composizione $UAs_{2,06}$, che fornisce un fotogramma identico ad UAs_2 . Nelle condizioni di preparazione non si può quindi ottenere una fase più ricca di As di UAs_2 .

TABELLA II.

Fotogramma delle polveri (asimmetrico) di $U_3As_4-K_aCu$

d/n non corretta	Indici	a_0	d/n non corretto	Indici	a_0
3,428	211	8,395	1,061	800	8,488
2,659	310	8,408	1,015	653	8,492
2,249	321	8,416	1,000	822	8,487
1,889	421	8,448	0,987	831	8,489
1,805	332	8,455	0,9620	752	8,495
1,727	422	8,461	0,9496	840	8,493
1,660	510	8,464	0,9265	842	8,492
1,547	521	8,473	0,9161	921	8,496
1,374	611	8,469	0,8959	930	8,499
1,340	620	8,475	0,8769	932	8,502
1,308	541	8,477	0,8676	844	8,501
1,250	631	8,478	0,8417	772	8,501
1,224	444	8,480	0,8337	10.2.0	8,504
1,199	710	8,478	0,8258	950	8,506
1,176	640	8,480	0,8109	10.3.1	8,506
1,155	721	8,485	0,7899	10.4.0	8,507
1,133	642	8,478	0,7832	10.3.3	8,506
1,113	730	8,476	0,7768	10.4.2	8,506
1,078	732	8,488	per $\theta = 90^\circ$		8,507

$$a_0 = 8,507 \text{ \AA}$$

TABELLA III.

Intensità calcolate ed osservate per U_3As_4

Indici	Intensità		Indici	Intensità		Indici	Intensità		Indici	Intensità	
	calco- lata	osser- vata		calco- lata	osser- vata		calco- lata	osser- vata		calco- lata	osser- vata
110	0,00	—	620	4,33	d	822	2,37	dd	10.00	0,00	—
200	0,00	—	541	10,00	mf	660			860		
211	15,83	mf	622	0,00	—	831	25,41	f-ff	10.11	19,32	f
220	2,07	—	631	3,87	d	750			772		
310	18,67	f	444	5,26	md	743			10.20		
222	0,00	—	710	1,12	dd	662	0,00	—	862	3,73	d-dd
321	22,14	f	550			752	6,11	md	950		
400	0,14	—	543			840	2,49	dd	943	21,10	f
411	0,00	—	640	5,80	md	910	0,40	—	10.22		
330			721	17,15	f	833			666	0,00	—
420	13,22	mf	633			842	12,75	mf	10.31		
332	8,70	m	552			921	27,94	f-ff	952	13,20	mf
422	3,76	d	642	4,51	md	761			765		
510	9,54	m-mf	730	1,10	dd	655			871		
431			732	3,57	d	664	0,25	—	855	1,72	—
521	4,48	d	651			930	19,95	f	774		
440	0,69	—	800	1,86	dd	851			10.40	60,81	fff
530	0,76	—	811	0,71	—	754			864		
433			741			932	8,12	m	10.33		
600	0,00	—	554	0,00	—	763			961	39,95	ff
442			820			844	6,51	md	10.42		
611	20,43	f	644	4,77	md	914	2,28	—	21,67	f	
532			653			853					
						770					

I tre arseniuri hanno formule identiche a quelle trovate nello studio del sistema U-P da Heimbrecht, Zumbusch e Biltz ⁽³⁾, e, come in quel caso,

(3) M. HEIMBRECHT, M. ZUMBUSCH, W. BILTZ, «Z. anorg. allg. Chemie», 245, 391 (1941).

corri pondono alle valenze normali: 3, 4, 6 dell'uranio. Per i tre composti è stato possibile determinare completamente la struttura cristallina, che ha presentato qualche difficoltà solo per l'ultimo arseniuro UAs_2 .

Il monoarseniuro fornisce buoni fotogrammi delle polveri, con righe identificabili con quelle di un reticolo cubico a facce centrate, e con la costante reticolare di $5,766 \text{ \AA}$. La previsione che si tratti di una struttura tipo NaCl , è perfettamente confermata dal calcolo delle intensità, riportato nella tabella I.

I fotogrammi delle polveri dell'arseniuro U_3As_4 contengono un numero assai maggiore di righe; che possono però anche in questo caso essere identificate con quelle di un reticolo cubico, con costante reticolare di $8,507 \text{ \AA}$, come risulta dalla tabella II. L'assenza di riflessioni su piani con somma di indici dispari indica una cella centrata; e questo ed il valore della costante ha portato a ritenere come probabile una struttura tipo Th_3P_4 ⁽⁴⁾, alla quale appartiene anche il fosfuro U_3P_4 ⁽⁵⁾. I due ultimi composti hanno la simmetria del gruppo spaziale T_d^6 e contengono nella cella elementare 12 atomi del metallo e 16 del metalloide nelle posizioni (a) e (c) delle tabelle internazionali ⁽⁶⁾. Ammesso lo stesso tipo di reticolo per U_3As_4 , bisogna determinare il valore del parametro x , dal quale dipendono le coordinate del metalloide. Questo è stato fatto calcolando l'intensità delle righe: 602, 541, 730, 800, 640, 631, 710 + 543, per 15 valori di x , da $x = 1/60$ ad $x = 1/4$. Si trova una buona concordanza con le intensità sperimentali per $x = 1/12$, valore che coincide con quelli di Th_3P_4 e U_3P_4 , e che d'altra parte permette che la coordinazione intorno ad ogni U e As sia la massima possibile. Con questo valore sono state calcolate le intensità riportate nella tabella III, che sono in ottimo accordo con quelle osservate.

In conclusione, U_3As_4 ha il reticolo tipo Th_3P_4 , con le coordinate delle due specie atomiche:

$$12 \text{ U in: } \left(000; \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{8} 0 \frac{1}{4}; \frac{1}{4} \frac{3}{8} 0; 0 \frac{1}{4} \frac{3}{8}; \frac{1}{8} 0 \frac{3}{4}; \frac{3}{4} \frac{1}{8} 0; 0 \frac{3}{4} \frac{1}{8}\right)$$

$$16 \text{ As in: } \left(000; \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}\right) + \left(x x x; \frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} - x, \bar{x}; \bar{x}, \frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} - x;$$

$$\frac{1}{2} - x, \bar{x}, \frac{1}{2} + x; \frac{1}{4} + x, \frac{1}{4} + x, \frac{1}{4} + x; \frac{3}{4} + x, \frac{1}{4} - x, \frac{3}{4} - x; \frac{3}{4} - x,$$

$$\frac{3}{4} + x, \frac{1}{4} - x; \frac{1}{4} - x, \frac{3}{4} - x, \frac{3}{4} + x)$$

$$\text{con } x = \frac{1}{12}.$$

La struttura di UAs_2 verrà descritta in un Nota successiva.

(4) K. MEISEL e M. ZUMBUSCH, «Z. anorg. allgem. Chem.», 245, 402 (1941).

(5) M. ZUMBUSCH e K. MEISEL, «Z. anorg. allgem. Chem.», 240, 300 (1939).

(6) *Internationale Tabellen zur Bestimmung von Kristallstrukturen*, Gebrüder Borntraeger Berlin 1935.

Chimica. — *Sugli arseniuri di Uranio*^(*). — II. *La struttura cristallina di UAs_2 ed UP_2* . Nota II di ALDO IANDELLI, presentata^(**) dal Socio L. ROLLA.

Nella prima Nota sullo stesso argomento⁽¹⁾ sono stati riferiti i risultati ottenuti nello studio röntgenografico del sistema U-As; che hanno dimostrato l'esistenza di tre composti: UAs ; U_3As_4 ; ed UAs_2 .

I primi due arseniuri hanno un reticolo cubico, del quale è stata descritta la struttura, e sono isomorfi con i fosfuri corrispondenti. Per UAs_2 i fotogrammi delle polveri erano ricchissimi di righe, sicchè la possibilità di arrivare alla determinazione della struttura appariva piuttosto remota. Per fortuna, in una delle preparazioni di questo arseniuro, si sono formati, insieme alla massa principale in forma di polvere, pochi cristallini di qualche decimo di millimetro di grandezza. I più piccoli di essi sono stati utilizzati per un fotogramma Debye, che ha mostrato la loro identità con la fase UAs_2 , mentre quello di dimensioni maggiori, costituito in buona parte da un cristallo unico, è stato esaminato al goniometro. Le misure goniometriche hanno permesso di accertare l'esistenza di un asse quaternario, e di determinare il rapporto c/a a circa 1 o multipli di 1. Fotogrammi di Laue e del cristallo rotante sullo stesso campione hanno fornito risultati poco soddisfacenti per la presenza di vari altri cristallini, orientati diversamente da quello principale. Un fotogramma oscillante, eseguito intorno ad uno spigolo normale all'asse quaternario ha permesso tuttavia di ottenere per a_0 un valore fra 3,91 e 3,98 Å.

Questi risultati sono però sufficienti per determinare completamente i valori esatti dei parametri con i fotogrammi delle polveri. Tutte le righe possono essere infatti interpretate, come si vede dalla tabella I, come dovute ad un reticolo tetragonale con $a_0 = 3,954$, $c = 8,116$, $c/a = 2,053$. Dalla densità (9,8) si calcola un numero di molecole per cella elementare di $1,95 \cong 2$ molecole di UAs_2 .

Poichè per la determinazione della struttura sarebbe stata utile una fase isomorfa, ma con una specie atomica diversa, ho esaminato anche il composto UP_2 , esistente nel sistema U-P⁽²⁾, ma del quale la struttura non era conosciuta. Esso è stato preparato per riscaldamento di $\text{U} + \text{P}$ a 550° per 2 giorni, ed ha fornito un fotogramma delle polveri perfettamente simile a quello di UAs_2 . La misura delle righe dà i risultati della tabella II, dalla quale si ricavano per la cella tetragonale di UP_2 le dimensioni $a_0 = 3,800$, $c = 7,762$, $c/a = 2,043$. I due composti sono quindi isomorfi, con dei valori molto vicini delle costanti della cella.

(*) Lavoro eseguito col sussidio del C. N. R.

(**) Nella seduta del 14 giugno 1952.

(1) A. IANDELLI, questo fascicolo pp. 138-143.

(2) M. HEIMBRECHT, M. ZUMBUSCH, W. BILTZ, «Z. anorg. allg. Chemie», 245, 391 (1941).

TABELLA I.

 UAs_2 - *Fotogramma delle polveri* - $K_{\alpha} Cu$.

Indici	sen ² θ		Indici	sen ² θ		Indici	sen ² θ	
	osservato	calcolato		osservato	calcolato		osservato	calcolato
002	0,0360	0,0360	311	0,3870	0,3877	316	0,7020	0,7023
101	0,0469	0,0469	116	0,3990	0,3993	325	0,7183	0,7174
110	0,0757	0,0757	215	0,4149	0,4144	332		
003	0,0809	0,0809	312			413	0,7246	0,7247
111	0,0847	0,0847	303	0,4222	0,4218	227	0,7432	0,7434
112	0,1117	0,1117	224	0,4470	0,4468	420	0,7577	0,7575
103	0,1188	0,1188	313	0,4598	0,4596	218	0,7631	0,7630
200	0,1514	0,1515	304	0,4852	0,4847	414	0,7854	0,7860
113	0,1565	0,1566	321	0,5017	0,5013	422	0,7921	0,7916
104	0,1816	0,1817	216	0,5129	0,5129	119	0,8023	0,8021
202	0,1876	0,1874	305	0,5659	0,5656	326	0,8144	0,8142
211	0,1983	0,1984	323	0,5736	0,5732	423	0,8375	0,8366
203	0,2325	0,2324	207	0,5915	0,5920	415	0,8672	0,8667
105	0,2627	0,2626	315	0,6045	0,6047	228	0,8778	0,8770
213	0,2701	0,2703	400			209		
204	0,2953	0,2953	108	0,6138	0,6140	424	0,8993	0,8994
115	0,3006	0,3007	401			335	0,9047	0,9045
220			324	0,6344	0,6362	308	0,9149	0,9148
214	0,3330	0,3332	402	0,6425	0,6419	219		
222	0,3391	0,3389	118	0,6533	0,6521	1.0.10	0,9348	0,9346
301	0,3497	0,3499	411			318		
106	0,3611	0,3614	306	0,6637	0,6644	431	0,9539	0,9538
310	0,3786	0,3787	403	0,6867	0,6869	501		
223	0,3837	0,3839	331	0,6906	0,6907	416	0,9656	0,9554

$$Q = \frac{4 \text{ sen}^2 \theta}{\lambda^2} = \frac{1}{a^2} (h^2 + k^2) + \frac{1}{c^2} l^2 = 0,063974 (h^2 + k^2) + 0,015181 \cdot l^2$$

$$a = 3,954 \text{ \AA} \quad ; \quad c = 8,116 \text{ \AA} \quad ; \quad c/a = 2,053$$

TABELLA II.

UP₂ - *Fotogramma delle polveri* - K₂Cu.

Indici	sen ² θ		Indici	sen ² θ		Indici	sen ² θ	
	osservato	calcolato		osservato	calcolato		osservato	calcolato
002	0,0393	0,0393	301	0,3784	0,3789	108	0,6690	0,6700
101	0,0508	0,0508	106	0,3949	0,3948	324	0,6909	0,6903
102	ddd?	0,0803	302	0,4098	0,4099	402	0,6946	0,6954
110	0,0817	0,0820	205			411	0,7071	0,7069
003	0,0885	0,0884	310			306	0,7227	0,7229
111	0,0919	0,0918	223	0,4161	0,4165	330	0,7381	0,7381
112	0,1211	0,1213	311	0,4199	0,4199	403	0,7449	0,7446
103	0,1288	0,1295	116	0,4363	0,4358	316	0,7631	0,7639
004	0,1571	0,1573	312	0,4497	0,4495	332	0,7782	0,7781
200	0,1637	0,1640	215			325		
113	0,1709	0,1705	303	0,4560	0,4575	413	0,7834	0,7839
104	0,1981	0,1983	224	0,4850	0,4853	227	0,8078	0,8079
202	0,2037	0,2033	313	0,4988	0,4985	404	0,8107	0,8117
211	0,2154	0,2149	304	0,5265	0,5263	420	0,8182	0,8184
114	0,2393	0,2393	321	0,5433	0,5429	421	0,8291	0,8282
212	0,2449	0,2450	216	0,5592	0,5588	414	0,8527	0,8526
005			117	dd?	0,5636	422	0,8567	0,8576
203	0,2520	0,2525	314	0,5669	0,5673	119	0,8761	0,8763
105	0,2868	0,2867	322	0,5725	0,5730	326	0,8846	0,8850
213	0,2934	0,2935	225			317	0,8892	0,8898
204	0,3213	0,3213	305	0,6157	0,6148	405	0,8994	0,8999
115	0,3281	0,3279	323	0,6219	0,6215	423	0,9065	0,9067
220			207	0,6461	0,6456	415	0,9402	0,9408
214	0,3625	0,3623	315	0,6565	0,6559	209	0,9579	0,9581
222	0,3677	0,3674	400			424	0,9747	0,9753

$$Q = \frac{4 \sin^2 \theta}{\lambda^2} = \frac{1}{a^2} (h^2 + k^2) + \frac{1}{c^2} \cdot l^2 = 0,069252 (h^2 + k^2) + 0,016598 \cdot l^2$$

$$a = 3,800 \text{ \AA} \quad ; \quad c = 7,762 \text{ \AA} \quad ; \quad c/a = 2,043.$$

La mancanza di fotogrammi su cristalli unici dei due composti, e la difficoltà di riconoscere da quelli delle polveri le estinzioni sistematiche, rendono in questo caso assai laboriosa l'assegnazione delle posizioni atomiche nella cella elementare. Mantenendo un asse quaternario, le classi possibili sono le C_{4v} , D_4 e D_{4h} , e per l'assenza di estinzioni sistematiche, i gruppi spaziali possibili sono C_{4v}^1 , D_4^1 , D_{4h}^1 .

Dalle Tabelle internazionali ⁽³⁾ si ricava che le posizioni più generali sono quelle del gruppo C_4^1 : (a), (b), (c), (d), (e), (f), ed in queste possono essere collocati in 48 maniere diverse i due atomi di U ed i 4 di P (o As). La discussione completa delle varie possibilità, che non è il caso di riportare, permette di eliminare per ragioni dimensionali un buon numero delle disposizioni possibili, e di ridurle a 10; che possono essere ulteriormente diminuite dalla considerazione delle intensità delle righe corrispondenti di UP_2 ed UAs_2 . Così dal primo composto si possono ricavare le posizioni dei due atomi di U, dato che il P ha un fattore atomico quasi trascurabile rispetto all'U. Ponendo un atomo di U in 000 , il secondo può trovarsi in $00z$ o in $\frac{1}{2} \frac{1}{2} z$.

Poichè sui fotogrammi di UP_2 , le righe più intense, fino alla (422) hanno una somma degli indici pari, questo sta ad indicare una cella quasi centrata per U, e quindi il secondo atomo di U deve trovarsi in $\frac{1}{2} \frac{1}{2} z$ e non in $00z$. L'esame dettagliato dei vari casi possibili, eseguito in modo analogo, permette di arrivare a stabilire come disposizione finale la seguente:

$$2 \text{ U in: } 000, \frac{1}{2} \frac{1}{2} z$$

$$4 \text{ P (As) in: } \frac{1}{2} 0 w, 0 \frac{1}{2} w, \frac{1}{2} \frac{1}{2} v, 00 u$$

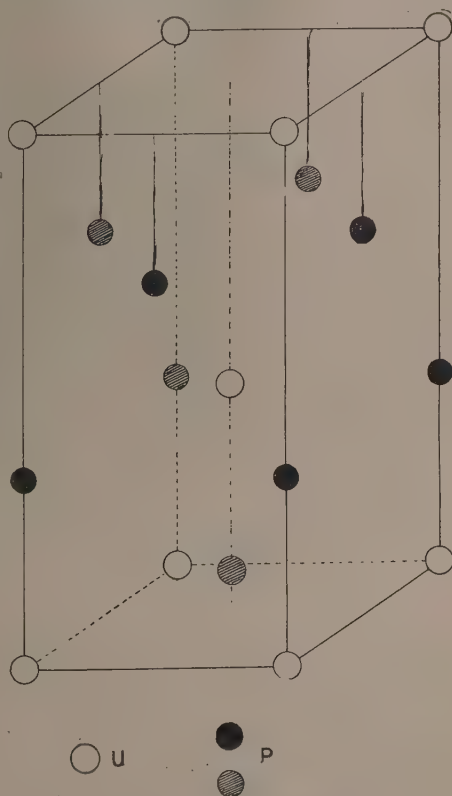


Fig. 1. - Cella elementare di UP_2 (UAs_2).

⁽³⁾ *Internationale Tabellen zur Bestimmung von Kristallstrukturen*, Gebrüder Borntraeger, Berlin 1935.

con 4 paramenti indeterminati, per i quali può essere posta una limitazione; considerando che le due specie atomiche, almeno in UP_2 , devono essere parzialmente ionizzate, e quindi non si devono avere addensamenti di atomi uguali. Fra gli strati formati dagli atomi di U in $ooo \frac{1}{2} \frac{1}{2} z$ si deve cercare di inserire numeri uguali di atomi di P (o As). La disposizione risultante è rappresentata dalla figura 1. Inoltre si può cercare, in prima approssimazione, di trovare i valori dei parametri con la condizione che le distanze fra ogni U ed i P vicini siano tutte uguali. Perchè questo avvenga deve essere:

$$\text{per } UP_2 : z = 0,4671 ; w = 0,7335 ; u = 0,3618 ; v = 0,1053$$

$$\text{per } UAs_2 : z = 0,4679 ; w = 0,7339 ; u = 0,3607 ; v = 0,1072.$$

Il calcolo delle intensità delle riflessioni, eseguito con questi valori dei parametri, è riportato nella tabella III per UP_2 (colonna I), e, per quanto l'andamento non sia molto diverso da quello sperimentale, non si ha certo un accordo perfetto. Per UAs_2 esso risulta ancora peggiore. L'ipotesi che in un reticolo si debbano avere distanze uguali fra un atomo e quelli circostanti di specie diversa, che viene spesso introdotta per strutture complicate, non vale quindi in questo caso; e non coincide del resto (almeno qui) con l'altra che sarebbe più logica, che le forze agenti su un atomo di U da parte degli atomi di P (o As) si debbano fare equilibrio. È facile verificare questo, rappresentando le forze agenti su un U come vettori di grandezza uguale e cercandone la risultante. Si trova facilmente che perchè l'atomo di U in $\frac{1}{2} \frac{1}{2} z$ sia in equilibrio, è necessario che il parametro z sia inferiore al valore indicato precedentemente, in modo che esso deve trovarsi più vicino ai due atomi di P (o As) in $\frac{1}{2} \frac{1}{2} u$ e $oo v$, che agli altri due. Il calcolo delle intensità è stato allora rifatto per i valori di z di 0,453, 0,439 e 0,425; prendendo per gli altri parametri valori che diano separatamente per ogni P (o As) uguaglianza di distanze dai due atomi di U della cella. Il valore di z che fornisce il migliore accordo con le intensità osservate è di 0,440, tanto per UP_2 che per UAs_2 ; come si può rilevare dalle tabelle III (col. II) e IV. I valori finali dei parametri sono:

$$\text{per } UP_2 : z = 0,440 ; w = 0,720 ; u = 0,356 ; v = 0,084$$

$$\text{per } UAs_2 : z = 0,440 ; w = 0,720 ; u = 0,355 ; v = 0,085$$

e ne risulta così il tipo di struttura C 38 dello Struktur bericht, con simmetria D_{4h} . I due atomi di U sono equivalenti fra loro come coordinazione ed hanno vicino 9 atomi di specie diversa, mentre ogni P (o As) è circondato da altri 8 della stessa specie, 4 disposti tetraedricamente a distanze uguali, e 4 nello stesso piano a distanze minori.

L'analogia più stretta si ha fra il comportamento del P e quello dell'As nei confronti dell'U, come si rileva dalla tabella V, nella quale sono riportati per UP ed U_3P_4 i valori di Zumbusch (4).

(4) M. ZUMBUSCH, «Z. anorg. allg. Chemie», 245, 402 (1941).

TABELLA III.

Intensità calcolate ed osservate per UP₂

Indici	Intensità			Indici	Intensità			Indici	Intensità		
	calcolate		osservata		calcolate		osservata		calcolate		osservata
	I	II			I	II			I	II	
001	0,03	0,19	—	302	6,89	9,40	m	411	19,16	14,44	m-m
002	5,70	5,24	d	205				118			
100	0,00	0,00	—	310	2,29	4,79	d	306	6,17	11,70	m
101	21,00	20,53	f	223				412			
102	0,04	1,09	ddd	311	1,90	2,82	dd	330	5,39	5,39	d
110	11,31	11,32	m	116				403			
003	1,79	3,75	d	312	29,98	22,82	f	331	1,60	2,38	—
111	2,87	4,32	d	215				316			
112	26,00	24,52	f	303	7,45	5,69	d	332	39,20	27,01	f-ff
103	17,34	13,24	m	007				325			
004	2,16	1,35	ddd	224	5,55	3,48	d-dd	413	28,48	21,75	f
200	9,24	9,24	md	313				208			
113	0,58	2,67	d	206	2,79	0,23	—	009	1,75	2,42	—
201	0,03	0,15	—	107				227			
104	1,25	3,57	d	304	1,02	2,93	dd	404	6,11	7,67	d
202	5,67	2,21	md	320				420			
210	0,00	0,00	—	321	10,69	10,42	m	333	1,04	4,83	—
211	12,66	12,37	mf-m	216				421			
114	2,56	1,17	dd	117	0,96	3,13	dd	218	21,38	39,53	ff
212	0,06	1,33	dd	314				109			
005				322	0,19	3,14	dd	307	7,09	0,51	—
203	2,81	5,77	d	225				414			
105	7,90	4,15	d	305	7,59	4,00	dd	422	23,85	21,89	f
213	16,33	13,48	m	323				119			
204	6,36	4,01	d	008	2,31	0,24	—	326	22,69	47,48	ff
115	8,58	12,24	m	207				317			
220				315	12,61	21,33	f	334	7,76	3,55	—
221	0,01	0,13	—	400				405			
006	0,73	0,06	—	401	4,94	10,57	m	423	19,33	40,65	ff
214	2,03	5,81	d	108				415			
222	4,63	4,26	d	226	3,77	0,28	—	228	—	4,69	—
300	0,00	0,00	—	217				209			
301	5,00	4,89	d	324	2,85	7,90	md	424	—	56,32	fff
106	3,58	7,51	md	402							
				410	6,49	5,95	md				

TABELLA IV.

Intensità calcolate ed osservate per UAs₂

Indici	Intensità		Indici	Intensità		Indici	Intensità		Indici	Intensità	
	calco- late	osser- vate		calco- lata	osser- vata		calco- lata	osser- vata		calco- lata	osser- vata
001	0,05	—	214	3,11	d	008	0,43	—	218		
002	3,52	d	222	1,55	dd	207	3,66	d	421	16,20	mf f
100	0,00	—	300	0,00	—	315	13,25	m-mf	109		
101	19,97	f	301	2,63	d	400			307	0,06	—
102	0,01	—	106	6,25	md	108	5,27	md-d	414	4,26	d
110	9,34	md	205	0,34	—	401			422	4,45	d
003	6,30	md-d	302			226	0,03	—	119	12,60	m-mf
111	8,67	md	310	3,91	d	217	0,12	—	326	19,47	f
112	19,82	f	223	5,48	md-d	234	2,82	dd	317	0,86	—
103	11,30	m	311	4,71	md-d	402	1,47	dd	334	0,00	—
004	1,22	—	116	1,51	ddd	410	0,00	—	405	0,58	—
200	12,72	m-mf	215	19,12	f	118	5,24	md	423	20,66	f
113	2,04	dd	312			411			415	14,56	m-mf
201	0,04	—	303	3,96	d	306	6,39	md	228	9,19	md
104	2,72	dd	007	0,87	—	412	0,00	—	209		
202	3,04	d	224	1,91	d	330	2,12	—	424	11,60	m
210	0,00	—	313	1,68	d	403	6,18	md	0.0.10		
211	7,76	md	206	0,02	—	331	2,78	d	335	10,93	m
114	0,00	—	107	0,04	—	316	3,63	d	308	21,49	f
005			304	1,31	d	325	15,76	mf-f	219		
212	0,13	—	320	0,00	—	332			406	0,08	—
203	7,77	md	321	4,58	md-d	413	11,72	m-mf	327	0,30	—
105	4,19	d	216	10,84	m	208	2,93	—	1.0.10	5,75	d
213	11,05	m	117	0,27	—	009			500	0,00	—
204	2,50	dd	314	0,00	—	227	4,99	d	430		
115	11,47	m	225	0,32	—	404	2,77	—	318		
220			322			420	15,51	mf	431	29,48	ff
221	0,02	—	305	2,87	d	333	1,19	—	501		
006	0,01	—	323	7,85	md				416	57,91	fff

TABELLA V.

Costanti reticolari dei fosfuri ed arseniuri dell'Uranio.

Composto	UX	U ₃ X ₄	UX ₂
X = P	$a_0 = 5,589$	$a_0 = 8,197$	$a_0 = 3,800$; $c/a = 2,042$
X = As	$a_0 = 5,766$	$a_0 = 8,507$	$a_0 = 3,954$; $c/a = 2,053$

Le terre rare formano col P e As composti 1:1, tipo NaCl, e non si conosce finora nessun derivato con un numero maggiore di atomi del metalloide. La somiglianza fra U e terre rare si limita quindi in questo caso al primo composto, ciò che è legato verosimilmente al carattere notevolmente ionico dei fosfuri e degli arseniuri.

Chimica inorganica. — *Sulle leghe dell'Uranio coll'Antimonio*^(*).

Nota II di RICCARDO FERRO, presentata ^(**) dal Socio L. ROLLA.

Nella Nota I ⁽¹⁾ ho descritto la preparazione delle leghe dell'Uranio coll'Antimonio e la struttura dei composti USb (33,84 % Sb) cubico tipo NaCl con $a_0 = 6,191 \text{ \AA}$ ed U₃Sb₄ (40,55 % Sb) cubico tipo Th₃P₄ con $a_0 = 9,095 \text{ \AA}$.

Il composto successivo di cui ho potuto determinare la struttura corrisponde alla formula USb₂ con un contenuto di 50,57 % di Sb. Su campioni di questo composto sono stati fatti fotogrammi delle polveri che mostrano la sua appartenenza ad un sistema a simmetria più bassa che il cubico. Per la loro interpretazione sono perciò necessari valori più esatti possibili delle d/n corrispondenti alle varie riflessioni: è stato possibile ottenerli facendo fotogrammi Debye di USb₂ contenuto in finissimi capillari volta a volta con la radiazione K del Cu e la K del Fe ed estrapolando a 90° i valori così ottenuti per le stesse d nei diversi angoli di diffrazione relativi alla K _{α_1} , K _{α_2} , K β del Cu e K _{α_1} , K _{α_2} del Fe, angoli che a loro volta sono stati valutati il più accuratamente possibile cercando di eliminare parte degli errori sistematici con il metodo di Straumanis.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale dell'Università di Genova con il contributo finanziario del C. N. R.

(**) Nella seduta del 14 giugno 1952.

(1) Questi « Rendiconti », vol. XIII, ser. 8^a, fasc. 1-2, pp. 53-61 (1952).

TABELLA I.

USb₂ fotogramma delle polveri, radiazione K_α Cu.

<i>hkl</i>	sen ² θ oss.	sen ² θ calc.	<i>hkl</i>	sen ² θ oss.	sen ² θ calc.
003	0,0699	0,0699	316	0,6040	0,6040
111	0,0726	0,0727	332		0,6151
112	0,0960	0,0960	325	0,6155	0,6159
103	0,1023	0,1023	413	0,6212	0,6215
004	0,1241	0,1243	208	0,6270	0,6268
200	0,1298	0,1298	227	0,6418	0,6401
113	0,1346	0,1348	404	sfumata	0,6434
104	0,1568	0,1567	420	0,6490	0,6489
202	0,1616	0,1609	218	0,6593	0,6593
211	0,1701	0,1700	109	0,6612	0,6615
203	0,1999	0,1997	414	ddd	0,6758
105	0,2267	0,2266	119	0,6945	0,6940
213	0,2322	0,2321	326	0,7017	0,7014
204	0,2539	0,2540	423	0,7187	0,7188
115		0,2591	415	0,7458	0,7457
220	0,2593	0,2596	228	0,7567	0,7566
214	0,2869	0,2865	424	0,7729	0,7732
106	0,3123	0,3120	335	0,7784	0,7782
310	0,3244	0,3244			
223	0,3293	0,3295	I seguenti: valori per la K _{α1}		
311	0,3308	0,3322	308		0,7874
116	0,3444	0,3445	219	0,7887	0,7896
312		0,3555	501, 431	0,8178	0,8172
215	0,3558	0,3564	416	0,8293	0,8294
303	0,3620	0,3619	510	0,8426	0,8418
224	0,3844	0,3838	511	0,8502	0,8496
313	0,3939	0,3944	336	0,8625	0,8618
321	0,4303	0,4296	512	0,8725	0,8728
216	0,4418	0,4418	503, 433	0,8788	0,8792
305	0,4858	0,4861	407	0,8989	0,8978
323	0,4916	0,4917	2.0.10	ddd	0,9045
207	0,5105	0,5103	513	0,9122	0,9116
315		0,5186	328	0,9168	0,9169
400	0,5191	0,5191	309	0,9207	0,9192
108	0,5300	0,5295	426	ddd	0,9266
324	ddd	0,5461	504, 434	0,9337	0,9334
411	0,5588	0,5593	2.1.10		0,9369
306	0,5725	0,5716	0.0.11	0,9375	0,9378
330	0,5850	0,5840	521	0,9458	0,9467
403		0,5890	319	0,9514	0,9515
331	0,5898	0,5917			

$$\frac{4 \text{ sen}^2 \theta}{\lambda^2} = 0,054797 (h^2 + k^2) + 0,013117 \cdot l^2$$

$$a_0 = 4,272 \text{ \AA}$$

$$c_0 = 8,741 \text{ \AA}$$

$$c/a = 2,044$$

Le d corrette così ottenute possono poi per mezzo di un grafico di Hull essere ordinate con indici del sistema tetragonale. I valori più probabili che se ne ricavano per le costanti sono: $a_0 = 4,272$ e $c_0 = 8,741 \text{ \AA}$ $c/a = 2,044$, come è confermato dalla tabella I relativa ad un fotogramma ottenuto su USb_2 con la K del Cu filtrata.

Dalla densità picnometrica di 10,5 si ricava un numero di molecole per cella di 2,09 mentre la densità X è 10,04 con 2 mol./cella. Data la difficoltà di fare una statistica sicura delle estinzioni sistematiche è stato utile studiare la distribuzione dei 2 U e 4 Sb a partire dal caso più generale di cella tetragonale. Tentativi in questo senso portano a buoni risultati solo, quando si ammetta per i 2 U una distribuzione che corrisponda ad una proiezione sul piano di base centrata ed una distribuzione di Sb abbastanza omogenea intorno a questi. In pratica con una configurazione quale è descritta dalle seguenti coordinate:

$$2 \text{ U} \quad \text{in} \quad 000, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, z$$

$$4 \text{ Sb} \quad \text{in} \quad \frac{1}{2}, 0, w, 0, \frac{1}{2}, w, 00, u, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, v$$

si arriva a buoni risultati ed in ogni caso si giustifica l'intensità delle riflessioni hko . Per la determinazione dei 4 parametri una prima semplificazione si ha nel fatto che per alcune righe ($h + k = \text{numero dispari}$) l'intensità è indipendente da w ; è utile inoltre cercare di semplificare ancora il problema stabilendo qualche dipendenza tra i parametri, in base a considerazioni chimiche. Ammettendo una distribuzione come di strati di U e Sb disposti alternativamente in altezza, si può ricavare i valori dei parametri di ogni Sb in modo che quelli appartenenti ad uno stesso strato siano ugualmente vicini al prossimo U. Le posizioni dell'Sb che soddisfano queste relazioni variano naturalmente al variare di z .

La tabella II dà per alcune righe le intensità calcolate col variare della distanza tra i piani occupati da U e conseguenti variazioni delle posizioni degli Sb. Si ricava la migliore coincidenza tra intensità calcolate ed osservate per una distanza di $0,44 \cdot c_0$. La limitazione dei gradi di libertà delle posizioni dei vari atomi e l'aumento di simmetria ha, d'altra parte, per conseguenza che la cella può essere descritta come appartenente al gruppo D_{4h}^7 con coordinate che, con un conveniente cambiamento di origine, rispetto alle precedenti sono:

$$2 \text{ Sb I} \quad \text{in:} \quad 0, 0, 0 \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0$$

$$2 \text{ Sb II} \quad \text{in:} \quad 0, \frac{1}{2}, x \quad \frac{1}{2}, 0, -x$$

$$2 \text{ U} \quad \text{in:} \quad 0, \frac{1}{2}, y \quad \frac{1}{2}, 0, -y$$

con $x = -0,365$ e $y = 0,280$ entro inevitabili scarti sulla III decimale.

La conferma definitiva dei suddetti valori si ha nella tabella III dal confronto tra intensità calcolate ed osservate. USb_2 risulta così isomorfo con UP_2 ed UAs_2 ⁽²⁾ tipo C 38 dello Strukturbericht.

TABELLA II.

USb_2 valori dei prodotti dei fattori di struttura, frequenza e polarizzazione per alcuni indici in funzione della distanza tra i piani occupati dagli atomi di U con la distribuzione descritta nel testo.

hkl	Distanza in frazioni dal lato c_0				I. oss.
	0,467	0,453	0,439	0,425	
003	5,6	7,1	8,6	10,1	mf
113	0,1	0,6	1,3	2,2	d
203	6,2	7,9	9,5	11,2	mf
105	5,4	4,7	3,8	2,7	md
213	11,4	9,9	8,6	6,7	mf
311	4,6	4,9	5,2	5,5	m
116	3,6	2,2	1,1	0,3	dd

Ogni U risulta coordinato a 9 Sb (otto secondo un antiprisma) i più vicini dei quali si trovano a 3,11 Å ad una distanza cioè dello stesso ordine di grandezza di quella che compare in USb ed U_3Sb_4 .

Nelle condizioni di preparazioni che ho descritte nella Nota I sull'argomento, su composizioni intermedie ai composti visti ho ottenuto fotogrammi contenenti in un caso solo le righe di USb con U_3Sb_4 e nell'altro di quest'ultimo con USb_2 , si può perciò escludere la presenza tra i composti suddetti di altre fasi più stabili. Dalle misure di queste righe si può inoltre escludere la possibilità di formazione di soluzioni solide in quanto i valori delle costanti ottenute nelle diverse miscele per le tre fasi mostrano per ciascuna di esse scarti compresi entro qualche millesimo di Å.

Per i composti USb ed U_3Sb_4 sembrerebbe da escludere, come ho già osservato, anche la possibilità di trasformazioni almeno nell'intervallo di temperatura esplorato in quanto ricotture a diverse temperature o bruschi raffreddamenti non portano a risultati sostanzialmente diversi.

(2) A. IANDELLI, *Sugli arseniuri di Uranio*. Questo fascicolo, pp. 138-151.

TABELLA III.

Usb₂ intensità calcolate ed osservate.

<i>hkl</i>	I calc.	I oss.	<i>hkl</i>	I calc.	I oss.	<i>hkl</i>	I calc.	I oss.
001	0,0	—	107	0,0	—	317	0,0	—
002	2,5	—	304	0,8	—	334	0,4	—
100	0,0	—	320	0,0	—	405	0,0	—
101	10,7	—	321	1,7	dd	423	16,0	mf-f
102	0,7	—	216	11,3	mf	415	7,9	m
110	9,7	—	117	0,0	—	228	4,0	md
003	11,5	mf	314	0,7	—	209	1,0	—
111	21,9	f	322	0,2	—	424	4,0	md
112	27,5	ff	225			0.0.10	0,2	—
103	14,6	mf	305	3,0	dd	335	4,9	md
004	1,3	dd	323	7,0	m	308		
200	20,3	f	008	0,7	—	219	10,4	mf
113	3,2	d	207	2,7	dd	406	0,5	—
201	0,0	—	315			327	0,0	—
104	2,3	dd	400	12,5	mf	1.0.10	1,0	—
202	1,4	dd	401	0,0	—	500+430	0,0	—
210	0,0	—	108	4,2	md	501+431	4,4	md
211	4,3	d	226	0,4	—	318	0,0	—
114	0,9	—	217	0,0	—	416	19,2	f
212	0,3	—	324	1,6	ddd	1.1.10	1,5	—
005			402			502+432	0,4	—
203	13,8	mf	410	0,5	—	425	0,0	—
105	5,5	md	411	1,7	dd	510	4,9	md
213	12,8	mf	118	0,0	—	511	12,7	mf
204	2,4	dd	306	5,4	md	336	0,3	—
115			412	0,2	—	512	27,6	ff
220	15,0	mf	330	2,6	d	503+433	23,3	f-ff
221	0,0	—	403			229	1,7	—
006	0,1	—	311	9,8	m-mf	407	6,5	md
214	2,3	dd	316	3,0	d	2.0.10	2,2	ddd
222	0,8	—	332			513	4,5	md
300	0,0	—	325	12,9	mf	328	24,0	f-ff
301	1,1	—	413	7,2	m	309	3,6	d
106	7,2	m	208	3,2	d	426	2,2	ddd
205			009	0,8	—	417	0,0	—
302	0,0	—	227	2,9	d	504+434	8,0	m
310	3,5	d	404	1,5	dd	2.1.10	4,4	md-d
223	8,4	m	420	12,7	mf	0.0.11	8,4	m
311	8,6	m	333	1,0	—	520	0,0	—
116	1,8	dd	421	0,0	—	521	6,5	md
312			218	9,5	m-mf	319	58,3	fff
215	22,6	f	109	1,3	dd	337	0,2	—
303	4,1	d	307	0,0	—	514	3,4	—
007	0,8	—	414	1,7	ddd	522	0,9	—
224	1,8	dd	422	1,2	—	1.0.11	2,7	—
313	1,9	dd	119	8,2	m			
206	0,3	—	326	12,3	mf			

Per quanto riguarda USb_2 campioni di questo composto sono stati preparati oltre che col metodo già visto, anche per decomposizione di leghe più ricche di Sb (aventi composizione iniziale corrispondente ad USb_3) riscaldandole a 500° sotto vuoto. L'Sb così distillato sulle pareti del tubo di quarzo mantenute a ca. 100° e raccolto conferma con il suo peso entro scarti di pochi % la formula $1:2$. I fotogrammi ottenuti su questi campioni mostrano però righe che pur conducendo agli stessi valori di a_0 e c_0 presentano variazioni nella intensità relativa: in particolare risultano molto innalzate le riflessioni corrispondenti a indici hkl con $l = 3$ oppure 6. Pur sembrando improbabile la presenza su questa composizione o su una molto vicina di una nuova fase avente caratteristiche geometriche identiche alla precedente ho tentato di disporre nella cella gli atomi in vari modi diversi dal precedente cercando di ottenere intensità corrispondenti alle sperimentali; per esempio, disponendoli su piani distanti $1/3$, $1/6$ ecc., si riesce ad ottenere per alcune riflessioni anomale valori buoni ma si hanno forti discordanze per le altre. In conseguenza di ciò, ed anche del fatto che da tutti questi preparati non ho mai ottenuto sistemi di righe fondamentalmente diversi ma sempre quello di USb_2 modificato, potrebbe sorgere la ipotesi che si abbia a che fare con una particolare trasformazione di USb_2 accompagnata forse da una leggera decomposizione che ne lascia inalterato lo scheletro e la forma geometrica. Tenendo conto di questi fatti ed in particolare che intorno a 500° si aveva la decomposizione di eventuali composti esistenti nella zona del diagramma a più alto tenore di Sb ho eseguito lunghi riscaldamenti a ca. 400° a partire da varie miscele nel rapporto di 1 atomo di U fino a 3 Sb: i campioni così ottenuti danno fotogrammi sui quali insieme alle righe di USb_2 ed in qualche caso di Sb elementare si può individuare, in relazione alla presenza di un'altra fase, un altro sistema di righe, che appaiono molto sfumate e di difficile misurabilità in corrispondenza all'aspetto non ben cristallizzato del campione. Risultati analoghi si hanno per lunga ricottura di leghe precedentemente riscaldate a T più alta.

Per concludere, considerando le analogie tra i vari composti degli elementi del V gruppo coll'U, si notano somiglianze abbastanza strette tra fosfuri ⁽³⁾, arseniuri ⁽⁴⁾ ed antimoniuri per ognuno dei quali esistono le formule $1:1$, $3:4$, $1:2$ per composti isomorfi. Nel caso degli azoturi ⁽⁵⁾ e bismuturi ⁽⁶⁾ si hanno differenze più notevoli e sono conosciuti:

UN , U_2N_3 la cui composizione può variare gradualmente fino a quella corrispondente a U_4N_7 ed UN_2 , con strutture conosciute,

UBi e forse: U_4Bi_5 e UBi_2 gli ultimi 2 a struttura incognita.

(3) M. HEIMBRECHT, M. ZUMBUSCH, W. BILTZ, «Z. anorg. Chem.», 245, 391 (1941).

(4) A. IANDELLI, loc. cit.

(5) R. E. RUNDLE, N. C. BAENZIGER, A. S. WILSON, R. A. McDONALD, «J. Am. Chem. Soc.», 70, 99 (1948).

(6) L. BREWER, loc. cit.

L'analogia di comportamento dell'U colle terre rare che in qualche caso è evidente non appare qui molto stretta; di quest'ultime sono conosciuti con N e P ⁽⁷⁾ i composti 1 : 1 tipo NaCl, nel caso delle leghe La-Sb è conosciuto l'isomorfo LaSb ed è attualmente in corso a Goettingen lo studio sistematico del diagramma La-Sb nel corso del quale è stata dimostrata l'esistenza di LaSb₂ ⁽⁸⁾. Ho preparato questa sostanza con la tecnica precedentemente descritta con lungo riscaldamento ad alta T e dal fotogramma delle polveri ho ottenuto un sistema di righe diverso da quello di LaSb ma anche diverso da quelli ottenuti con le leghe U-Sb ad alto tenore di Sb. D'altra parte nel caso delle terre rare il composto che appare più facilmente è senza dubbio quello 1 : 1 in relazione alla grande energia con cui si forma già a 300°-400° anche a partire da composizioni più ricche in Sb come ho visto tentando di preparare in questo modo La₃Sb₄ e Ce₃Sb₄. Nel caso dei composti tra U ed Sb la fase USb è invece di preparazione meno semplice e necessita lunghe ricotture ad alta temperatura mentre le fasi più ricche in Sb si ottengono più rapidamente e facilmente anche a bassa T.

Riassumendo sembra si possa perciò dire che mentre nei composti intermetallici ci sono notevoli somiglianze tra terra rara ed uranio, in quelli coi metalloidi o semimetalloidi pei quali assumono importanza maggiore le valenze normali del metallo, c'è una somiglianza minore sia come composti che si possono ottenere che, forse, come loro relativa stabilità e perciò nel caso della terra rara è favorita la forma corrispondente alla trivalenza (e questo sembra valere anche per il cerio) mentre per l'U anche quelle a valenza più alta. Sembra però accettabile, almeno come ipotesi di lavoro, che, ove esistano forme analoghe di combinazione e si possa, più o meno facilmente, preparare per l'uno e per gli altri dei detti metalli i diversi composti possibili, e si sia cioè riusciti, per così dire, a bloccare l'elemento in una data forma si ritrovino più frequenti nei limiti visti, queste analogie, se non altro dal punto di vista della struttura e della concatenazione degli atomi. Saranno perciò utili ulteriori ricerche sperimentali sull'argomento.

(7) A. IANDELLI, questi « Rendiconti », 26, 233 (1937).

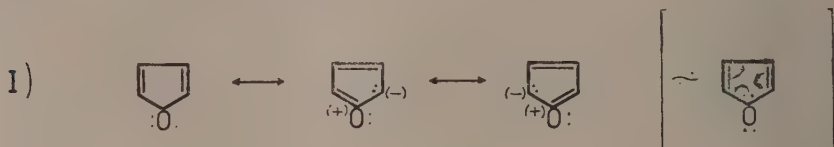
(8) R. VOGEL, gentile comunicazione diretta all'Istituto di Chimica generale dell'Università di Genova.

Chimica. — *Spettri U. V. di alcuni derivati furil-etilenici* (*).

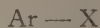
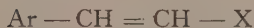
Nota di RENATO ANDRISANO e ANTONIO TUNDO, presentata (**) dal Socio G. B. BONINO.

I risultati conseguiti in alcune precedenti ricerche, nostre [1] e di uno di noi (Andrisano) [2], sulle caratteristiche spettroscopiche U.V. nella serie furanica, permettono di desumere che l'anello furanico è più facilmente coniugabile di quello benzenico, e che quindi gli effetti di coniugazione nei derivati furanici sono più accentuati di quelli osservati nei corrispondenti termini benzenici.

Una tale situazione è da attribuire al fatto che il nucleo furanico è da ritenersi come un termine intermedio fra i composti a carattere aromatico e quelli a carattere dienico, e ciò è facilmente comprensibile quando si consideri la risonanza del sistema furanico (schema 1). La minore aromaticità del furano rispetto al benzolo, era stata del resto già osservata da Bonino nel 1934 [3], ed è in accordo colla minore energia di risonanza rispetto al benzolo [4] e col maggiore % di carattere di doppio legame dei legami C-C (furano, C_2C_3 : 86 %; benzolo: 50 %) [5].

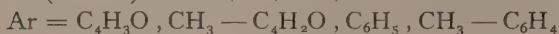


Sulla base di tali considerazioni abbiamo studiato le proprietà spettroscopiche dei derivati furil-etilenici-II di confronto con gli analoghi fenilici. Inoltre, per conoscere l'influenza esercitata dal risonatore $-CH=CH-$ abbiamo anche studiato i composti-III, i cui termini furilici sono stati già caratterizzati nelle loro proprietà spettroscopiche da uno di noi (Andrisano) [6].



II (1...20)

III (21...36)



I risultati sperimentali sono raccolti nella tabella I; nella tabella II riportiamo inoltre i valori corrispondenti ai composti Ar — X (III) onde procedere al diretto confronto con i viniloghi-II [7].

(*) Lavoro eseguito negli Istituti di Chimica Farmaceutica e di Chimica Industriale delle Università di Catania e Bologna, col contributo del C.N.R.

(**) Nella seduta del 14 giugno 1952.

TABELLA I.

Caratteristiche spettroscopiche U.V. dei composti Ar—CH=CH—X (form. II).

Ar =		C ₄ H ₃ O—		CH ₃ C ₄ H ₂ O—			C ₆ H ₅ —			CH ₃ —C ₆ H ₄ —		
X	n.	λ max Å	lg ϵ	n.	λ max Å	lg ϵ	n.	λ max Å	lg ϵ	n.	λ max Å	lg ϵ
H.	1 ^a	2605	3.97	6	2690	3.85	11 ^d	2465	3.99	16	2515	3.95
		—	—		—	—		2810	2.73		2845	2.77
		—	—		—	—		2900	2.58		2935	2.61
COOH. . .	2	—	—	7	—	—	12 ^e	2150	4.23	17	2190	4.19
		2945	4.32		3080	4.34		2700	4.28		2790	4.33
COOCH ₃ . .	3	—	—	8	—	—	13	2165	4.14	18	—	—
		—	—		2305	3.53		2220	4.08		2210	4.07
		3060	4.38		3215	4.39		2785	4.32		2870	4.29
COOC ₂ H ₅ . .	4 ^b	—	—	9	—	—	14	2170	4.27	19	—	—
		—	—		2330	3.55		2220	4.22		2215	4.08
		3060	4.36		3210	4.38		2770	4.34		2870	4.31
COCH ₃ . . .	5 ^c	2400	3.51	10	2375	3.55	15 ^f	2215	4.02	20	2280	3.96
		3225	4.37		3420	4.36		2905	4.32		3030	4.28

a) E. HUGHES e J. JOHNSON [8] in alcool: λ 2600 Å, lg ϵ 4.22. b) ib. ib., in alcool: λ 3000 Å, lg ϵ 4.39. c) ib. ib., in alcool: λ 3100 Å, lg ϵ 4.34. d) (valori ricavati dalle curve) R. LUCAS e coll. [9], in alcool: λ 2450 Å, lg ϵ 4.05; λ 2820 Å, lg ϵ 2.62; λ 2910 Å, lg ϵ 2.56. RODEBUSH e FELDMAN, in esano: [10] λ 2450 Å, lg ϵ 4.17. e) CAMPBELL e coll. [11], in alcool: λ 2820 Å, lg ϵ 4.30; λ 2220 Å, lg ϵ 4.16. ARENDS [12], in alcool: λ 2680 Å, lg ϵ 4.26. f) L. WILDS e coll. [13], in alcool: λ 2205 Å, lg ϵ 4.08; λ 2860 Å, lg ϵ 4.37.

L'esame dei risultati sperimentali da noi conseguiti può essere fatto sotto i seguenti aspetti:

1° *Confronto diretto fra i furil-etileni e i fenil-etileni (form. II):* gli effetti batocromi e ipercromi importati negli aril etileni rispettivamente per Ar = C₄H₃O, C₆H₅ sono riportati nella tabella III e risultano dai grafici 1, 2, 3, 4.

L'esame di questi dati mette in evidenza nella fattispecie che le specifiche modificazioni spettrali del sostituyente sono in ogni caso notevolmente più accentuate per i derivati furilici e ciò in accordo con le premesse.

Le variazioni cromatiche osservate per i metil-derivati saranno più oltre discusse.

TABELLA II.

Caratteristiche spettroscopiche U. V. dei composti Ar—X (form. III).

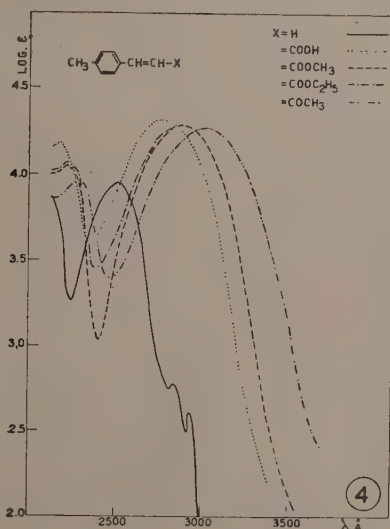
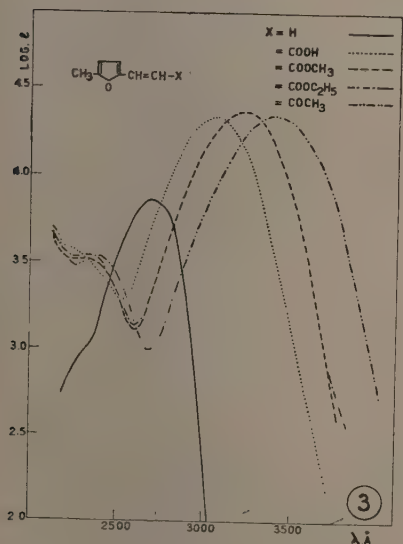
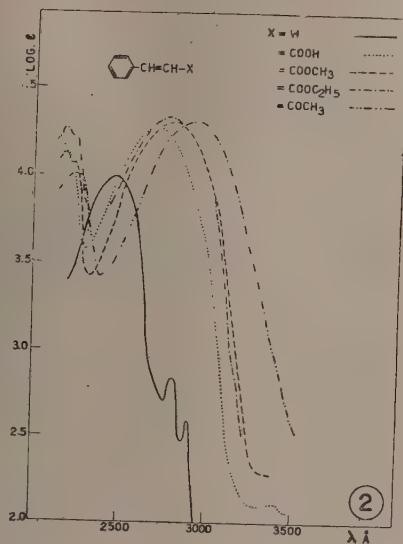
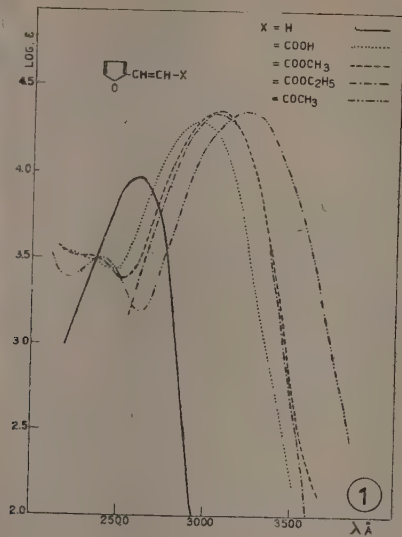
Ar =	C ₄ H ₃ O—			CH ₃ —C ₄ H ₂ O—			C ₆ H ₅ —			CH ₃ —C ₆ H ₄ —		
X	n.	λ max Å	lg ϵ	n.	λ max Å	lg ϵ	n.	λ max Å	lg ϵ	n.	λ max Å	lg ϵ
COOH. . .	21 ^g	2440	4.05	25 ^g	2570	4.10	29 ^h	2260	3.91	33 ^m	2360	4.03
								2700	2.74		—	—
COOCH ₃ .	22 ^g	2560	4.27	26 ^g	2720	4.06	30 ⁱ	2305	4.04	34	2410	4.10
								2740	2.96		—	—
COOC ₂ H ₅ .	23 ^g	2550	4.11	27 ^g	2670	4.14	31	2305	4.01	35	2400	4.08
								2735	2.92		—	—
COCH ₃ . .	24 ^g	2250	3.53	28 ^g	(2160)	(3.48)	32 ^l	—	—	36 ⁿ	—	—
		2750	4.14		2890	4.12		2460	4.06		2560	4.14
								~ (2785)	(3.08)		—	—

^g) valori presi dalla nota di R. ANDRISANO e R. PASSERINI [2]. ^h) E. FEHNEL [14], in alcool: λ 2270 Å, lg ϵ 4,0; λ 2720 Å, lg ϵ 2,92; λ 2790 Å, lg ϵ 2,84. DOUB e VANDENBELT [15], in acqua: λ 2300 Å, lg ϵ 4,06; λ 2730 Å, lg ϵ 2,98. ⁱ) E. FEHNEL [14] in alcool: λ 2280 Å, lg ϵ 4,07; λ 2720 Å, lg ϵ 2,94; λ 2800 Å, lg ϵ 2,85. ^l) DOUB e VANDENBELT [15], in acqua: λ 2450 Å, lg ϵ 3,99. CAMPBELL [11], in alcool: λ 2800 Å, lg ϵ 3,01; λ 2410 Å, lg ϵ 4,12. ~ = flessio. ^m) DOUB e VANDENBELT [15], idrato sodico N/1; λ 2350 Å, lg ϵ 4,06. ⁿ) DOUB e VANDENBELT [15], a pH 5: λ 2560 Å, lg ϵ 4,15.

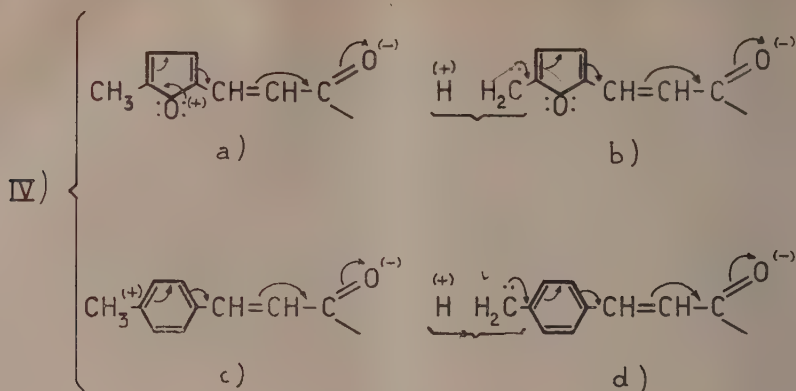
TABELLA III.

*Effetti batocromo ($\Delta\lambda$, Å) ed ipercromo ($\Delta\epsilon$)
indotti da X nei derivati aril-etilenici.*

X =	C ₄ H ₃ O—CH= =CH—X		C ₆ H ₅ —CH= =CH—X		CH ₃ —C ₄ H ₂ O— —CH=CH—X		CH ₃ —C ₆ H ₄ — —CH=CH—X	
	$\Delta\lambda$, Å	$\Delta\epsilon$	$\Delta\lambda$, Å	$\Delta\epsilon$	$\Delta\lambda$, Å	$\Delta\epsilon$	$\Delta\lambda$, Å	$\Delta\epsilon$
COOH	340	11.650	235	9.365	390	14.930	275	12.270
COOCH ₃	455	14.500	320	11.450	525	17.240	355	10.520
COOC ₂ H ₅	455	13.760	305	12.050	520	16.900	355	11.500
COCH ₃	620	14.240	440	11.370	730	14.630	515	10.120



2° *Effetto del gruppo* $-\text{CH}=\text{CH}-$ *quando inserito fra* Ar *e* X *in* Ar—X (*form. II-III*); *risulta dal confronto dei valori riportati nella* tabella I *con quelli della* tabella II (*ved. tabella IV*), *e dai grafici* 5 *e* 6 (*curve di assorbimento degli acidi furoico-furilacrilico/benzoico-cinnamico, e acetilfurano-furalacetone/acetofenone-benzalacetone*).



In ogni caso risulta confermata la regolarità che, a parità di condizioni, le modificazioni spettrali importate dai sostituenti sono maggiori se riferite al nucleo furanico che non al nucleo benzenico: se tale situazione si vuole interpretare in base a fatti di coniugazione risulta ancora una volta la maggiore coniugabilità del furile rispetto al fenile.

PARTE SPERIMENTALE. — Riassumiamo qui di seguito le modalità adottate per la preparazione dei composti da noi esaminati. La loro purificazione è stata effettuata per ripetute cristallizzazioni (solidi), o per distillazione (liquidi o basso fondenti).

Per le determinazioni spettrofotometriche (campo 2100–3900 Å) abbiamo usato lo spettrofotometro di Beckman DU a quarzo, con lampada a idrogeno, operando con soluzioni acquose (acqua bidistillata) 1 : 200.000, effettuando le letture ogni 2 mμ e nei punti caratteristici di mμ in mμ.

La legge di Beer è sostanzialmente verificata, almeno per i massimi presi in esame.

2-furil-etilene (comp. 1): per decarbossilazione dell'acido furil-acrilico secondo le modalità consigliate da Galimberti [16]. P. eb. 98–99°.

Acido 2-furil-β-acrilico (comp. 2): per condensazione del furfurolo con anidride acetica in presenza di acetato sodico secondo Galimberti [16]. P. f. 142°.

2-furil-β-acrilato di metile (comp. 3) e *di etile* (comp. 4): per esterificazione dell'acido 2-furil-β-acrilico secondo Glicke [17] e Marckwald [18]. P. eb.₁₅ 110°; p. eb.₁₇ 121°.

2-fural-acetone (comp. 5): per condensazione del furfurolo con acetone in presenza di idrato sodico diluito. P. eb.₁₆ 114° [19].

5-metil-2-furil-etilene (comp. 6): è stato da noi preparato adottando le modalità usate da Galimberti per il 2-furil-etilene (comp. 1). P. eb.₇₆ 129° (Trov. %: C 77.90; H 7.59. Per C₇H₈O calc. %: C 77.74; H 7.46).

Acido 5-metil-2-furil- β -acrilico (comp. 7): per condensazione del 5-metil-furfurolo con acido malonico in presenza di piridina secondo Maquenne [20]. P. f. 157°.

5-metil-2-furil- β -acrilato di metile (comp. 8) e *di etile* (comp. 9): per esterificazione dell'acido 5-metil-2-furil- β -acrilico operando nelle stesse condizioni usate per gli esteri furil-acrilici (comp. 3, 4). P. eb.₁₅ 127° [21]; P. eb.₁₅ 134° (Trov. %: C 66.80; H 6.84. Per C₁₀H₁₂O₃ calc. %: C 66.64; H 6.72).

5-metil-2-fural-acetone (comp. 10): per condensazione del 5-metil-furfurolo con acetone in presenza di soluzione diluita di idrato sodico [22]. P. eb.₁₅ 129°.

Acido cinnamico (comp. 12): per condensazione della benzaldeide con anidride acetica in presenza di acetato sodico [23]. P. f. 132°.

Esteri metilico (comp. 13) ed *etilico* (comp. 14) *dell'acido cinnamico*: per esterificazione dell'acido cinnamico (comp. 12) secondo Auschütz [24] e Fischer [25]. P. eb.₁₅ 135°; p. eb.₁₅ 145°.

Benzal-acetone (comp. 15): per condensazione della benzaldeide con acetone in soluzione diluita di idrato sodico secondo Claisen [26]. P. eb.₁₅ 141°; p. f. 37°.

p-metil-fenil-etilene (comp. 16): per decarbossilazione dell'acido p-metil-cinnamico (comp. 17) con le modalità riportate per l'analogo derivato furanico. P. eb. 167° [27].

Acido p-metil-cinnamico (comp. 17): per condensazione dell'aldeide p-toluica con acido malonico in presenza di piridina. P. f. 198° [28].

Esteri metilico (comp. 18) ed *etilico* (comp. 19) *dell'acido p-metil-cinnamico*: per esterificazione dell'acido p-metil-cinnamico secondo Anwers. P. eb.₁₆ 158° [29], p. eb.₁₆ 163° [27].

p-metil-benzalacetone (comp. 20): per condensazione della p-toluolaldeide con acetone in soluzione diluita di idrato sodico secondo Hanzlich e Bianchi [30]. P. eb.₁₆ 157°.

I composti 11 e 29...36 sono prodotti del commercio che abbiamo accuratamente purificato. I risultati spettrofotometrici dei composti 21...28 sono stati presi dalla Nota di R. Andrisano e R. Passerini [6].

BIBLIOGRAFIA.

- [1] « Gazz. Chim. Ital. », 81, 414 (1951).
- [2] « Ann. Chimica », 41, 545 (1951); R. ANDRISANO e G. MODENA, « Gazz. Chim. Ital. », 81, 393, 405 (1951); R. ANDRISANO e R. PASSERINI, ib. ib., 80, 730 (1950).
- [3] Confer. Congr. Inter. Chimica, Madrid (1934).
- [4] L'energia di risonanza del furano è di 23 Kcal/mol, quella del benzolo di 41 Kcal/mol; per i composti dienici più immediatamente similari al furano: divinilettere 3,4 kcal/mol; butadiene 3,5 kcal/mol (WHELAND, *The theory of resonance*, John Wiley e Sons, New York p. 69, 1944).
- [5] BEACH, « J. Chem. Phys. », 54 (1941).
- [6] R. ANDRISANO e R. PASSERINI, loc. cit.

- [7] Sulle proprietà dei composti viniloghi, cfr. la vasta bibliografia riportata nella Nota di COLONNA e RUNTI, « Ann. Chimica », 41, 739 (1951).
- [8] « J. Am. Chem. Soc. », 53, 737 (1931).
- [9] « Bull. Soc. Chim. », 51, 965 (1932).
- [10] « J. Am. Chem. Soc. », 68, 896 (1946).
- [11] Ib. ib., 69, 880 (1947).
- [12] « Ber. », 64 B, 1936 (1931).
- [13] « J. Am. Chem. Soc. », 69, 1985 (1947).
- [14] Ib. ib., 72, 1404 (1950).
- [15] Ib. ib., 69, 2714 (1947).
- [16] « Boll. sci. fac. chim. ind. » (Bologna), 1, 351 (1940).
- [17] « Ber. », 47, 1355 (1914).
- [18] Ib. ib., 21, 1404 (1888).
- [19] CLAISEN, ib. ib., 14, 2469 (1881).
- [20] « Ann. chim. », [6], 22, 87 (1891).
- [21] « B. P. », 569, 529 (1945).
- [22] « Ber. », 76, 183 (1943).
- [23] Ib. ib., 10, 68 (1877).
- [24] Ib. ib., 11, 1220 (1878).
- [25] Ib. ib., 28, 3254 (1895).
- [26] Ib. ib., 14, 2471 (1881).
- [27] ANSWERS, « Ber. », 45, 2781 (1912).
- [28] V. C. PANDEJA, « Proc. Indian. Acad. Sci. », 94, 508 (1939).
- [29] « Ann. », 413, 266.
- [30] « Ber. », 32, 2282 (1899).

Geologia. — *Resti fossili di « Sivachoerus » del giacimento di Sahabi in Cirenaica (Africa Settentrionale). Notizie preliminari (*)*.
Nota (**) di PIERO LEONARDI, presentata dal Socio R. FABIANI.

Nell'ormai famoso giacimento fossilifero di Sahabi nella Sirtica (Cirenaica) vennero rinvenuti dal prof. Carlo Petrocchi un cranio e una mandibola appartenenti a due Suidi, che, data la relativa scarsità di materiale cenozoico riferibile a questa famiglia e le notevoli lacune nelle nostre conoscenze in proposito, presentano grande interesse.

È in corso di pubblicazione uno studio particolareggiato di questi importanti esemplari, ma, poiché la stampa richiederà qualche tempo, ritengo opportuno render noti fin d'ora i risultati principali del mio esame.

Ringrazio sentitamente il prof. Ramiro Fabiani, dell'Istituto Geologico dell'Università di Roma, dove i fossili sono depositati per lo studio e l'amico prof. Carlo Petrocchi, che li scoprì, per avermene affidata l'illustrazione.

1. *Sivachoerus*, cfr. *giganteus* Falc. e Cautl. — Il più interessante dei due esemplari illustrati nella presente Nota è un cranio quasi completo (man-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Geologia dell'Università di Ferrara.

(**) Pervenuta all'Accademia il 1° ottobre 1952.

cano soltanto la volta cranica e la parte superiore della regione occipitale, ma alquanto deformato per pressione in senso verticale. La conservazione è abbastanza buona, soprattutto per quanto riguarda la dentatura, che è pure pressoché completa.

L'usura dei denti, appena iniziata, indica trattarsi di un individuo adulto, ma giovane.

Il cranio, visto in norma basale, si presenta snello e robusto nello stesso tempo, con un curioso insieme di caratteri primitivi e moderni.

Le caratteristiche che maggiormente lo distinguono sono le seguenti: robustezza delle arcate zigomatiche, che sono molto più sviluppate nella parte posteriore che non in quella anteriore; diastema assai sviluppato tra premolari e canini; pronunciato allargamento del rostro in corrispondenza dei canini, che sono grandi e rivolti all'infuori; mancanza dei Pm 1; Pm 4 più larghi dei M 1; diametro trasverso dei Pm 4 superante di 2 mm. quello anteroposteriore; M 3 molto allungati. Tra i vari generi di suidi che presentano qualche affinità col cranio di Sahabi (*Potamochoerus*, *Conohyus* e *Sivachoerus*) possiamo escludere i due primi, mentre un esame accurato della morfologia del cranio e soprattutto dalla dentatura induce a ritenere che esso vada riferito al gen. *Sivachoerus*, che è già stato segnalato nell'Africa Settentrionale da Tobien⁽¹⁾. Meno sicuro è il riferimento specifico. Ritengo però che il nostro esemplare presenti la massima affinità con *Sivachoerus giganteus* Falc. e Cautl, cui Tobien riferisce gli esemplari egiziani.

2. *Sivachoerus syrticus* n. sp. — Il secondo esemplare di Sahabi è costituito da una mandibola di dimensioni rilevanti e assai massiccia, quasi completa, mancando soltanto alcune parti prossimali delle branche ascendenti.

Anche la dentatura è pressoché completa. L'usura dei denti, non molto avanzata, permette di stabilire trattarsi di un individuo adulto, ma non molto vecchio. La parte mediana della branca orizzontale sinistra e la regione prossimale della sinfisi sono fortemente deformate in conseguenza di un processo actinomicotico con due tragitti fistolosi verso l'esterno e con neoformazione di tessuto osseo dalla parte della superficie mediale della branca⁽²⁾.

La mandibola in esame presenta sensibile affinità, soprattutto per la dentatura, con il cranio descritto precedentemente, ma se ne distingue già a prima vista per la maggiore robustezza e per la presenza dei Pm 1. È dunque da escludere che cranio e mandibola appartengano allo stesso individuo, tanto più che è un po' diverso anche lo stato di fossilizzazione e non coincidono le dimensioni.

Per la sua caratteristica dentatura, il cui carattere più saliente anche in questo caso consiste nel fatto che i Pm 4 sono più larghi dei M 1, la mandibola si avvicina a quattro generi di suidi: *Sivachoerus*, *Conohyus*, *Tetraconodon* e *Potamochoerus*.

(1) H. TOBIEN, *Mitteilungen über Wirbeltierreste aus den Mittelpliocän des Natrontales (Agipten)* - 7. *Artiodactyla: A. Bunodontia: Suidae*. « Zeitschr. d. D. Geol. Ges. », vol. 88, 1936.

(2) Devo questa diagnosi alla gentilezza del Collega prof. M. Aloisi, al quale desidero far pervenire i miei sentiti ringraziamenti.

Ma i tre ultimi sono da escludere per considerazioni di vario genere, dimodochè a. parer mio anche la mandibola va attribuita al genere *Sivachoerus*.

Per quanto riguarda l'attribuzione specifica, un confronto accurato con il cranio già descritto e con tutte le forme di *Sivachoerus* finora illustrate mi sembra dimostrare che la mandibola non appartiene alla stessa specie del cranio, cioè a *S. giganteus*, e si avvicina piuttosto a *S. prior* del Pliocene dei Siwaliks e al *Sivachoerus* indeterminato cui appartiene un ramo mandibolare, pure indiano, illustrato da Pilgrim ⁽³⁾.

Ritengo però che esistano delle differenze anche tra la mandibola di Sahabi e *S. prior*.

Pm 3 e Pm 4 nella nostra mandibola sono un po' meno sviluppati proporzionalmente ai molari, ed hanno un contorno spiccatamente diverso, più tondeggiante, senza rientranze sul margine labiale; Pm 2 e Pm 1 sono assai più piccoli, addirittura rudimentali, e meno allungati. Anche per quanto riguarda la conformazione generale, la nostra mandibola si differenzia alquanto da quella indiana per una ancor maggiore robustezza delle branche orizzontali e per la brevità della sinfisi e della parte conservata del rostro.

Non ritengo quindi che l'esemplare di Sahabi appartenga a *S. prior*.

Più che ad ogni altro degli esemplari presi in considerazione, il nostro corrisponde all'ultimo, ossia al ramo mandibolare incompleto attribuito da Pilgrim a *Sivachoerus* cfr. *giganteus*, sia per la forma e robustezza della parte ossea conservata, sia per le proporzioni e la morfologia dei denti. Nei molari si osserva una perfetta corrispondenza, e anche l'unico premolare conosciuto nell'esemplare indiano, Pm 4, è molto simile al corrispondente della nostra mandibola, pur distinguendosi per essere un po' più quadrangolare, con i margini labiale e linguale alquanto sinuosi.

Si può dir dunque che il secondo suide di Sahabi è prossimo, più che ad ogni altra, alla specie cui appartiene il ramo mandibolare esaminato. Ma questa specie non è, a parer mio, il *giganteus*, e quindi è indeterminata, ed inoltre un confronto completo con l'esemplare di Pilgrim non è possibile, mancando in quest'ultimo i primi tre premolari.

Ritengo pertanto che la mandibola di Sahabi, e forse anche il ramo mandibolare indiano in discorso, rappresentino una nuova specie, per la quale propongo il nome di *Sivachoerus syrticus*.

Il gen. *Sivachoerus* presenta un certo interesse dal punto di vista evolutivo per i caratteri particolari della sua dentatura e specialmente dei due ultimi premolari, che contrariamente a quanto si verifica in quasi tutti i suidi sono più sviluppati del 1° molare. Il gen. *Sivachoerus* ha in comune questo carattere con altri due generi: *Conohyus* e *Tetraconodon*. Dei tre, *Conohyus*, sia per i suoi caratteri morfologici, sia per la sua età (Miocene - Pliocene

(3) G. E. PILGRIM, *The fossil suidae of India*. «Mem. Geol. Surv. Ind., Pal. Indica», N. S., vol. VIII, 1926, tav. IV, fig. 1.



Fig. 1. — Cranio di *Sivachoerus* cfr. *giganteus* Falc. e Cautl in norma basale. — Sahabi (Cirenaica).
Circa $\frac{1}{3}$ della grandezza naturale.



Fig. 2. — Mandibola di *Sivachoerus* n. sp. *syrticus* in norma laterale destra. — Sahabi (Cirenaica).
Circa $\frac{2}{3}$ della grandezza naturale.



Fig. 1. - Mandibola di *Sivachoeerus* n. sp. *syrticus* in norma verticale. - Sahabi (Cirenaica).
Circa metà della grandezza naturale.



Fig. 2. - La stessa in norma basale. Circa metà della grandezza naturale.

inferiore) è certamente il più primitivo; e, d'accordo con Colbert ⁽⁴⁾ ritengo probabile che da esso derivino gli altri due.

Nei due rami derivanti da *Conohyus* l'evoluzione dei premolari procede in senso opposto: in *Sivachoerus* essi sono leggermente meno sviluppati che in *Conohyus*, mentre invece in *Tetraconodon* Pm 3 e Pm 4 raggiungono dimensioni eccezionali, addirittura mostruose.

A giudicare soprattutto dagli esemplari descritti in questa Nota *Sivachoerus* presenta una specializzazione minore di *Tetraconodon*, in quanto conserva pressoché invariata la dentatura del progenitore *Conohyus* (differenze principali: il maggiore sviluppo dei canini, che sono anche più rivolti in fuori; diastemi tra C e Pm 1 e tra Pm 1 e Pm 2 nella nostra mandibola, unico diastema tra C e Pm 2 nel nostro cranio; leggera riduzione di Pm 3 e Pm 4, allungamento di M 3), pur presentando una evoluzione abbastanza notevole per quanto riguarda la morfologia del cranio in generale.

Tetraconodon presenta caratteri del tutto particolari, e, per lo sviluppo eccezionale dei due ultimi premolari, rappresenta evidentemente, nella evoluzione polifiletica dei suidi, lo stadio terminale di un ramo laterale fortemente sviluppato, *ipertelico*.

Le notevoli analogie morfologiche — prescindendo dalle proporzioni tra Pm e M — tra la dentatura delle forme di Sahabi e quelle di qualche *Potamochoerus* ⁽⁵⁾, per esempio *P. palaeindicus* Pilgrim, mi fanno pensare alla possibilità — se non si tratta di un caso di convergenza — che il *phylum* cui appartiene questo genere sia imparentato con quello del gruppo *Conohyus-Sivachoerus*.

Il riferimento cronologico dei suidi di Sahabi non è agevole, data la natura del giacimento da cui i fossili provengono e le divergenze degli Autori sulla cronologia dei depositi dei Siwaliks, da cui proviene la maggior parte dei resti fossili cui i nostri esemplari sono paragonabili.

Secondo gli Autori i *Sivachoerus* indiani compaiono negli strati di Dhok Pathan e si estinguono con quelli di Pinjor, strati che secondo Colbert ⁽⁶⁾ corrisponderebbero rispettivamente al Pliocene medio-superiore e al Villafranchiano superiore, ossia al Pleistocene inferiore.

Per parte mia, tenendo conto dello stadio evolutivo che presentano i due esemplari di Sahabi, specialmente per quanto riguarda la dentatura (riduzione dei Pm 3 e Pm 4 maggiore che in *Sivachoerus prior* e allungamento di M 3), e della presenza di *Sivachoerus giganteus* nel Pliocene medio dell'Uadi Natrun, attestata da Tobien ⁽⁷⁾, propendo a ritenere che *Sivachoerus* cfr. *giganteus* e *Sivachoerus syrticus* rappresentino nel deposito di Sahabi i livelli rispondenti al Pliocene medio-superiore.

(4) E. H. COLBERT, *Siwalik Mammals*, p. 265.

(5) Rilevate da HOOYER in una lettera a me diretta in data 6 luglio 1951. Del resto STEHLIN (« Abh. Schweiz. Pal. Ges. », vol. 26, p. 389) aveva riferito al gen. *Potamochoerus* il *Sivachoerus giganteus*.

(6) E. H. COLBERT, *Distributional and phylogenetic studies on indian fossil mammals*.

II. « American Museum novitates », n. 797, 1935, p. 3.

(7) H. TOBIEN, op. cit., p. 49.

Mineralogia. — *I minerali del gruppo dell'Ortler.* — V. *Antofillite di Alpe di Brez*^(*). Nota^(**) di ROSSANA PIRANI, presentata dal Corrisp. C. ANDREATTA.

L'antofillite di Alpe di Brez fu segnalata per la prima volta da C. Andreatta^(*) in un lavoro geologico-petrografico sopra la catena destra della Val d'Ultimo. In prossimità della cresta di tale catena, entro paragneis spesso trasformati in tipi kinzigitici, affiorano diverse intercalazioni di oliviniti.

Alcune di tali lenti, nella zona di contatto con le rocce incassanti, sono rivestite localmente da uno strato di cristalli subparalleli di antofillite, perpendicolari alla parete di contatto (vedi fig. 19 p. 88 della già citata pubblicazione di C. Andreatta). Questo minerale riveste anche molte pareti di fini litoclasti tanto nell'interno della massa olivinitica, quanto nella zona di contatto.

Macroscopicamente l'aggregato aciculare di antofillite si presenta di colore giallastro o bruno-rossastro per impurità di ossido ferrico, non molto resistente, a grana media. I cristalli di anfibolo formano delle associazioni di elementi aciculari lunghi anche parecchi centimetri, fratturati ripetutamente in senso normale all'allungamento.

In sezione sottile l'aggregato mostra una tessitura con prismi non perfettamente orientati; in alcune zone predomina l'antofillite in cristalli idiomorfi con linee di sfaldature evidenti e continue; in altre i cristalli appaiono stirati, contorti, ridotti in fibre che si incrociano variamente fra loro; infine si notano delle grosse plaghe costituite da un feltro microcristallino di serpentino, entro le quali si notano brandelli di cristalli di antofillite sfuggiti alla trasformazione. Questo feltro è formato da talco, da crisotilo, da clinocloro, da muscovite, da biotite cloritizzata e da diffuse granulazioni di magnetite, ematite ed ilmenite. Tutto l'aggregato è impregnato, inoltre, da una sostanza giallo-brunicia, probabilmente limonitica. Oltre i minerali suaccennati, accompagnano l'antofillite anche un anfibolo e un pirosseno ambedue monoclini.

Il *pirosseno monoclinico* si trova in cristalli assai piccoli e rari, privi di pleocroismo, con le linee di sfaldatura dei piani {110} abbastanza nette. L'angolo di estinzione determinato in pochi individui è in media di 39°. Con ogni probabilità si tratta di diopside.

L'*anfibolo monoclinico* è pur esso assai raro ed appartiene alla famiglia delle actinoliti. Ha colore verde-bruno, è sensibilmente pleocroico, ha angolo di estinzione $\alpha/\gamma = 19^\circ$ circa. È assai alterato con le linee di sfaldatura e frattura

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia e Petrografia dell'Università di Bologna.

(**) Pervenuta all'Accademia il 22 luglio 1952.

(1) C. ANDREATTA, *La formazione gneissico-kinzigitica e le oliviniti di Val d'Ultimo (Alto Adige)*. Estratto dalle «Memorie del Museo di Storia Naturale della Venezia Tridentina», vol. III, fasc. 2, 1935.

cementate da ossidi di ferro; la rifrazione è lievemente superiore a quella dell'antofillite.

La *biotite*, osservata al microscopio, si mostra pochissimo pleocroica con tinte giallastre o leggermente brune; qualche lamella presenta tracce di trasformazione in clorite, confermata da una diminuzione della birifrazione e dalla perdita del pleocroismo.

Il *crisotilo*, di colore giallo-verdastro, si trova in masserelle lievemente fibrose come prodotto di alterazione di cristalli di anfibolo, oppure in pacchetti di lamine in associazione col clinocloro; in sezione sottile presenta struttura a feltro con lamine sottilissime, incolori, di lucentezza sericea o resinosa, intreciantisi fra loro. La birifrazione e la rifrazione sono sempre basse e positive; $2V$ è sempre molto piccolo tanto che a volte i cristalli sembrano uniassici.

Il *clinocloro* è associato al crisotilo e alla biotite, in lamine di colore giallo-verdastro chiaro, prive anche queste di pleocroismo. La lucentezza è grassa e tra le lamelle sono frequenti delle granulazioni di ossidi e di idrossidi ferri. La rifrazione e la birifrazione, minori che nel crisotilo, sono ambedue positive, l'angolo tra gli assi ottici è abbastanza ampio, variabile fra 42° e 45° , determinato al T. U., l'estinzione lievemente inclinata con angolo α/γ al massimo di 3° o 4° . Questo minerale di genesi secondaria è un prodotto di trasformazione della biotite.

La *magnetite*, l'*ematite* e l'*ilmenite* sono distribuite in tutta la roccia; esse sostituiscono a volte quasi per intero i cristalli di anfibolo che acquistano un aspetto terroso di colore bruno scuro.

L'*antofillite* forma individui prismatici allungati; nei cristalli inalterati a contorni netti, sono distinte le tracce di sfaldatura secondo i piani (110) con angolo di 125° . Nei cristalli immersi entro il feltro di serpentino scompaiono i contorni, le sfaldature sono interrotte e le fratture si intersecano in tutte le direzioni; i bordi dei cristalli più grossi si smembrano in numerose fibrille che si intrecciano e si confondono con le fibre di talco.

Entro l'antofillite sono frequenti le inclusioni di epidoto in granuli con sensibile pleocroismo ed evidente colorazione gialla, di mica muscovitica in lamelle minutissime e di biotite quasi completamente trasformata in clorite e cosparsa a sua volta di aghetti di rutilo.

L'antofillite presenta al microscopio una colorazione bianco-giallastra con pleocroismo debole:

$$\begin{aligned}\alpha &= \beta = \text{incolore o giallognolo} \\ \gamma &= \text{grigio-biancastro, grigio-verdolino.}\end{aligned}$$

La rifrazione è media e positiva; per γ operando con luce monocromatica ho ottenuto il seguente valore:

$$\gamma = 1,639 \pm 0,002.$$

L'angolo degli assi ottici determinato al T. U. è un po' variabile causa una zonatura dei cristalli. Il prof. C. Andreatta⁽¹⁾ in cristalli zonati ha otte-

nuto al nucleo $2V = 78^{\circ}$ – 80° e verso la periferia $2V = 70^{\circ}$ – 77° ; la media di molte determinazioni su cristalli non zonati e su quelli poco zonati risultò di 78° .

Le determinazioni da me eseguite hanno confermato tali risultati. Infatti ho ottenuto $2V = 74^{\circ}$ in cinque cristalli; $2V = 77^{\circ}$ in tre cristalli; $2V = 78^{\circ}$ in un cristallo; $2V = 79^{\circ}$ su sei cristalli; con una media di:

$$2V = 77^{\circ} +$$

La dispersione degli assi ottici è assai rilevante con: $\rho > \nu$.

Il peso specifico, determinato col picnometro è:

$$p. s. = 3,22.$$

Su una porzione di materiale scelto accuratamente con l'aiuto del binoculare è stata eseguita l'analisi chimica che ha dato i seguenti risultati:

% in peso		Quoz. atom.	
SiO ₂	55,38	Si	0,9221
Al ₂ O ₃	4,36	Al	0,0856
TiO ₂	0,04	Ti	0,0005
Cr ₂ O ₃	ass.		
Fe ₂ O ₃	0,25	Fe'''	0,0032
FeO	6,83	Fe''	0,0951
MnO	tr.		
MgO	28,43	Mg	0,7051
CaO	1,05	Ca	0,0187
Na ₂ O	0,51	Na	0,0164
K ₂ O	0,24	K	0,0052
H ₂ O ⁺	2,26	OH	0,2510
H ₂ O ⁻	0,73	O	2,6826
100,08			
			7,56
			0,44
			0,26
			0,01
			6,03
			0,78
			5,78
			0,16
			0,13
			0,04
			2,05
			22,00

La formula del minerale è pertanto:



oppure, introducendo l'aggruppamento y per i cationi Ca, K, Na ⁽²⁾ è:



I risultati conseguiti sono assai concordanti con quelli stabiliti teoricamente per le antofillite e anche le somme delle valenze cationiche ed anioniche sono perfettamente eguali.

(2) R. PIRANI, *I minerali del Gruppo dell'Ortler*. - IV. *Antofillite e actinolite di Val di Bresimo. Solubilità di questa actinolite*. « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei », Roma, 1952.

Mineralogia. — *I minerali del Gruppo dell'Ortler*. — VI. *Biotite di Val di Bresimò e sua solubilità* ^(*). Nota ^(**) di FRANCESCO EMILIANI, presentata dal Corrisp. C. ANDREATTA.

Nelle montagne della parte sud-orientale del gruppo dell'Ortler che scendono verso la Val di Sole si trovano, nei parascisti di catazona, numerose intercalazioni di olivinite ⁽¹⁾. Una delle maggiori si estende lungo il solco della Val Zoccolo da quota 1500 circa, con direzione N-E, raggiungendo il Passo di q. 2402, da dove, con direzione nord e smembrandosi, passa sul versante Est di Cima Zoccolo e continua, con quattro distinte intercalazioni, sul costone N-E della stessa Cima. Su questo costone esiste un piccolo giacimento di amianto ⁽²⁾ nel quale si notano noduli di biotite quasi pura.

L'aggregato che costituisce questi noduli è formato essenzialmente da pacchetti di piccole lamelle di biotite di color bruno scuro, in associazione subparallela, con evidente scistosità. Ad occhio nudo si possono notare chiazze bianche, leggermente tendenti ad un verde grigio, formate da cristalli unici molto fragili di apatite, in prevalenza piuttosto tozzi e di lunghezza variabile, ma mai superiore ad un centimetro; meno evidenti, ma facilmente rilevabili, chiazze di color verde scuro, formate da associazioni subparallele di cristallini prismatici allungati di actinolite, della lunghezza massima di mezzo centimetro. Fra le lamelle di biotite sono inseriti pure aggregati subparalleli di cristalli di antofillite, che raggiungono la lunghezza di un centimetro o poco più.

Data la struttura di tale aggregato, non è stato possibile farne una sezione sottile e perciò ho dovuto limitarmi ad eseguire lo studio microscopico dei costituenti mineralogici su vari preparati in liquidi ad indice noto.

Oltre che della biotite e degli altri minerali ricordati, cui si accompagnano numerose granulazioni di prodotti di alterazione (idrossidi), si può rilevare la presenza di mica bianca, magnetite ed ematite.

L'*apatite*, facilmente riconoscibile per il rilievo piuttosto forte e per la bassa birifrangenza, risulta perfettamente incolore con lucentezza vitrea; le sezioni estinte danno, in luce convergente, la figura di interferenza caratte-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia e Petrografia dell'Università di Bologna.

(**) Pervenuta all'Accademia l'11 agosto 1952.

(1) C. ANDREATTA, *La tettonica a «vortici» nei monti della Val di Sole*. « Rend. dell'Acc. Naz. dei Lincei », ser. VIII, vol. V, Roma 1948; *Carta Geologica al 100.000 «M. Cevedale»*, Firenze 1951.

(2) R. PIRANI, *I minerali del Gruppo dell'Ortler*. — IV. *Antofillite ed actinolite di Val di Bresimò. Solubilità di questa actinolite*. « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », vol. XIII, 2° sem., fasc. 1-2, pp. 83-88 (1952).

ristica, formata dalla croce nera a bracci molto larghi e sfumati, da cui si rileva la uniassicità negativa del minerale.

L'*actinolite* si presenta in prismi allungati in associazione parallela; la lucentezza è resinosa, il pleocroismo evidente secondo il seguente schema: $\alpha =$ incolore, $\beta =$ verde-giallo pallidissimo, $\gamma =$ verde-giallo. Si notano nette le tracce della sfaldatura $\{110\}$ e varie fratture. L'estinzione è obliqua con angolo $z/\gamma = 18^\circ$ circa. Dalle osservazioni conoscopiche risulta la biassicità negativa con angolo fra gli assi ottici elevato.

L'*antofillite*, in prismi molto allungati in associazione parallela, mostra facile divisibilità trasversale. È debolmente pleocroica con $\alpha = \beta =$ giallo debolissimo e $\gamma =$ giallo-bruno chiaro. Molto evidenti e nette si notano le tracce della sfaldatura $\{110\}$; l'estinzione è parallela.

La *mica bianca*, assai scarsa, si presenta in aggregati di lamelle minutissime ed appare molto alterata.

La *magnetite*, piuttosto abbondante, è distribuita nella roccia in piccoli granuli, che qualche volta si trovano pure inclusi nei cristalli di biotite e di actinolite.

L'*ematite*, in cristallini rossi a contorno ben netto, è assai scarsa.

La *biotite*, infine, appare alquanto scolorita; le lamelle di sfaldatura, di colore bruno chiaro, hanno lucentezza madreperlacea. Forte il pleocroismo, secondo lo schema:

$$\alpha = \text{grigio chiaro, quasi incolore}$$

$$\beta = \gamma = \text{bruno chiaro.}$$

Gli indici di rifrazione, misurati col metodo di immersione (in miscele di tetralina, bromoformio e bromofenolo), usando luce monocromatica ottenuta con filtro Lifa n. 395 per la linea D = 586, risultano:

$$\alpha = 1,573 \pm 0,002$$

$$\beta = 1,596 \pm 0,002$$

$$\gamma = 1,598 \pm 0,002.$$

La birifrazione risulta quindi:

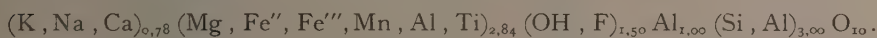
$$\gamma - \alpha = 0,025.$$

Dalle osservazioni conoscopiche effettuate sulle lamelle di sfaldatura, l'angolo fra gli assi ottici appare estremamente piccolo.

Della biotite ho eseguito l'analisi chimica su materiale scelto con cura al microscopio binoculare, ottenendo i seguenti risultati, che rappresentano la media di tre analisi ben concordanti:

% in peso		Quoz. atomico			
SiO ₂	39,22	Si	0,6530	2,70	3,00
				0,30	
Al ₂ O ₃	17,77	Al	0,3486	1,45	1,00
				0,15	2,84
TiO ₂	0,66	Ti	0,0083	0,04	
Fe ₂ O ₃	1,97	Fe'''	0,0246	0,10	
FeO	5,91	Fe''	0,0823	0,34	
MnO	0,10	Mn	0,0014	0,06	0,78
MgO	20,96	Mg	0,5198	2,15	
CaO	0,69	Ca	0,0123	0,05	1,50
K ₂ O	6,79	K	0,1442	0,60	
Na ₂ O	0,99	Na	0,0320	0,13	10,00
F	0,36	F	0,0190	0,08	
H ₂ O ⁺	3,08	OH	0,3420	1,42	
H ₂ O ⁻	1,93	O	2,4153	10,00	

La formula della biotite di Val di Bresimo (posto come base il quoziente dell'ossigeno O = 10) risulta quindi:



Il valore, un po' scarso, del coefficiente corrispondente agli ioni esacoordinati (2,84) si può spiegare con la parziale sostituzione di ioni bivalenti con ioni a valenza superiore. Più difficile invece riesce lo spiegare il valore eccessivamente basso degli ioni in coordinazione 12 e degli ossidril. Ho già detto che il minerale risulta al microscopio alquanto scolorito e che nell'aggregato si notano delle granulazioni di prodotti di alterazione; si può quindi pensare che la deficienza degli elementi a coordinazione 12 sia dovuta ad una azione di dilavamento. Per avere una prova di ciò ho sottoposto 5 grammi circa di minerale scelto accuratamente al microscopio binoculare e macinato non troppo finemente ad un lavaggio prolungato, eseguendo quindi l'analisi chimica del residuo di evaporazione delle acque di lavaggio.

Nella tabella seguente sono riassunti i dati di tale analisi: i valori della prima colonna rappresentano, in ossidi, le percentuali, riferite al peso del minerale sottoposto a dilavamento (privo dell'acqua igroscopica); quelli della seconda colonna rappresentano le percentuali passate in soluzione dei singoli ossidi contenuti nel minerale primitivo.

I		II		I		II	
SiO ₂	0,16830	0,42		CaO	0,02840	4,04	
Trival.	0,08113	0,29		K ₂ O	0,3767	5,44	
MgO	0,05731	0,27		Na ₂ O	0,4462	44,21	

Dall'esame di questi dati risulta che lo ione Na^+ viene asportato con grandissima facilità dal reticolo, mentre la rimozione degli ioni Ca^{2+} e K^+ risulta assai meno facile. Ciò, del resto, è plausibilissimo se pensiamo che lo ione Ca^{2+} , trattenuto nel reticolo più solidamente del Na^+ a causa delle sue due cariche, ne viene però asportato con relativa facilità per il fatto che il suo raggio è troppo basso per adattarsi bene in coordinazione 12; il K^+ invece, pure essendo monovalente, viene trattenuto nel reticolo più del Na^+ , poichè il suo raggio si adatta assai meglio in coordinazione 12.

Per avere un ulteriore controllo delle mie supposizioni e dei dati analitici ho eseguito l'analisi chimica quantitativa degli alcali anche sul residuo del lavaggio, seccato in stufa a 110°C . Nella tabella seguente sono riassunti e confrontati i dati ottenuti per gli alcali: nella prima colonna sono riportate le percentuali in ossidi nel residuo di lavaggio; nella seconda le percentuali nelle acque di lavaggio riferite al minerale inalterato privo dell'acqua igroscopica (prima colonna della tabella precedente); nella terza colonna le somme di questi due valori; nella quarta le percentuali nel minerale primitivo privo dell'acqua igroscopica:

	I	II	III	IV
K_2O . . .	6,35	0,38	6,73	6,92
Na_2O . . .	0,53	0,45	0,98	1,01

La concordanza abbastanza buona di questi dati mi lascia supporre che i risultati analitici e le deduzioni che se ne possono trarre siano attendibili. Posso far notare in particolare che la quantità di K_2O totale (colonna III) è un po' scarsa rispetto al contenuto del minerale, perchè durante l'analisi del residuo delle acque di lavaggio ho dovuto arroventare molte volte i cloruri alcalini per distruggere notevoli quantità di sostanze organiche, provenienti dai filtri su cui avevo effettuato il lavaggio; conseguentemente è logico che debba aver cacciato anche piccole quantità di KCl .

Biologia. — *Trapianti di midollo spinale di larve in embrioni di Anfibii anuri*^(*). Nota^(**) di GIORGIO M. BAFFONI, presentata dal Socio G. COTRONEI.

In numerose ricerche compiute nel nostro Laboratorio sulla rigenerazione del tessuto nervoso, Stefanelli e allievi⁽¹⁾, confermando il valore cam-

(*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Istologia ed Embriologia della Facoltà di Scienze dell'Università di Roma.

(**) Pervenuta all'Accademia il 5 luglio 1952.

(1) AL. STEFANELLI e A. CAPRIATA, «Ricerche di Morfologia», Roma, 20°, p. 605 (1944); L. ZANNONE, *Ivi*, 22°, (1947); M. MAROTTA, «Rend. Acc. Naz. Lincei», VIII, 1°, p. 1367 (1947); AL. STEFANELLI e M. CERVI, «Boll. Soc. Ital. Biol. Sperim.», 22°, p. 756 (1946); AL. STEFANELLI, G. THERMES, M. PODDIE, «Riv. di Biol.», 42°, p. 239 (1950); AL. STEFANELLI, «Rend. Acc. Naz. Lincei», VIII, 8°, p. 498 (1950); G. THERMES, «Rend. Sem. Fac. Sci. Cagliari», 20°, f. 3-4 (1951).

biale dell'ependima, hanno dimostrato l'importanza dell'ampolla apicale nei processi rigenerativi del midollo spinale; sia in larve di Anfibi anuri (Stefanelli; Stefanelli, Thermes e Poddie), in Anfibi urodeli (Stefanelli e Capriata; Stefanelli e Cervi) che nei Rettili (Zannone; Marotta; Thermes), l'ampolla ependimale si forma con tipici movimenti morfogenetici (movimento ameboide, proliferazione cellulare, sticotropismo) quali quelli che sono stati descritti nello sviluppo embrionale da Ruffini ⁽²⁾. Questi movimenti morfogenetici si realizzano sempre che nel midollo spinale vi sia attitudine alla rigenerazione: sono stati infatti osservati nei Rettili, nonostante che in essi il midollo spinale caudale rigenerato degenera a causa dell'isolamento funzionale in cui viene a trovarsi (Stefanelli) ⁽³⁾; sono stati descritti nel midollo spinale isolato dal restante neurasse (Stefanelli e collaboratori, Baita ⁽⁴⁾); in assenza di attitudini rigenerative, infatti, l'ampolla ependimale non si forma, come avviene nel midollo spinale di Teleostei (larve ed adulti) ed in quello di Rettili nella regione anteriore alla zona di autotomia (Baffoni) ⁽⁵⁾.

Nell'ambito delle ricerche sui problemi del differenziamento del neurone, che si vanno svolgendo nel nostro Laboratorio, è stata indagata l'attività delle cellule del tubo neurale in condizioni di isolamento, con un piano di ricerche che comprende una serie di esperienze di trapianto di tessuto nervoso embrionale, larvale ed adulto in individui di diversi stadi (embrioni, larve e adulti). Ricordo che sono noti numerosi risultati da trapianti omoplastici (Mangold; Detwiler; Spirito; Hörstadius ⁽⁶⁾; ecc.) e xenoplastici (Cotronei, Spirito, Guareschi, Perri) ⁽⁷⁾ di tessuto nervoso tra embrioni, di tessuto nervoso embrionale in larve (Dürken; Cotronei e Guareschi; Holtfreter; ecc.) o in adulti (Spemann; ecc.); non mi consta invece che siano molte le nostre conoscenze riguardo ai trapianti di tessuto larvale in embrioni. In questa Nota riferirò i primi risultati conseguiti precisamente in esperienze del genere, particolarmente favorevoli ai miei intenti, dato che in queste condizioni il tessuto nervoso, oltre che isolato morfologicamente dal restante neurasse, lo era anche fisiologicamente, non solo a causa del diverso grado di sviluppo tra donatore ed ospite, ma anche del differente metabolismo che si istaura nella larva dopo il riassorbimento del tuorlo (Cotronei) ⁽⁸⁾.

(2) A. RUFFINI, «Rass. Sci. Biol.» (Firenze), 1^o, f. I, p. 74 (1919); *Fisiogenia* (Milano 1925).

(3) AL. STEFANELLI, *Genetic Neurology* (Chicago), p. 210 (1950).

(4) AL. STEFANELLI, G. THERMES G. e R. MASSIDDA, «Rend. Sem. Fac. Sci. Cagliari», 20^o, (1950); S. BAITA, «Arch. Zool. Ital.», 36^o, p. 105 (1951).

(5) G. M. BAFFONI, «Rend. Acc. Naz. Lincei», VIII, 8^o, p. 389 (1950); *Ivi*, 10^o, p. 319 (1951).

(6) Ved. A. SPIRITO, «Arch. Entw.-mech. Org.», 127^o, p. 61 (1932); S. HÖRSTADIUS, *The neural crest* (Oxford Univ. Press, 1950).

(7) G. COTRONEI, «Arch. Zool. Ital.», 10^o, p. 85 (1922); COTRONEI e SPIRITO A., «Monit. Zool. Ital.», 40^o, p. 425 (1929); COTRONEI, SPIRITO, GUARESCHI, PERRI, «Rend. R. Acc. Naz. Lincei», VI, 10^o-15^o (1929-32); G., COTRONEI «Boll. di Zool.», 4^o, 199 (1933).

(8) G. COTRONEI, «Bios», 2^o, p. 27 (1913).

Allo scopo ho isolato dalla coda di larve (di 10' gg.) di *Hyla arborea Savignyi* segmenti di midollo spinale (mm. 0,3-0,5 di lunghezza), che è provvisto di ampie facoltà rigenerative (Stefanelli; Baita; Baffoni⁽⁹⁾), e di trapiantarli nel fianco di embrioni allo stadio di tubo neurale chiuso (stadio 16 di Eakin). Ho compiuto 25 operazioni seguendo tutti gli accorgimenti del caso (ved. Rugh)⁽¹⁰⁾; i 13 animali che non hanno espulso il trapianto, sono stati fissati in liquido di Bouin a vari tempi dall'operazione (dopo 12 ore, 1, 2, 3, 4 e 6 giorni) e colorati in Emallume-eosina.

L'esame delle serie istologiche ha dimostrato che:



nelle prime 24 ore i lembi del canale endimale del midollo trapiantato si saldano mediante processi di ameboidismo e per fenomeni di moltiplicazione cellulare (numerosi mitosi nell'epitelio endimale alle due estremità del midollo);

dopo 48 ore alle due estremità del segmento di midollo, l'endima presenta due grosse estroflessioni a fiasca di epitelio monostratificato; gli apici delle fiasche sono costituiti da cellule clavate (epitelio cilindrico), e le pareti di epitelio appiattito; nel tessuto nervoso compaiono sporadiche degenerazioni di elementi cellulari (picnosi) e, verso le due estremità del midollo, degenerazione incipiente di fibre nervose (cavità allungate, irregolari e nodose). Analogamente a quanto è stato notato nello studio dei fenomeni d'iperrigenerazione multipla, l'ampolla della porzione più sottile del midollo (corrispondente alla porzione distale) è più sviluppata dell'altra;

dopo 3 giorni il midollo spinale è ridotto al solo tubolino endimale, attorno al quale si ravvisano alcuni neuroni in degenerazione; nonostante l'avanzata degenerazione di fibre e di neuroni, l'epitelio endimale e le sue dilatazioni ampollari si conservano intatti;

dopo 4 giorni ho notato la degenerazione incipiente dell'epitelio endimale; almeno nei due casi da me esaminati, il fenomeno procedeva dal

(9) G. M. BAFFONI, « Rend. Acc. Naz. Lincci », VIII, 12°, p. 189 (1952).

(10) R. RUGH, *Experimental Embryology*. (Minneapolis 1948).

centro verso le due estremità, che si conservano più a lungo (specie le due dilatazioni ampollari, il cui lume è ridotto ed il cui epitelio è diventato uniforme).

dopo 6 giorni non ho rinvenuto più traccia del pezzo trapiantato.

Questa esperienza dimostra che un frammento di midollo spinale, anche nelle più svantaggiose condizionali trofiche e funzionali, se ha possibilità intrinseche di rigenerazione, rigenera formando ampolle apicali; tali formazioni devono pertanto essere interpretate, come l'ha interpretate Stefanelli ⁽³⁾, il fenomeno morfogenetico fondamentale e generale della rigenerazione di quest'organo. La formazione dell'ampolla, inoltre, è dovuta all'attività specifica delle cellule dell'ependima (indipendentemente da rapporti d'insieme col restante neurasse, da rapporti trofici e da condizioni ambientali) analogamente a quanto è stato dimostrato da Holtfreter ⁽¹¹⁾ per ciò che riguarda i movimenti morfogenetici degli elementi cellulari nella formazione dell'entoderma e del tubo neurale nello sviluppo embrionale degli Anfibi.

I numerosi casi di espulsione del trapianto (ca. la metà dei casi) e la costante degenerazione cui va incontro il tessuto nervoso trapiantato, inoltre, denunciano l'impossibilità di sviluppo del tessuto nervoso larvale (differenziato) nell'embrione; sulla scorta dei risultati di Harris ⁽¹²⁾, ritengo che ciò debba imputarsi al diverso chimismo dei tessuti della larva rispetto a quelli dell'embrione, il che è un'ulteriore conferma di quanto ha da tempo stabilito Cotronei ⁽⁹⁾. A tal proposito risultano ancor più significative successive esperienze di trapianto, da me intraprese, nelle quali il segmento di midollo spinale della coda della larva è stato trapiantato nel tubo neurale, invece che nel fianco dell'embrione. Sono stati operati embrioni allo stadio 16-17 scollando i lembi già chiusi del tubo neurale, ponendo entro la doccia il segmento di midollo spinale larvale isolato e quindi richiudendo i lembi.

Ho allestito i seguenti lotti di esperienze:

N.	Stadio	n. operazioni	Età del donatore	Effetti sull'ospite		
				Degenerazione	Espulsione	Larve superst.
1°	16	10	9 giorni	3 casi	4 casi	3
2°	17	16	10	10	1	5
3°	16	20	10	8	4	8
4°	16-17	25	24	19	5	1
5°	16	20	25	17	3	—

(11) J. HOLTFRETER, « Journ. Experim. Zool. », 94°, p. 261 (1943); *Ivi*, 106°, p. 197 (1947).

(12) M. HARRIS, « Journ. Experim. Zool. », 88°, p. 373 (1941).

Gli animali del 4° e 5° lotto, oltre che per la maggior frequenza, si distinguevano dai lotti precedenti anche per la rapidità del processo degenerativo (entro le 24 ore); questo iniziava sempre nella porzione anteriore del capo e in sette casi, esaminati istologicamente, residui del tessuto nervoso trapiantato furono rinvenuti nella cavità precordale dell'encefalo dell'ospite. Tutti gli embrioni che hanno espulso il trapianto si sono sviluppati e sono risultati perfettamente normali; ciò dimostra che le alterazioni degenerative descritte non possono imputarsi al trauma operatorio.

Dei 17 animali sopravvissuti senza espellere il trapianto, 10 presentavano anomalie morfologiche (microcefalia) e furono sacrificati 2 o 3 giorni dopo l'operazione; in essi il trapianto è stato rinvenuto nella cavità precordale dell'encefalo; rispetto ai controlli di pari età e stadio, questi animali presentavano fenomeni tipici di inibizione (cervello massiccio, poco differenziato e con zone di necrosi, vescicole ottiche ravvicinate e spostate antero-ventralmente, atrofia del vestibolo boccale) quali quelli descritti nelle larve di Anfibi anuri trattate con LiCl da Cotronei e da Guareschi e, di recente, in quelle roetgen-irradiate da Perri⁽¹³⁾.

Nelle altre 7 larve, sacrificate al termine del riassorbimento¹ del tuorlo, l'esame istologico ha rinvenuto il tessuto nervoso del donatore nella porzione cordale dell'encefalo; al livello del trapianto, nell'encefalo (midollo allungato) dell'ospite, sono state riscontrate alcune anomalie: in 3 casi ipertrofia del pavimento, in 2 casi ipetrofia della cavità ventricolare e negli altri due fenomeni regolativi di duplicazione (neppure in questi sono state osservate cellule di M. soprannumerarie; ved. Stefanelli⁽¹⁴⁾).

In tutte le larve sopravvissute il tessuto nervoso trapiantato non ha contratto rapporti intimi con il tessuto nervoso dell'ospite e si presenta come un ammasso amorfo di elementi più o meno degenerati, adiacente alle tele corioidee; la degenerazione del tessuto nervoso del donatore è più avanzata nei casi di localizzazione precordale che in quelli di localizzazione in zona cordale dell'encefalo ospite; ad ogni modo gli effetti riscontrati nell'ospite vanno imputati alla liberazione dei prodotti citolitici (specialmente sostanze proteiche, ed in particolare acido ribonucleico - ved. Perri⁽¹⁵⁾ - che nelle cellule nervose differenziate è particolarmente abbondante) dal tessuto trapiantato.

La differenza tra gli effetti notati nell'ospite a seconda della localizzazione del trapianto, inoltre, rappresenta un'ulteriore conferma del concetto di Cotronei⁽¹³⁾ sulla suscettibilità differenziale tra porzione precordale (ad elevata attività morfogenetica, e quindi più suscettibile) e porzione cordale dell'encefalo di Anfibi anuri.

(13) G. COTRONEI, « Arch. Ital. de Biol. », 71°, p. 83 (1921); « Riv. di Biol. », 3°, p. 471 (1921); C. GUARESCHI, « Mem. R. Acc. Naz. Lincei », 5°, p. 207 (1934); T. PERRI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », VIII, 2°, p. 213 (1947).

(14) AL. STEFANELLI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », VIII, 5°, p. 448 (1948).

(15) T. PERRI, « La Ricerca Scientifica », 21°, n. 7 (1951).

Onde escludere che la degenerazione del segmento di midollo spinale trapiantato fosse dovuta ad eventuali maltrattamenti subiti dal tessuto nervoso nelle operazioni di isolamento e trapianto, ho impiantato le estremità della coda (mm. 2-3 di lunghezza) di larve (di 10 gg.) sul fianco di embrioni allo stadio 16; nei 3 animali (su 9) in cui il trapianto ha attecchito, dopo 3 giorni dall'operazione l'esame istologico ha rinvenuto fusione dell'epitelio caudale della larva con l'ectoderma dell'embrione, persistenza della corda e di tessuto mesenchimatico, ma assoluta assenza di tessuto nervoso e di muscolatura striata. L'esperienza dimostra che il tessuto nervoso del midollo spinale, a differenza di altri tessuti meno differenziati, trapiantato dalla larva nell'embrione, degenera; tale degenerazione può esser dovuta o al semplice isolamento trofico o a differenze di chimismo tra ambiente larvale e quello embrionale (incompatibilità); depone per la seconda ipotesi l'aver riscontrato che la degenerazione del tessuto nervoso trapiantato nel tubo neurale è più rapida ed atipica di quello trapiantato nel fianco (massa del tuorlo); la prova decisiva emergerà dallo studio di trapianti omoplastici di tessuto nervoso di larve (esperienze in corso nel nostro laboratorio); ricordo a tal riguardo, però, che in esperienze del genere il tessuto nervoso trapiantato in condizioni di isolamento non solo attecchisce, ma ripristina anche l'attività funzionale (Stone, Weiss ⁽¹⁶⁾); i fenomeni degenerativi da me osservati a carico del tessuto nervoso larvale trapiantato, perciò, possono fin d'ora essere interpretati come dovuti a fenomeni di incompatibilità biochimica.

CONCLUSIONI: a) I movimenti morfogenetici dell'epitelio endodermale nei processi della rigenerazione del midollo spinale (formazione dell'ampolla), illustrati da Stefanelli, si verificano anche in condizioni di assoluto isolamento e vanno perciò attribuiti all'attività cellulare propria del tessuto endodermale;

b) il tessuto nervoso del midollo spinale di larve, trapiantato sul fianco e nel tubo neurale di embrioni, degenera per fenomeni di incompatibilità dovuti al diverso grado di sviluppo, di correlazioni umorali e di differenziamento tra tessuto larvale ed embrionale; quando la degenerazione non è molto rapida (nei trapianti sul fianco dell'embrione) procede dagli elementi più differenziati;

c) il tessuto nervoso del donatore può localizzarsi nella porzione precordale del tubo neurale dell'ospite, provocando in questo o fenomeni di inibizione (se il trapianto proviene da larve giovani - di 9 o 10 gg.) o totale degenerazione (se il trapianto è di larve di 24-25 gg.); può anche localizzarsi nella porzione cordale del tubo neurale, nel qual caso provoca solo alcune alterazioni locali nell'allungato; questi fatti ribadiscono il concetto di una diversa suscettibilità tra porzione cordale e precordale dell'encefalo di Anfibi anuri (Cotronei).

(16) L. S. STONE, « Journ. Experim. Zool. », 55°, p. 193 (1930); P. WEISS, « Proc. Soc. Exp. Biol. e Med. », 44°, p. 350 (1940).

Fisiologia. - *Nuove osservazioni circa gli effetti del sale sodico dell'acido p-aminosalicilico sulla secrezione gastrica del cane*^(*).
Nota^(**) di GAETANO LIVREA^(***), presentata dal Socio G. AMANTEA.

Il problema degli effetti indotti sui diversi organi ed apparati dalla somministrazione dell'acido p-aminosalicilico (a.p.a.s.) e del suo sale sodico (s.s.) ha già richiamato la nostra attenzione e noi, nell'intento di apportare un contributo sperimentale ad un problema di più immediato interesse pratico, quello cioè dei rapporti tra s.s. dell'a.p.a.s. e funzioni dello stomaco, che più sembrano risentire della somministrazione del farmaco, abbiamo già condotto e pubblicato⁽¹⁾ alcune osservazioni sul comportamento della secrezione gastrica del cane, studiato col metodo del piccolo stomaco di Pawlow-Bickel.

Le conclusioni ricavabili dall'approfondita analisi di tali osservazioni si possono riassumere in questi termini: il s.s. dell'a.p.a.s., somministrato per un periodo di 37 giorni, alla dose di g. 0.2 *pro die* e *pro Kg*, ha determinato un lieve e, ai fini clinici, non significativo aumento del lavoro secretorio nel primo periodo della fase chimica, specialmente tra la 3^a e la 5^a ora di secrezione, ma non ha influenzato il tempo di latenza della secrezione, il suo andamento complessivo e la proporzionalità tra la qualità e la quantità di succo secreto e la qualità e quantità dei cibi ingeriti.

Poichè gli anzidetti risultati non potevano costituire una base sufficiente per la delucidazione dei rapporti tra s.s. dell'a.p.a.s. e funzioni gastriche, abbiamo ripreso questo argomento, conducendo nuove ricerche sul cane ed estendendo le stesse all'uomo.

Per necessità di spazio siamo costretti a riferire qui soltanto i risultati ottenuti dalle osservazioni sul cane e rimandiamo ad altra Nota per quelli ottenuti dalle osservazioni sull'uomo.

Abbiamo creduto di condurre questo nuovo ciclo di esperimenti su un cane portatore di piccolo stomaco preparato con la tecnica di Heidenhein. Come è noto, tale piccolo stomaco, oltre che per la via umorale, ha rapporti funzionali col grande stomaco ed è collegato al sistema nervoso centrale soltanto mediante i rami vasali del simpatico, i quali penetrano con i vasi nelle pareti gastriche attraverso la grande curvatura (Openchowski⁽²⁾, Ducceschi^(3, 4)).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Roma.

(**) Pervenuta all'Accademia il 12 agosto 1952.

(***) Con la collaborazione, per la parte sperimentale, degli allievi interni Ferruccio De Stefano e Gennaro Maffei.

(1) G. LIVREA e collaboratori, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, 9, 198 (1950).

(2) H. OPENCHOWSKI, « Centralblatt f. Physiol. », 3, 1 (1889).

(3) V. DUCCESCHI, « Arch. di Fisiol. », 2, 521 (1905).

(4) V. DUCCESCHI, « Arch. di Fisiol. », 8, 579 (1910).

Abbiamo adottato questa condizione sperimentale nell'intento di studiare il comportamento della secrezione gastrica, non solo senza che gli alimenti e il s.s. dell'a.p.a.s. agissero direttamente sulla mucosa gastrica, ma anche indipendentemente dalla compartecipazione dei vaghi, i quali, si sa, sono i nervi secretori dello stomaco.

I risultati ottenuti in queste condizioni, confrontati con quelli ricavati dallo studio già comunicato dell'azione del farmaco sulla secrezione del piccolo stomaco di Pawlow-Bickel, ci avrebbero permesso di accertare eventuali variazioni dell'attività secretiva dipendenti dal vago e quindi trarre in modo più lato qualche deduzione circa un probabile interessamento o meno del meccanismo nervoso della secrezione ad opera della sostanza in esame.

Le osservazioni sono state condotte su una cagna giovane, ma sessualmente matura, del peso di Kg 12 circa, in ottime condizioni generali. Esse hanno avuto inizio sessanta giorni dopo l'intervento, quindi non soltanto all'infuori di ogni ipersecrezione paralitica, ma allorquando la capacità funzionale del piccolo stomaco si poteva ritenere, per quanto è possibile in simili casi, sufficientemente stabilizzata.

Malgrado ciò, è stato del pari nostra cura accertare con grande esattezza le modalità del lavoro secretorio del piccolo stomaco in condizioni basali. A tal uopo, circondandoci sempre delle stesse cautele sperimentali, già indicate nell'altra Nota, e somministrando sempre uno stesso pasto⁽⁵⁾, che si era mostrato adeguato al fabbisogno dell'animale, abbiamo stabilito con 17 diverse osservazioni, ciascuna della durata di 8-9 ore, una sicura media del tempo di latenza della secrezione, delle variazioni quantitative emiorarie della stessa e delle variazioni qualitative orarie del succo, queste ultime limitatamente alla determinazione dell'HCl libero e dell'acidità totale, col metodo di Linossier; e del potere peptico, col metodo di Mett.

Stabilito così il comportamento basale della secrezione e del chimismo del piccolo stomaco, siamo passati a precisare gli effetti che su di esso poteva avere la somministrazione del s.s. dell'a.p.a.s. Tale somministrazione è stata fatta per via orale, mescolando la sostanza in polvere all'anzidetto pasto quotidiano. Allo scopo di meglio evidenziare le eventuali modificazioni del lavoro secretorio, abbiamo volutamente adottato un alto dosaggio, circa g. 5 di sostanza *pro die*, pari a circa g 0.40 /Kg., dose che rappresenta a un dipresso il doppio di quella terapeuticamente attiva per i comuni mammiferi da laboratorio e per l'uomo.

I vantaggi e gli svantaggi della somministrazione in un sol tempo della sostanza sono stati discussi nell'altra Nota e non vi ritorniamo. Il trattamento è durato solo otto giorni e lo si è dovuto sospendere a quest'epoca per i netti segni d'insofferenza presentati dall'animale, sotto forma di inappetenza e di diarrea. Ovviamente, durante questo periodo abbiamo riesaminato quotidianamente, con le modalità abituali, l'andamento della secrezione ed il chi-

(5) Costituito da carne magra di cavallo g 100, latte ml 500 e pane essiccato a T° ambiente g. 200; valore calorico calcolato = 1100 C circa.

mismo del succo, e lo stesso abbiamo fatto nei sei giorni consecutivi alla cessazione del trattamento.

Avendo racchiuse in tavole e curve i dati protocollari di ciascuna esperienza, sia prima che durante e dopo il trattamento, ci è stato facile con la loro analisi ricavare queste conclusioni:

1° il comportamento basale del piccolo stomaco rispondeva pienamente ai requisiti di un piccolo stomaco di Heidenhein, come era provato dai seguenti fatti: *a*) assenza di secrezione psichica; *b*) notevole tempo di latenza; *c*) flusso secretorio prevalente nel periodo chimico della secrezione; *d*) relativa indipendenza tra quantità e qualità del succo e quantità e qualità dei cibi somministrati;

2° la somministrazione del s.s. dell'a.p.a.s. ha determinato: *a*) accorciamento del tempo di latenza di circa 4 minuti; *b*) diminuzione della quantità globale di succo secreto, cui ha corrisposto *c*) una modica diminuzione del tasso dell'HCl libero, dell'acidità totale ed un sensibile aumento della concentrazione di pepsina; *d*) definita modificazione dell'andamento della curva secretoria, consistente in un aumento di oltre il 10 % della quantità di succo secreto nel primo periodo della fase chimica della secrezione, in genere e specialmente tra la 3^a e 4^a ora, e in una diminuzione, forse parzialmente compensativa, della secrezione delle 4-5 ore successive, cioè della fase prevalentemente intestinale;

3° nel periodo immediatamente consecutivo alla cessazione della somministrazione del s.s. si è avuto: *a*) progressiva tendenza al ripristino del tempo di latenza osservato in condizioni basali; *b*) rapida, progressiva normalizzazione della quantità globale di succo secreto, cui ha corrisposto; *c*) un aumento pressoché proporzionale del tasso dell'HCl libero e dell'acidità totale ed il ripristino della concentrazione abituale di pepsina; *d*) normalizzazione dell'andamento della curva secretoria, specialmente per quanto riguarda la fase intestinale.

I grafici di totalizzazione, gli unici che per necessità di spazio possiamo allegare, esprimono con sufficiente chiarezza alcune delle conclusioni ora enunciate.

Se paragoniamo questi effetti con quelli determinati dalla somministrazione del s.s. dall'a.p.a.s. sulla secrezione del piccolo stomaco di Pawlow-Bickel, appaiono con evidenza tre fatti: 1° il diverso comportamento del tempo di latenza della secrezione; 2° la diminuzione della quantità globale di succo secreto, con ipocloridria ed iperpepsia, nel caso del piccolo stomaco di Heidenhein; 3° l'aumento del lavoro secretorio gastrico in ambedue i tipi di piccolo stomaco nel primo periodo della fase chimica, specialmente circa tra la 3^a e la 4^a ora di secrezione.

È opportuno qualche commento a questi fatti.

Il costante rilievo di un accorciamento del tempo di latenza della secrezione del piccolo stomaco di Heidenhein, durante il trattamento, e il suo rapido ripristino al normale, dopo la cessazione dello stesso, fanno pensare che la sostanza, venendo a contatto con la mucosa del grande stomaco, evoca una più pronta secrezione del piccolo con un meccanismo diverso sia da quello dell'azione locale sulla mucosa, sia da quello del riflesso locale. Se si deve escludere la stimolazione chimica per via umorale, come lascerebbe pen-

sare la prontezza della comparsa della secrezione, non rimane che il meccanismo nervoso riflesso. In altri termini l'accorciamento del tempo di latenza dimostra che la presenza nel grande stomaco del s.s. dell'a.p.a.s. rappresenta uno stimolo capace di originare impulsi eccitatori, che raggiungono le ghiandole gastriche del piccolo stomaco in via riflessa e poichè questo conserva solo l'innervazione simpatica, la sua attività secretoria può essere influenzata solo mediante riflessi simpatici per la via dei rami vasali. Considerato che negli esperimenti col piccolo stomaco di Pawlow il tempo di latenza è rimasto praticamente immutato, si dovrebbe pensare che il vago con le sue fibre inibitrici si opponga all'accorciamento del tempo di latenza. Tale supposizione potrebbe essere confortata dall'altra constatazione che l'ipersecrezione osser-

Sale sodico dell'acido p-aminosalicilico e secrezione gastrica del cane.

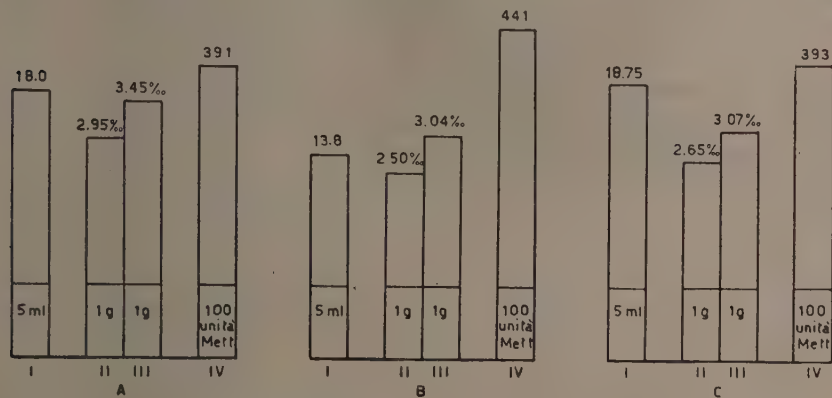


Fig. 1. — Comportamento medio della quantità e di alcune qualità del succo secreto in 8 ore dal piccolo stomaco di Heidenhein in condizioni basali (grafico A: media di 17 osservazioni), durante il trattamento con 0.40 g/Kg di s.s. di a.p.a.s. (grafico B: media di 8 osservazioni) e nei giorni successivi (grafico C: media di 6 osservazioni).

La colonna 1 esprime la quantità di succo in ml, le colonne 2 e 3 il contenuto in acido libero e totale in g°/100 di HCl, la colonna 4 la quantità totale di pepsina in unità Mett.

vabile nel primo periodo della fase chimica è più netta nel caso del piccolo stomaco di Heidenhein, quasi come se la presenza dell'innervazione vagale tendesse ad inibire l'ipersecrezione.

In quanto alla diminuzione della quantità globale di succo, alla modica ipocloridria e alla sensibile iperpepsia manifestata dal piccolo stomaco di Heidenhein, bisogna riconoscere che è difficile darne una sicura spiegazione. Sebbene per molti aspetti sia arbitrario paragonare le ripercussioni operate dal s.s. dell'a.p.a.s. sulla secrezione da pasto di un piccolo stomaco di Heidenhein con quelle operate sulla secrezione istaminica dell'uomo, noi crediamo ugualmente di dover sottolineare il fatto che anche nell'uomo, come diremo in una Nota a parte, abbiamo osservato modica iposecrezione, ipocloridria ed iperpepsia. Tale somiglianza di comportamento, appunto perchè osservata in

condizioni sperimentali molto diverse, indurrebbe ad ammettere che il s.s. dell'a.p.a.s. sia dotato della capacità di deprimere alquanto l'attività funzionale delle cellule parietali, che producono liquido ed acidi, mentre non influenza, o addirittura stimola, le cellule principali, che producono pepsina.

Cotale-capacità, diretta o indiretta, cioè mediata da una modificazione della composizione chimica del plasma, costituirebbe un rilievo di più generale interesse fisiologico e farmacologico. Infatti, dal punto di vista fisiologico potrebbe rappresentare un sostegno all'ipotesi dell'esistenza di una regolazione indipendente della funzione secretoria dei singoli gruppi cellulari di una ghiandola composta, ipotesi già emessa da Babkin sulla base, invero discutibile, degli effetti gastrosecretori dell'istamina e della pilocarpina. Dal punto di vista farmacologico, tale capacità potrebbe far pensare che possano esistere altre sostanze, le quali, almeno in determinate circostanze, sarebbero atte ad agire direttamente o indirettamente in modo indipendente sui singoli gruppi cellulari della ghiandola gastrica.

Nel caso del piccolo stomaco di Pawlow non si è verificata la lieve iposecrezione con ipocloridria; anzi, all'opposto, si è osservato un lieve aumento della quantità globale di succo con ipercloridria. Ma analizzando attentamente tale aumento del lavoro secretorio, si scorge che esso corrisponde al periodo compreso tra la 3^a e la 5^a ora circa. Come abbiamo già detto, in tale periodo l'aumento si verifica pure nel piccolo stomaco di Heidenhein, con la differenza però che in questo caso vi è una diminuzione della secrezione nelle ore successive, la quale manca nel caso del piccolo stomaco di Pawlow. Una spiegazione di quest'ultimo reperto, potrebbe essere che l'innervazione vagale del piccolo stomaco di Pawlow sia capace di sormontare la non forte inibizione operata dal s.s. dell'a.p.a.s. sulle cellule parietali.

È anche molto difficile indicare oggi l'esatta spiegazione dell'ipersecrezione del primo periodo della fase chimica, specialmente tra la 3^a e la 4^a ora circa del lavoro secretorio, ma vorremmo ugualmente fare qualche considerazione.

Come è noto, alla fase chimica, suddivisa in fase pilorica e fase intestinale, si riconosce oggi un triplice meccanismo: 1° la formazione dell'ormone gastrina nella mucosa pilorica e, forse, intestinale, in conseguenza dell'azione su queste mucose di determinate sostanze presenti negli alimenti o formatesi per effetto della loro digestione; 2° l'effetto secretagogo di alcune sostanze alimentari e di alcuni prodotti della loro digestione, dopo il loro assorbimento da parte dell'intestino tenue e forse anche della porzione pilorica dello stomaco; 3° l'effetto diretto sui centri secretori vagali ad opera di determinate sostanze circolanti nel sangue e delle modificazioni del contenuto in CO₂ del plasma e delle concomitanti modificazioni del pH.

Nel nostro caso questo terzo meccanismo, che presuppone l'intermedia-rità della via vagale, si deve escludere, in considerazione del fatto che l'aumento del lavoro secretivo si verifica anche e più nell'animale con piccolo stomaco di Heidenhein, e quindi indipendentemente dall'innervazione vagale. Se si dovesse dimostrare infondata l'ipotesi, sin oggi mai avanzata e quindi non ancora sottoposta al vaglio dell'esperimento, che determinate sostanze

circolanti nel sangue o gli stati di eccesso o di deficienza di acidi o di basi possono agire sulla secrezione gastrica attraverso l'innervazione simpatica, l'aumento del lavoro secretorio osservato nell'anzidetto periodo della digestione, sia nel piccolo stomaco di Pawlow che di Heidenhein, si potrebbe spiegare ammettendo che il s.s. dell'a.p.a.s. causi tardivamente una moderata stimolazione della secrezione, agendo non dallo stomaco, ma dall'intestino e quindi attraverso un meccanismo umorale, cioè o stimolando la formazione della gastrina o agendo da stimolante sulla secrezione in quanto alcalo.

Secondo noi quest'ultima possibilità è molto verisimile, 1) se si tiene conto che, in base a nostre determinazioni potenziometriche la K di dissociazione dell'a.p.a.s. da noi adoperato è di $9,8 \cdot 10^{-5}$ e quindi il pH calcolato delle soluzioni diluite del s.s. si aggira intorno a 8 e, 2) se si considera la letteratura circa l'influenza degli alcali somministrati per bocca. Da tale letteratura, iniziata da Claude Bernard ⁽⁶⁾ e arricchita dai contributi di numerosi altri Autori più o meno recenti, tra cui Spencer e collaboratori ⁽⁷⁾, Crohn ⁽⁸⁾, Hardt e Rivers ⁽⁹⁾, Lockwood e Chamberlin ⁽¹⁰⁾, T. E. Boyd ⁽¹¹⁾, Apperly e collaboratori ⁽¹²⁾, Alley ⁽¹³⁾, Adams e collaboratori ⁽¹⁴⁾, ecc., appare complessivamente che determinati alcali (bicarbonato e carbonato di sodio, carbonato di calcio, ossido di magnesio, polveri di Sippy) dopo un iniziale periodo di neutralizzazione dell'acidità del contenuto gastrico, inducono un aumento della secrezione acida ⁽¹⁵⁾. Tale aumento è stato controllato per 2 h $\frac{1}{2}$ nei due cani di Boyd, muniti di piccolo stomaco di Pawlow, e per 9 h su 24 h nei due cani di Adams e collaboratori, attrezzati con piccolo stomaco di Cope ⁽¹⁶⁾. Specialmente in uno di questi cani, il maggiore aumento della secrezione acida è stato osservato nel periodo compreso tra la 3^a e la 6^a h.

Dopo quanto precede ci sembra di poter concludere che il s.s. dell'a.p.a.s., somministrato col pasto, ha determinato nel piccolo stomaco di Heidenhein: a) accorciamento del tempo di latenza della secrezione molto probabilmente attraverso un meccanismo nervoso simpatico; b) modica iposecrezione glo-

(6) CLAUDE BERNARD, *Leçons de Physiologie opératoire*, Paris, 570 (1879).

(7) W. H. SPENCER, G. P. MEYER, M. E. REHFUSS e P. B. HAWK, « Amer. J. Physiol. », 39, 459 (1915).

(8) B. B. CROHN, « Amer. J. med. Sci. », 155, 801 (1918).

(9) L. L. HARDT e A. B. RIVERS, « Arch. Int. Med. », 31, 171 (1923).

(10) B. C. LOCKWOOD e H. G. CHAMBERLIN, « Arch. Int. Med. », 32, 74 (1923).

(11) T. E. BOYD, « Amer. J. Physiol. », 68, 121 (1926) e 71, 455, 464 (1925).

(12) F. L. APPERLY e M. G. CRABTREE, « J. Physiol. », 73, 331 (1931).

(13) A. ALLEY, « Amer. J. digest. Dis. Nutr. », 1, 550 (1934).

(14) W. L. ADAMS, C. S. WELCH e B. B. CLARK, « Amer. J. Physiol. », 139, 356 (1943).

(15) È notevole che né gli anzidetti Autori, né diversi altri da noi non citati per brevità, che si sono occupati dell'argomento, hanno soffermato la loro attenzione sull'influenza esercitata dagli alcali sulla secrezione di pepsina. Tale argomento resta da investigare.

(16) O. COPE, C. E. MACMAHON, A. HAGSTROMER e R. H. THOMPSON, « Arch. Surgery », 40, 717 (1940). Il piccolo stomaco di Cope è ricavato dalla parete anteriore del corpo e conserva intatta l'innervazione vagale. Il suo stomaco giace alto sul fianco dell'animale e, poichè la tasca penzola nell'addome, lo stesso piccolo stomaco, con adatti accorgimenti protettivi, serve come recipiente di raccolta del succo.

bale, con lieve ipocloridria e sensibile iperpepsia per inibizione funzionale delle cellule parietali e stimolazione delle cellule principali; c) ipersecrezione relativa della prima parte della fase chimica del lavoro secretorio, agendo, al pari degli altri alcali, come stimolante tardivo.

Nel piccolo stomaco di Pawlow ha determinato soltanto l'effetto c) e tale diversità di comportamento con ogni verosimiglianza è da imputare all'innervazione vagale, la quale si oppone alla modificazione della secrezione, ostacolando con le sue fibre inibitrici l'accorciamento del tempo di latenza e sormontando con le sue fibre secretrici la non forte inibizione operata dal farmaco.

Particolare interesse sembra poi rivestire il fatto che il s.s. di un acido aromatico, qual'è l'a.p.a.s., abbia la capacità di agire in modo diverso sui differenti gruppi cellulari delle ghiandole gastriche, deprimendone alcuni e stimolandone altri. Tale diversità di azione farebbe supporre l'esistenza di una regolazione indipendente della funzione secretoria dei singoli gruppi cellulari. Se tale regolazione esiste in realtà, si apre la via a nuove indagini fisiologiche e farmacologiche.

Fisiologia. — *Circa gli effetti del sale sodico dell'acido p-aminosalicilico sulla secrezione gastrica istaminica dell'uomo*^(*). Nota^(**) di GAETANO LIVREA, L. CAMPANELLI, F. DE STEFANO e G. MAFFEI^(***), presentata dal Socio G. AMANTEA.

In due precedenti Note⁽¹⁾ ⁽²⁾ abbiamo riportato i risultati di alcune nostre osservazioni col metodo del piccolo stomaco di Pawlow e di Heidenhein, tese ad accertare gli effetti svolti dal sale sodico dell'acido p-aminosalicilico (s.s. dell'a.p.a.s.) sulla secrezione gastrica del cane.

Partiti coll'intendimento di apportare un contributo sperimentale, che mancava, al problema dei rapporti tra l'anzidetta sostanza e funzioni dello stomaco, abbiamo potuto mettere in evidenza dei fatti che sembrano deporre per un più generale interesse fisiologico e farmacologico, e cioè che il derivato di un acido aromatico, quale è l'a.p.a.s., nella forma di sale sodico, avrebbe la capacità di agire in modo diverso sui differenti gruppi cellulari delle ghiandole gastriche, deprimendo alquanto l'attività funzionale delle cellule parietali, che secernono liquido ed acido, e non influenzando o addirittura

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Roma.

(**) Pervenuta all'Accademia il 12 agosto 1952.

(***) Il dr. LUIGI CAMPANELLI ha collaborato per quanto riguarda la preparazione dei soggetti e il sondaggio frazionato dello stomaco. Gli allievi interni Ferruccio De Stefano e Gennaro Maffei hanno collaborato per quanto riguarda l'esame del chimismo gastrico (G. Amantea).

(1) G. LIVREA e collaboratori, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, 9, 198 (1950).

(2) G. LIVREA, questo fascicolo, pp. 182-188.

stimolando le cellule principali, che secernono pepsina. Tale diversità di azione dal punto di vista fisiologico potrebbe costituire un sostegno all'ipotesi, emessa da Babkin, di una regolazione indipendente della funzione secretoria dei singoli gruppi cellulari di una ghiandola composta e, dal punto di vista farmacologico, potrebbe far pensare alla possibilità dell'esistenza di sostanze capaci di agire in modo indipendente o in modo opposto sui singoli gruppi cellulari della ghiandola gastrica.

Gli anzidetti risultati e il loro probabile significato hanno sollecitato in noi ovviamente il più forte interesse di precisare gli effetti del s.s. dell'a.p. a.s. sulla secrezione istaminica dell'uomo e in questa Nota vogliamo appunto render conto di tali effetti.

In vista del fatto che la risposta secretoria gastrica allo stesso pasto e allo stesso stimolo istaminico varia di volta in volta in limiti abbastanza ampi, per trarre delle conclusioni sicure circa il comportamento della secrezione gastrica, quali che siano le condizioni sperimentali, è necessario ottenere valori medi da un largo numero di esperimenti. Ora, nel nostro caso, mentre ci è stato possibile largheggiare in osservazioni, allorquando abbiamo condotto gli esperimenti sui cani, uguale larghezza non ci è stata possibile per ovvie ragioni nelle osservazioni con l'uomo. In queste, come meglio vedremo innanzi, ci siamo dovuti limitare in ogni soggetto a tre, in qualche caso a quattro determinazioni del comportamento della secrezione istaminica: una o due prima del trattamento e due o tre nel corso dello stesso. Tuttavia, pur con questa limitazione, noi crediamo che la nostra indagine possa costituire ugualmente una base sufficiente per conclusioni attendibili.

Le osservazioni sono state condotte nel periodo compreso tra l'ottobre del 1950 e il giugno del 1951 su 6 sottufficiali della Marina Militare, dell'età media di anni 29. Tutti erano affetti da modesta e monolaterale infiltrazione nodulare apico-sottoapicale, afebrile o lievemente febbrile; tutti erano privi di disordini in atto o pregressi delle funzioni digerenti e tutti, per un adeguato periodo di tempo prima del trattamento e durante il trattamento, sono stati mantenuti a riposo e sottoposti alla stessa alimentazione, la quale, variando qualitativamente entro limiti alquanto ristretti, assicurava 3500 calorie circa ed era costituita di cibi facilmente digeribili, cioè la cui durata di permanenza media nello stomaco, secondo Penzoldt, era di 4 ore circa. Tutti, infine, si sono sottoposti volontariamente e senza apprensione alla ricerca, dopo essersi abituati con qualche prova in bianco alla pratica del sondaggio. La necessità di far confluire tante condizioni ha inciso notevolmente sul numero dei soggetti utilizzabili per il nostro studio, ma noi abbiamo creduto anteporre l'omogeneità all'eterogeneità di un grande gruppo, tra l'altro e soprattutto, per porci al riparo sia dall'acidosi da t.b.c. e da febbre, sia dalla ripercussione diretta o indiretta operata sulle funzioni specifiche dello stomaco dalle affezioni organiche o funzionali dell'apparato digerente, dalla inadeguatezza della dieta e dai fattori psichici.

Il sondaggio gastrico è stato praticato al mattino, a digiuno, con la sonda duodenale armata, allo scopo di evitare l'ingestione di cospicue quantità di saliva e di muco. Onde poter estrarre nei limiti del possibile tutto il contenuto raccolto nella cavità gastrica, una volta introdotta la sonda si faceva assumere al soggetto la posizione supina, alquanto reclinata, cioè con le spalle site più in basso del bacino. Praticata la prima estrazione, nel caso che nello stomaco a digiuno vi fosse del succo, si lasciava la sonda in sito e s'iniettava un mg di istamina esattamente dosata e si procedeva di poi colla pratica del sondaggio frazionato, di quarto d'ora in quarto d'ora, sino, o presso che sino, all'estinzione della stimolazione istaminica, comunque mai per meno di 75 minuti. Del succo estratto si prendeva nota della quantità, del colore, dell'odore, della presenza di muco, di residui del pasto serale (mai riscontrati) ecc.; indi si filtrava il succo e col filtrato, dopo averne notato nuovamente i caratteri fisici, si eseguivano le prove chimiche, limitatamente ai dosaggi dell'HCl libero e dell'acidità totale, col metodo di Linossier, e del potere peptico, col metodo di Mett.

Dopo aver stabilito e fissato in diagramma l'andamento della secrezione gastrica e le qualità del succo proprie dei singoli soggetti, in conseguenza dello stimolo istaminico, ognuno di essi veniva sottoposto al trattamento col s.s. dell'a.p.a.s., alla dose di g. 12 *pro die*, refratta in quattro dosi uguali e dopo 6, 15 e 20 giorni di trattamento, corrispondenti rispettivamente a 72, 180 e 240 g di farmaco, si riesaminava l'andamento della secrezione ed il chimismo gastrico, tracciando le nuove curve relative. Un solo soggetto, caso III, è stato esaminato anche dopo l'ingestione di g. 1050 della sostanza in questione.

L'analisi comparativa dei diagrammi pertinenti a ciascun soggetto ha dimostrato con chiarezza che la somministrazione del s.s. dell'a.p.a.s. alle dosi suddette non ha avuta alcuna ripercussione notevole sulla risposta secretoria dello stomaco allo stimolo istaminico.

Un'esposizione dettagliata dei rilievi cui si presterebbe ogni singolo caso sarebbe troppo estesa, ma essa, ai nostri fini, non è né necessaria né utile.

In sintesi basti dire che, pur presentando ogni soggetto un comportamento suo proprio, cinque volte su sei si è avuta: *a*) una graduale e or più or meno pronunciata diminuzione della secrezione; *b*) una lieve diminuzione dell'HCl libero e dell'acidità totale; *c*) un costante aumento del potere peptico, il quale è stato particolarmente pronunciato là dove era inizialmente basso.

Nell'unico caso aberrante (caso V) si è avuto invece: *a*) un lieve, graduale aumento della secrezione; *b*) un lieve, non significativo aumento dell'HCl libero e dell'acidità totale; *c*) un variabile comportamento del potere peptico, ora in aumento, all'inizio del ciclo di cura, ora in lieve diminuzione, alla fine del ciclo.

Non potendo riportare per mancanza di spazio i diagrammi dimostranti l'andamento della secrezione e le modificazioni qualitative del succo di quarto d'ora in quarto d'ora, prima e dopo 6, 15 e 20 giorni di trattamento, a chiarimento di quanto abbiamo ora detto ci limitiamo a riportare dei grafici

riassuntivi, che indicano le quantità globali di succo e le sue qualità, rispettivamente prima e nell'ultimo giorno di trattamento.

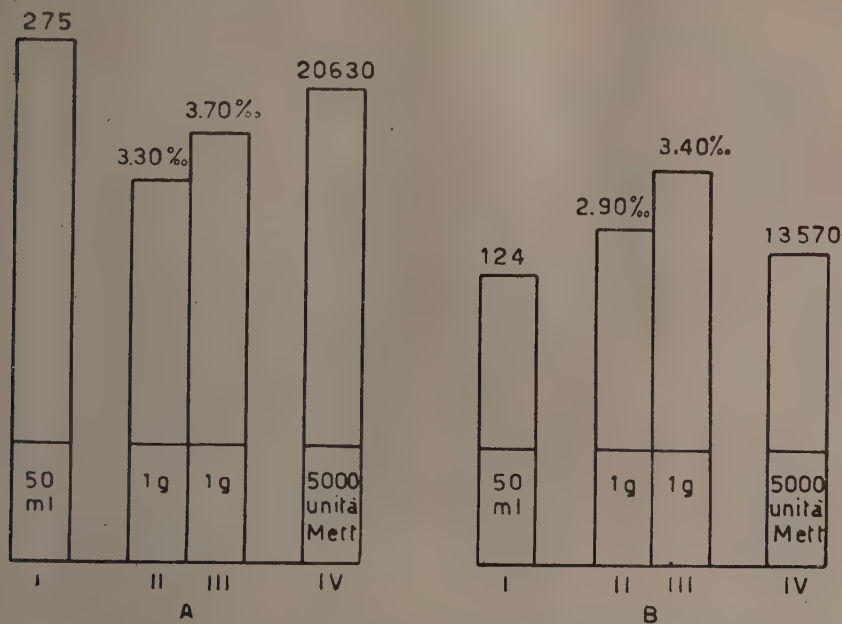


Fig. 1. — Comportamento della risposta secretoria delle ghiandole gastriche allo stimolo istaminico prima (A) e nell'ultimo giorno di trattamento (B) con s.s. dell'a.p.s.

La colonna 1 esprime la quantità di succo in ml, le colonne 2 e 3 il contenuto in acido libero e totale in g/100 di HCl, la colonna 4 la quantità totale di pepsina in unità Mett.

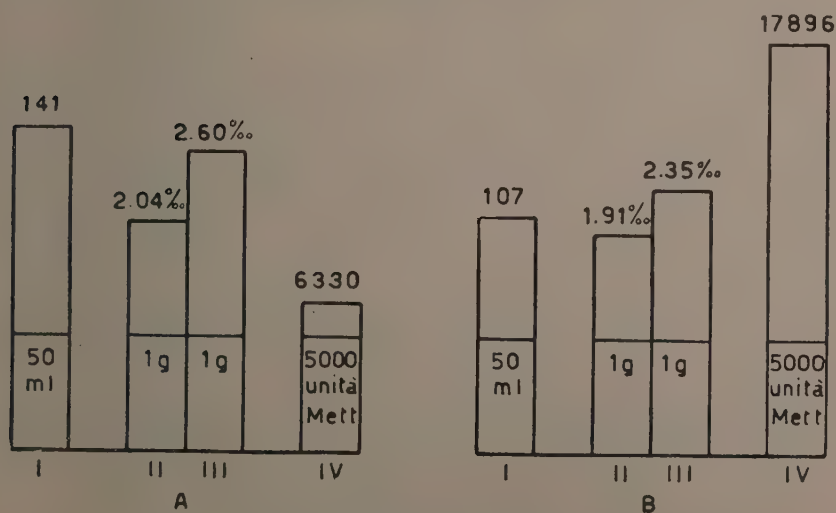


Fig. 2 (Vedi leggenda fig. 1).

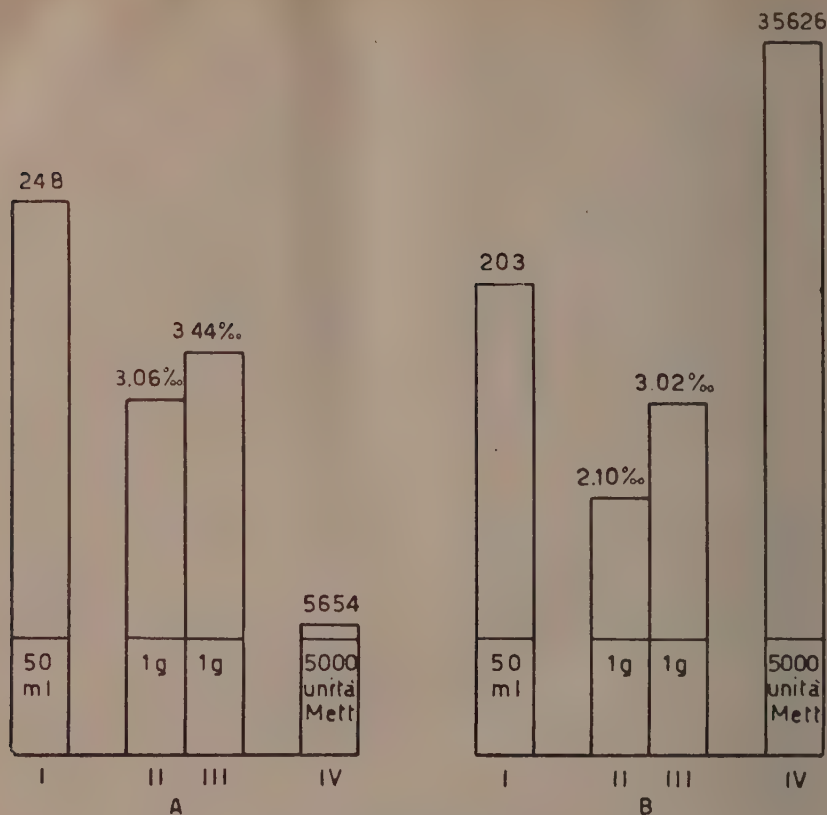


Fig. 3 (Vedi leggenda fig. 1).

Quasi contemporaneamente a noi, due altri autori, Montanari e Pollastri⁽³⁾, sono stati indotti all'esplorazione funzionale dello stomaco dalla pressochè costante comparsa di disturbi gastro-intestinali di varia intensità nei tubercolotici trattati con l'a.p.a.s. o col suo s.s. Anche questi Autori hanno adoperato il metodo del sondaggio gastrico postistaminico, ma hanno soffermato la loro attenzione soltanto sulle variazioni quantitative della secrezione e dell'HCl libero e totale e trascurato il comportamento del potere digestivo.

I nostri risultati si accordano con i loro soltanto in ciò che, come i loro, permettono di affermare che le ripercussioni indotte sul chimismo gastrico dal s.s. dell'a.p.a.s. non sono tali da rappresentare una vera e propria alterazione della funzione gastro-secretoria.

Per il resto non possiamo concordare con Montanari e Pollastri, in quanto che questi Autori, mentre per azione dell'a.p.a.s. hanno riscontrato una ten-

(3) A. MONTANARI e G. POLLASTRI, «Min. medica», 42, 217 (1951, I).

denza alla diminuzione della concentrazione cloridrica nel 41,5 % dei casi, per azione del s.s., al contrario di noi, hanno osservato una tendenza all'aumento nel 50% dei casi. Inoltre, mentre essi dichiarano che nelle loro ricerche «è risultata sempre chiaramente la mancanza di un qualsiasi rapporto di interdipendenza tra le variazioni della quantità del secreto e quella della concentrazione cloridrica», noi invece dobbiamo asserire che, così come è stato sostenuto da Pawlow e dai numerosi suoi allievi, le variazioni di acidità sono state sempre strettamente legate alle variazioni della quantità di succo secreto.

È difficile rendersi conto del perchè di tale discordanza, ma forse la ragione può stare in ciò che le condizioni di osservazione di Pollastri e Montanari sono state alquanto diverse dalle nostre e cioè: per quanto riguarda il farmaco, più basso dosaggio *pro die*, *pro dose* e per ciclo di cura; per quanto riguarda i soggetti, ammalati non omogenei, con lesioni polmonari variamente estese, in diversa fase evolutiva, con segni di tossiemia, anche se non molto manifesta, e non si sa né se privi di disordini in atto o pregressi delle funzioni digerenti, né con quale dieta alimentati; per quanto riguarda il metodo, controllo del chimismo soltanto prima del trattamento e 24 ore dopo la fine dello stesso.

Circa il potere digestivo, prescindendo qui dalla questione opinabile se l'istamina inibisca o meno la funzione secretoria delle cellule peptiche, ci sembra importante sottolineare che nel corso del trattamento col s.s. dell'a.p.a.s. il potere peptico del succo da istamina, eccetto che in un caso, è stato costantemente più elevato che in condizioni basali. Tale comportamento, considerato in uno con la diminuzione graduale e or più or meno pronunciata della quantità di secreto e della sua concentrazione in acido libero e totale, corrisponde a quello osservato nel cane col piccolo stomaco di Heidenhein e siamo quindi indotti a concludere che probabilmente anche nell'uomo i differenti gruppi cellulari delle ghiandole gastriche risentono in modo diverso del farmaco o delle condizioni create nel plasma dal farmaco, così che, mentre le cellule parietali sarebbero alquanto inibite nella loro produzione di liquido e di acido, le cellule principali non lo sarebbero, o, addirittura, sarebbero stimolate ad una maggiore secrezione.

La considerazione della invero non molto ricca letteratura circa la diretta dipendenza dell'attività chimica delle ghiandole gastriche dalle modificazioni della composizione del sangue ci fanno propendere per una azione diretta del farmaco.

Poichè non è possibile, né è opportuno, discutere qui di questo campo ancora inesplorato, ci limitiamo a ricordare solo i fatti utili alla nostra disamina e cioè quelli riguardanti gli effetti gastrosecretori della acidosi e dell'alcalosi.

Per quanto riguarda l'acidosi, Browne e Vineberg⁽⁴⁾ hanno dimostrato che nel cane anestetizzato l'introduzione in circolo di una soluzione acida arresta la secrezione gastrica provocata dalla stimolazione vagale, ma non

(4) J. S. L. BROWNE e A. M. VINEBERG, « J. Physiol. », 75, 345 (1932).

arresta la secrezione istaminica. Se invece l'acidosi preesiste, né la stimolazione vagale, né la forte (4 mg) e reiterata stimolazione istaminica sono capaci di indurre l'abituale effetto secretorio.

Per quanto riguarda la somministrazione di alcali, ricordiamo che gli alcali, dopo un iniziale periodo di neutralizzazione dell'acidità del contenuto gastrico (Adams e coll. ⁽⁵⁾), determinano un aumento della secrezione acida, sia venendo a contatto con la superficie della mucosa pilorica (Lönquist ⁽⁶⁾, Savich e Zeljony ⁽⁷⁾), sia provocando uno stato di alcalosi, dopo essere stati assorbiti ⁽⁸⁾.

Orbene, che il s.s. dell'a.p.a.s. sia una sostanza alcalina è dimostrato dal fatto che il pH delle sue soluzioni diluite, calcolato in base alla K di dissociazione dell'a.p.a.s., si aggira intorno a 8, e che la somministrazione orale di esso alle dosi suddette sia capace di provocare nei soggetti uno stato di alcalosi è dimostrabile: 1° con la misurazione del pH urinario, la quale rivela un aumento dell'eliminazione urinaria delle basi, così come si ha nella correzione spontanea dell'alcalosi e 2° con il comportamento del *bicarbonato tollerante test* di Palmer ed Henderson, il quale rivela in tutti i soggetti trattati con s.s. dell'a.p.a.s. un maggiore aumento del pH urinario dopo ingestione di bicarbonato di sodio ⁽⁹⁾.

Dopo quanto abbiamo prima riferito, in queste condizioni di alcalosi, avremmo dovuto aspettarci con ogni verosimiglianza una più forte risposta delle cellule parietali allo stimolo istaminico, cioè un'aumentata quantità di succo fortemente acido, e probabilmente nessuna risposta dalle cellule principali ⁽¹⁰⁾, cioè assenza o molto bassa concentrazione di pepsina. Invece, all'opposto, abbiamo osservato una depressione dell'attività funzionale delle cellule parietali e una stimolazione delle cellule principali. Tale peculiare effetto è dovuto con ogni probabilità all'azione diretta della sostanza sulle ghiandole gastriche ed esso, come dicevamo all'inizio, può rivestire una più generale importanza fisiologica e farmacologica, in quanto che potrebbe costituire un sostegno all'ipotesi della regolazione indipendente della funzione secretoria dei singoli gruppi cellulari delle ghiandole gastriche e a quella dell'esistenza di sostanze capaci di agire in modo indipendente su tali gruppi.

Dopo quanto precede ci sembra di poter concludere:

I. Le ripercussioni indotte sul chimismo gastrico dell'uomo dal s.s. dell'a.p.a.s. non sono tali da rappresentare né una vera e propria alterazione della funzione gastro-secretoria, né una base sufficiente ad intravedere la spiegazione della gravità e del tipo dei disturbi indotti dal farmaco in alcuni soggetti.

(5) W. L. ADAMS e A. M. VINEBERG, « Amer. J. Physiol. », 139, 356 (1943).

(6) B. LÖNNQUIST, « Skan. Arch. Physiol. », 18, 194 (1906).

(7) V. V. SAVICH e G. ZELJONY, « Pflug. Arch. ges. Physiol. », 150, 129 (1913).

(8) Per la letteratura circa questo punto, veggasi la nota già citata (2).

(9) Le ricerche di cui ai punti 1° e 2° sono state fatte eseguire al dott. Gioacchino Chiu-
cini, il quale ne riferirà estesamente in una Nota a parte.

(10) Non ci risulta che sia stata investigata l'influenza esercitata dall'alcalosi sulla secrezione di pepsina.

II. Come nel cane dotato di piccolo stomaco di Heidenhein, tali ripercussioni, poichè consistono in una più o meno pronunciata iposecrezione con lieve ipocloridria e sensibile iperpepsia, indurrebbero ad ammettere che il s.s. dell'a.p.a.s. è dotato della capacità di deprimere alquanto l'attività secretoria delle cellule parietali, che nelle ghiandole gastriche producono liquido ed acido, e di non influenzare o addirittura stimolare le cellule principali, che producono pepsina.

III. Se la supposizione è esatta, tale capacità può essere diretta, cioè propria della sostanza, o indiretta, cioè mediata da una modificazione della composizione chimica del sangue. È molto più probabile la capacità diretta. Difatti l'ingestione frazionata di notevoli quantità di s.s. dell'a.p.a.s., sale che sappiamo essere alcalino, determina uno stato di alcalosi, come è dimostrato dall'aumento della eliminazione urinaria delle basi e dal comportamento del *bicarbonato tollerante test*, e ora noi sappiamo dalla letteratura che uno stato di alcalosi dovrebbe determinare un aumento della secrezione acida e non un'iposecrezione con ipocloridria.

IV. La nuova constatazione che anche nell'uomo il s.s. del derivato di un acido aromatico, quale è l'a.p.a.s., avrebbe la capacità di agire in modo diverso sui differenti gruppi cellulari delle ghiandole gastriche, cioè deprimendone alcuni e stimolandone altri, renderebbe più probabile l'ipotesi sia dell'esistenza di una regolazione indipendente della funzione secretoria dei singoli gruppi cellulari di una ghiandola composta, sia dell'esistenza di sostanze capaci di agire in modo indipendente e addirittura opposto sui singoli gruppi cellulari delle ghiandole gastriche.

D. DE BLASI e U. AMALDI.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta dell'8 novembre 1952

Presiede il Vice Presidente F. GIORDANI

NOTE DI SOCI

Analisi matematica. — *Fondamenti per una teoria generale delle funzioni pseudo-analitiche di una variabile complessa.* Nota I ^(*) del Corrisp. RENATO CACCIOPOLI.

Un tratto saliente della teoria delle funzioni analitiche è il contrasto fra l'inesauribile ricchezza e complessità dei risultati e l'estrema semplicità delle ipotesi, anzi dell'unica ipotesi fondamentale: la derivabilità complessa, ossia — dal punto di vista geometrico — il carattere conforme della trasformazione piana associata. Vien fatto allora di chiedersi se alcuni di questi risultati non possano dedursi da qualche ipotesi molto più generale: un'ipotesi per dir così « qualitativa », nel senso che sostituisca con disequazioni differenziali le equazioni (condizioni di Cauchy) esprimenti la derivabilità, ossia con semplici limitazioni — magari comunque larghe — le eguaglianze fra angoli della rappresentazione conforme. Naturalmente per questa via buona parte della teoria andrebbe abbandonata; per esempio è ovvio che non vi sarebbe più da parlare di prolungamento *unico*. Ma la parte residua, quella dei risultati in qualche modo « qualitativi », non sarebbe trascurabile: andamento in grande, teoremi di Picard e connessi (Schottky, Landau, Bloch), famiglie normali; fino ad un certo punto anche l'uniformizzazione.

Non mancano in quest'indirizzo ricerche frammentarie, né risultati particolari notevoli: in ordine di tempo vanno menzionati lavori di Grötsch, Ahlfors, Lavrentieff, Teichmüller, Morrey, Pfluger ⁽¹⁾. Io mi sono proposto

(*) Presentata nella seduta dell'8 novembre 1952.

(1) H. GRÖTSCH, « Leipzig Ber. », 80 (1928); L. AHLFORS, « Acta Math. », 65 (1935); M. LAVRENTIEFF, « Rec. Math. Moscou », 42 (1935); O. TEICHMÜLLER, « Deutsche Math. », 3 (1938); C. B. MORREY, « Trans. Am. Math. Soc. », 43 (1938); A. PFLUGER, « Comptes Rendus », 231 (1950); « Ann. Inst. Fourier », 2 (1950), J. HERSCH e A. PFLUGER, « Comptes Rendus », 234 (1952).

di costruire una teoria generale delle funzioni *pseudo-analitiche* ⁽²⁾; ne ho esposto, molto succintamente, le premesse ed i principali sviluppi in due Note dei «Comptes Rendus» ⁽³⁾. Nella presente Nota e nella successiva approfondisco innanzi tutto lo studio della mia definizione di funzione pseudo-analitica, poichè è questa che condiziona tutto il successo della teoria; espongo poi più completamente, per quanto ancora piuttosto sommariamente, i risultati già enunciati, aggiungendone diversi nuovi.

L'interesse principale di tali ricerche mi sembra risiedere in ciò che non vi si fa ricorso alla teoria delle funzioni analitiche, ma che al contrario argomenti importanti di questa, e non fra i meno riposti (per esempio i teoremi del «ciclo di Picard»), vengono da esse presentati in una luce nuova, attraverso l'analisi dell'aspetto che ne abbiamo chiamato «qualitativo».

1. Consideriamo due variabili complesse $z = x + iy$, $w = u + iv$, ed una funzione continua

$$w = w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

definita in un campo A (insieme limitato aperto internamente connesso) del piano z .

Su questa, cioè sulle funzioni $u(x, y)$, $v(x, y)$, facciamo le seguenti ipotesi fondamentali:

I) $u(x, y)$, $v(x, y)$ sono assolutamente continue in x ed in y per quasi tutti i valori di y e di x rispettivamente, e le loro derivate prime sono di quadrato sommabile, in ogni porzione interna di A.

II) Posto

$$J = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \quad , \quad \Phi = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| \quad , \quad \varphi = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| ,$$

si ha quasi ovunque in A

$$(I) \quad J \geq 0 \quad , \quad \varphi \geq \mu \Phi ,$$

essendo μ un numero positivo ≤ 1 .

Queste ipotesi implicano che $u(x, y)$, $v(x, y)$ sono quasi ovunque *localmente lipschitziane* e però quasi ovunque differenziabili ⁽⁴⁾.

Posto poi

$$E = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \quad , \quad F = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad G = \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 ,$$

(2) Questo termine è stato introdotto da PFLUGER (1ª nota citata). Gli fa riscontro l'altro «pseudo-conforme» che propongo più giù in luogo di «quasi conforme»; essendo opportuno chiamare *quasi* conformi soltanto le rappresentazioni *limiti* di rappresentazioni conformi, come quelle delle superficie non regolari quadrabili. Né v'è da temere confusione con le trasformazioni pseudo-conformi della teoria delle funzioni analitiche di più variabili complesse.

(3) 16 luglio e 21 luglio 1952.

(4) Ved. V. STEPANOFF, *Ueber totale Differenzierbarkeit*, «Math. Ann.», 90 (1923).

si ha

$$\begin{cases} 2\Phi^2 = E + G + [(E + G)^2 - 4(EG - F^2)]^{1/2}, & 2\varphi^2 = E + G - [(E + G)^2 - 4(EG - F^2)]^{1/2} \\ \Phi^2 + \varphi^2 = E + G, & \Phi^2 \varphi^2 = EG - F^2 = J^2 \end{cases}$$

$$(3) \quad \mu J \leq \varphi^2 \leq \Phi^2 \leq \frac{1}{\mu} J, \quad J \geq \frac{\mu}{1 + \mu^2} (\Phi^2 + \varphi^2).$$

Diremo che $w(z)$ è una funzione *pseudo-analitica*, di parametro μ . Ad ogni valore di $\mu \leq 1$ corrisponde una classe \mathcal{C}_μ di funzioni pseudo-analitiche; per $\mu = 1$ si ritrova la classe \mathcal{C}_1 delle funzioni analitiche, in base a risultati ben noti.

2. Le equazioni

$$(4) \quad u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$$

definiscono una *trasformazione piana* T di z in w , ossia una *superficie piatta* S , portata dal piano w ⁽⁵⁾; chiamiamo T una trasformazione *pseudo-conforme di parametro μ* , ossia una rappresentazione pseudo-conforme di S su A . Ad ogni punto z_0 di A corrisponde un punto $P(z_0)$ di S , avente per *traccia* sul piano w il punto $w_0 = w(z_0)$.

Per l'ipotesi I), si può costruire una successione $\{u_n(x, y), v_n(x, y)\}$ di coppie di funzioni, cioè di superficie piatte S_n , tali che

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, y) = u(x, y), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x, y) = v(x, y) \quad (S_n \rightarrow S)$$

uniformemente in ogni porzione chiusa di A , e che dippiù le derivate parziali prime siano ivi convergenti in media di ordine 2; u_n e v_n essendo funzioni regolari quanto si voglia, anzi addirittura polinomi ⁽⁶⁾. Ne segue che su S aree e lunghezze hanno le espressioni classiche: cioè che se D ed L sono un dominio ed una linea interni ad A , l'area di TD e la lunghezza di TL sono rispettivamente

$$\iint_D J dx dy = \iint_D \sqrt{EG - F^2} dx dy, \quad \int_L \sqrt{E dx^2 + 2 F dx dy + G dy^2}.$$

La seconda espressione non è peraltro valida che « in generale »: intendiamo con ciò che essa si applica a *quasi tutti* i segmenti $x = \text{cost.}$, $y = \text{cost.}$, come anche a quasi tutte le linee $x' = \text{cost.}$, $y' = \text{cost.}$ essendo $x' = x'(x, y)$, $y' = y'(x, y)$ una trasformazione regolare (a jacobiano positivo) di A ; ma ciò è inessenziale ai nostri fini ⁽⁷⁾.

(5) Per le poche semplici nozioni che qui occorrono della teoria delle *superficie parametriche*, in ispecie per quanto riguarda la nozione di *molteplicità*, mi attengo alla breve trattazione che ne ho data recentemente (questi « Rendiconti », VIII, 12, fasc. 3 e 4 (1952)).

(6) Per esempio i noti polinomi di Stieltjes.

(7) Per esempio l'espressione sarà valida per quasi tutte le circonferenze di dato centro; è questo il caso che sostanzialmente ci occorre.

Siano z_0 un punto del piano z , I un intorno (per esempio circolare o quadrato) di $w_0 = w(z_0)$ nel piano w : I stacca su S un intorno $\Delta = TC$ di $P(z_0)$ sempre che l'insieme dei punti z per i quali $w(z) \in I$ ammetta un componente C tutto interno ad A , contenente z_0 . La molteplicità p di w_0 per l'intorno Δ è il rapporto (intero positivo) fra le aree di Δ e di I . Se questa molteplicità acquista un valore $q > 1$ per tutti gli intorni I sufficientemente ristretti, $P(z_0)$ risulta per S un punto di diramazione di ordine $q - 1$ (necessariamente finito).

3. Sia $P(z_0)$ un punto di S dotato di intorno: consideriamo nel piano w una corona circolare K di centro $w(z_0) = w_0$ e raggi $r_1 < r_2$, e indichiamo con c_r la circonferenza concentrica di raggio r compreso fra r_1 e r_2 , con K_1, K_2 i cerchi di circonferenza c_{r_1}, c_{r_2} . Supponiamo che K_2 stacchi su S un intorno di $P(z_0)$, $\Delta = TD_2$, e diciamo $\Gamma = TD$ la porzione di Δ con traccia su K , $\Gamma_1 = TD_1$, la porzione residua.

Ammettiamo poi per un momento che S sia regolare, e indichiamo con λ_r la curva di Γ avente traccia su c_r , con ds l'elemento d'arco, con $\alpha(r_1, r_2)$ l'area della porzione D di A cui corrisponde Γ ; avremo

$$(6) \quad \alpha(r_1, r_2) = \int_{r_1}^{r_2} dr \int_{\lambda_r} \frac{ds}{\Phi} \cong \frac{\left[\int_{r_1}^{r_2} dr \int_{\lambda_r} \frac{ds}{\Phi} \right]^2}{\int_D \Phi^2 dx dy} \cong \frac{\left[\int_{r_1}^{r_2} l(r) dr \right]^2}{\int_D \Phi^2 dx dy},$$

essendo $l(r)$ la lunghezza della curva di K cui corrisponde λ_r .

Mediante il passaggio al limite (5), dalla precedente limitazione stabilita per la superficie approssimante S_n si ricava, tenendo presente la prima delle (3),

$$\alpha(r_1, r_2) > 4 \mu d^2 \frac{(r_2 - r_1)^2}{\sigma(r_1, r_2)},$$

dove $\sigma(r_1, r_2)$ è l'area di Γ , e d il diametro della porzione D_1 di A cui corrisponde Γ_1 ; ne segue, poichè $\sigma(r_1, r_2) = p\pi(r_2^2 - r_1^2)$, con p intero,

$$(7) \quad \alpha(r_1, r_2) > \frac{4 \mu d^2}{p\pi} \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}.$$

Conseguenza quasi immediata della (7) è che il punto $P(z_0)$ non può corrispondere a tutto un continuo di A ⁽⁸⁾.

Abbiamo supposto $P(z_0)$ dotato di intorno. Ammettiamo ora che un punto P di traccia w_0 possa corrispondere ad un intero continuo γ (continuo su A , perchè non supposto interno). Se non è identicamente $w(z) \equiv w_0$, si potranno trovare in A un punto z_1 per cui $w(z_1) = w_1 \neq w_0$ ed un cerchio H di centro z_1 contenente una parte di γ , alla circonferenza del quale corrisponda una curva rettificabile.

(8) Perchè ciò implicherebbe per A un'area infinita. Cfr. per questo ragionamento la mia Nota *Sulla rappresentazione conforme delle superficie*. (Questi « Rendiconti », VI, 23 (1936)).

Osserviamo ora che la (6) sussiste in generale quando $\Gamma = TD$ sia una qualunque porzione di S con traccia su una corona circolare K , e λ_r la relativa curva con traccia su c_r .

Consideriamo poi la porzione $S' = TH$ di S , corrispondente al cerchio H , una corona circolare K di centro w_0 il cui cerchio esterno K_2 non contenga w_1 , e diciamo Q il punto di S' corrispondente al centro z_1 di H .

Sia Γ la porzione di S' costituita dalle curve λ_r che separano P da Q , che corrispondono cioè a curve di H separanti γ da z_1 . Le lunghezze $l(r)$ di queste ultime ammettono un estremo inferiore positivo; d'altra parte le lunghezze delle curve λ_r si possono maggiorare con $2p\pi r$ (p intero). Ne segue la disuguaglianza, analoga alla (7),

$$(7') \quad \alpha(r_1, r_2) > k \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1},$$

con k fisso; ed in base a questa, analogamente a quanto osservato dianzi, si può ancora escludere l'esistenza di un continuo γ non ridotto ad un punto; sempre che $w(z)$ non si riduca ad una costante.

4. Abbiamo dimostrato così che la superficie S (o meglio la trasformazione T) è *propria*, ossia *non degenera*; escluso l'unico caso $w \equiv \text{cost.}$ ⁽⁹⁾.

Se ne deduce, con facili considerazioni di continuità, che:

1° I punti di A aventi nella trasformazione T una data immagine w_0 sono isolati, e però in numero finito in ogni porzione interna di A ; 2° la trasformazione T , come corrispondenza fra piani, è localmente invertibile, fuorchè per i punti (isolati) le cui immagini siano punti di diramazione, intorno ai quali essa si uniformizza come nel caso delle funzioni analitiche.

Possiamo dispensarci dall'entrare in particolari, rifacendoci a risultati noti: segue invero dall'analisi fatta che le nostre trasformazioni pseudo-conformi sono *trasformazioni interne* secondo S. Stoilow ⁽¹⁰⁾ in quanto fanno corrispondere insiemi aperti ad insiemi aperti, e non trasformano nessun continuo in un punto unico.

La superficie piatta S non è dunque altro che un campo *multivalente*, o *campo riemanniano*, B ; e le nostre funzioni pseudo-analitiche sono *topologicamente equivalenti a funzioni analitiche*.

Val forse la pena di osservare che in precedenti definizioni di funzioni pseudo-analitiche ⁽¹¹⁾ queste proprietà topologiche venivano postulate (le condizioni metriche essendo inoltre alquanto complicate): qui invece sono dedotte da un'estensione semplice e diretta della nozione di funzione analitica.

5. Possiamo fare un passo di più, considerando l'*inversa* di una funzione pseudo-analitica.

(9) Dal punto di vista della teoria delle superficie parametriche, S va allora riguardata come *vuota* (cfr. le mie Note citate in (5)).

(10) Ved. la monografia di quest'Autore: *Principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques*. (« Coll. Borel », Paris, 1938), Chap. V.

(11) LAVRENTIEFF, HERSCH e PFLUGER, loc. cit. (1).

Della trasformazione pseudo-conforme T , biunivoca fra A e B , l'inversa T^{-1} è definita dalla funzione $z = z(w)$, polidroma nel piano w , e localmente monodroma a prescindere dai punti di diramazione, dove l'uniformizzazione si effettua come per le funzioni analitiche.

Vogliamo dimostrare che *la funzione inversa $z(w)$ è anch'essa pseudo-analitica, con lo stesso parametro μ* ; cioè come funzione di w in ogni campo di monodromia, o di $\sqrt[q]{w - w_0}$ intorno ad un punto di diramazione w_0 di ordine $q - 1$.

Basterà evidentemente supporre B univalente e far vedere che nelle formole inverse della (4),

$$x = x(u, v) \quad , \quad y = y(u, v),$$

$x(u, v)$ e $y(u, v)$ sono assolutamente continue in u e v per quasi tutti i valori di v ed u rispettivamente (la sommabilità quadratica delle derivate risulta come conseguenza).

Procedendo per assurdo, supponiamo che le curve $x = x(\bar{u}, v)$, $y = y(\bar{u}, v)$ non siano assolutamente continue in corrispondenza dei valori \bar{u} di un insieme di misura positiva. Da tale ipotesi si deduce senza difficoltà, con procedimenti di uso corrente nella teoria delle funzioni di variabili reali, che esistono due numeri $\sigma > 0$, $l > 0$ aventi la seguente proprietà:

Dato comunque $\varepsilon > 0$ si possono trovare, in B , N strisce s_1, s_2, \dots , parallele all'asse v , di larghezza $\delta > \sigma/N$, ed in ogni s_i un certo numero $n_i < \varepsilon/\delta$ di quadrati di lato δ , tagliati da una retta $u = \text{cost.}$ di s_i in segmenti cui corrispondano in A archi aventi corde di somma $> l$.

Siano Q_1, Q_2, \dots tutti questi dominî quadrati; Q'_1, Q'_2, \dots quelli concentrici di lato triplo; R_i, R'_i i dominî corrispondenti a Q_i, Q'_i in A ; e indichiamo con d_i il diametro di R_i , con α_i l'area di R'_i .

Ora si ha $\alpha_i > k d_i^2$, con k fisso, come si riconosce subito ricorrendo al procedimento del n. 3 che conduce alla disuguaglianza (7), esprimente un risultato analogo per i dominî circolari. D'altra parte la somma dei diametri dei dominî R_i corrispondenti ai quadrati di una medesima striscia s_j supera l : ne segue che la somma delle aree dei relativi dominî R_i supera $k l^2 / n_j$, e quindi $k l^2 \frac{\delta}{\varepsilon}$. Pertanto la somma delle aree di tutti gli R'_i supera $k \sigma l^2 / \varepsilon$, e risulta arbitrariamente grande con $1/\varepsilon$; ciò che è assurdo, poichè un punto di A non può appartenere a più di nove dominî R'_i .

Questo risultato sulle funzioni inverse conduce direttamente alla definizione generale di *funzione pseudo-analitica polidroma*, quando si sostituisca l'insieme aperto A con un campo riemanniano qualunque. *La più generale funzione pseudo-analitica $w(z)$ e la sua inversa $z(w)$ appartengono ad una medesima classe \mathcal{C}_μ , e definiscono una rappresentazione pseudo-conforme di due campi riemanniani A e B l'uno sull'altro.*

Con le funzioni inverse si presentano anche le *funzioni di funzione*, geometricamente i prodotti di trasformazioni pseudo-conformi. *Una funzione pseudo-analitica di altra funzione pseudo-analitica è anch'essa pseudo-analitica, ed ha come parametro il prodotto dei parametri delle funzioni componenti.*

6. Torniamo alla funzione monodroma (non costante) $w(z)$, definita nel campo A. Denoteremo nel seguito con C e γ un cerchio di A e la sua circonferenza, e con F l'area dell'immagine TC, indicando secondo l'occorrenza la dipendenza dal raggio e dal centro.

Fissato questo centro z_0 , e introdotte coordinate polari ρ, θ con polo in z_0 , si trae dalle (3)

$$(8) \quad F(r) = \int_{C(r)} dx dy \cong \mu \int_{C(r)} \Phi^2 dx dy \cong \frac{\mu}{2\pi} \int_0^r \left[\int_{\gamma(\rho)} \Phi ds \right]^2 \frac{d\rho}{\rho} > \frac{2\mu}{\pi} \log \frac{r}{r_0} \omega^2(C_0),$$

dove C_0 è il cerchio $C(r_0)$ di raggio $r_0 < r$, e $\omega(C_0)$ l'oscillazione di $w(z)$ in C_0 ; ciò perchè $\int_{\gamma(\rho)} \Phi ds$ maggiore la lunghezza dell'immagine di $\gamma(\rho)$, lunghezza che supera $2\omega(C_0)$ per $\rho > r_0$.

Dalle disequaglianze (8) segue un risultato che fra breve perfezioneremo: da una limitazione per l'area dell'immagine B di A si deduce per $w(z)$ un modulo di continuità, internamente ad A (cioè un modulo per ogni assegnato dominio D interno ad A). Pertanto *un modulo di continuità interno consegue da una limitazione interna per le aree delle immagini in T* (cioè da una limitazione dell'area di TD, in funzione di D, per ogni dominio interno ad A).

Applicando ora all'immagine TC(ρ) la disequaglianza isoperimetrica si ottiene

$$F(\rho) \leq \frac{1}{4\pi} \left[\int_{\gamma(\rho)} \Phi ds \right]^2,$$

donde

$$\frac{d}{d\rho} F(\rho) = \int_{\gamma(\rho)} J ds \cong \frac{\mu}{2\pi\rho} \left[\int_{\gamma(\rho)} \Phi ds \right]^2 \cong \frac{2\mu}{\rho} F(\rho),$$

donde ancora, integrando,

$$(9) \quad F(r) \cong F(r_0) r_0^{-2\mu} r^{2\mu} \quad (r > r_0).$$

Porremo $H(C_0) = H(z_0, r_0) = F(r_0) r_0^{-2\mu}$; si può chiamare $H(C_0)$ (o meglio $\pi^{-\mu} H(C_0)$) un *coefficiente hölderiano, relativo all'esponente μ , di dilatazione superficiale*, nel punto z_0 . Naturalmente, se $\mu < 1$, $H(C_0)$ è infinitesimo con r_0 per quasi tutti i punti z_0 .

Dalla (9) segue subito che $H(z_0, r_0)$ si conserva limitato al variare di z_0 in un dominio D, il cerchio $C(z_0, r_0)$ rimanendo contenuto in una porzione interna di A (al che basta che r_0 non superi un valore convenientemente piccolo); ciò che può esprimersi dicendo che la trasformazione T è *superficialmente hölderiana*, con l'esponente μ ⁽¹²⁾. Di qui si deduce poi facil-

(12) Relativamente ai domini circolari di A, e quindi ad insiemi « regolari » nel senso della teoria della derivazione delle funzioni additive d'insieme.

mente che T è hölderiana nel senso ordinario, sempre internamente ad A , cioè che il rapporto

$$\frac{|w(z_1) - w(z_2)|}{|z_1 - z_2|^\mu}$$

si mantiene limitato al variare di z_1 e z_2 in un dominio D .

Basta infatti dividere in (8) primo ed ultimo membro per $r^{2\mu}$, e porre poi per esempio $r_0 = r/2$, per vedere che una limitazione per $F(r)/r^{2\mu}$ ne implica una per $\omega(C_0)/r_0^\mu$.

Abbiamo trovato così una proprietà fondamentale delle funzioni pseudo-analitiche: una funzione della classe \mathcal{C}_μ in A vi è (internamente) hölderiana con l'esponente μ ⁽¹³⁾. Dippiù, da una limitazione interna (nel senso predetto) per le aree delle immagini si deduce una limitazione del coefficiente di Hölder per un qualunque dominio interno.

7. Le considerazioni precedenti conducono immediatamente ad una condizione di equicontinuità: funzioni pseudo-analitiche (trasformazioni pseudo-conformi) che diano luogo ad immagini di aree equilimitate sono equicontinue (anzi uniformemente hölderiane) internamente ad A . Anticipando un risultato che stabiliremo in seguito, diciamo subito che la condizione è verificata da ogni famiglia di funzioni equilimitate. Siamo allora in grado di dimostrare il seguente teorema fondamentale (di Weierstrass nella teoria delle funzioni analitiche):

Il limite di una successione uniformemente convergente di funzioni della classe \mathcal{C}_μ è una funzione della medesima classe.

Sia $w(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n(z)$, e contrassegniamo con l'indice n , nelle (2) e (3), le quantità relative a w_n . In ogni porzione interna di A sono equilimitati gli integrali $\int J_n dx dy$, e conseguentemente gli altri $\int (E_n + G_n) dx dy$; ne segue subito che $w(z)$ verifica le ipotesi I) del n. 1. Inoltre si ha in generale (nel senso spiegato al n. 2) per un dominio D a frontiera regolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_D J_n dx dy = \int_D J dx dy \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_D (\Phi_n^2 + \varphi_n^2) dx dy \geq \int_D (\Phi^2 + \varphi^2) dx dy,$$

il secondo integrale essendo inferiormente semicontinuo; pertanto

$$\int_D J dx dy \geq \frac{\mu}{1 + \mu^2} \int_D (\Phi^2 + \varphi^2) dx dy \quad , \quad J \geq \frac{\mu}{1 + \mu^2} (\Phi^2 + \varphi^2)$$

(quasi ovunque), e risultano verificate anche le ipotesi II).

(13) Per $\mu = 1$ la funzione risulta lipschitziana, ciò che è banale trattandosi di funzione analitica. Ma se $\mu < 1$ l'esponente non può essere aumentato: come esempio si ponga, in coordinate polari, $u = \rho^\mu \cos \theta$, $v = \rho^\mu \sin \theta$.

Il carattere hölderiano di u, v è legato alla proprietà di verificare (quasi ovunque) sistemi « ellittici » di equazioni lineari a derivate parziali del primo ordine, generalizzanti le condizioni di Cauchy. (Cfr. MORREY, loc. cit. (1)). Per esempio si ha

$$u_x = \alpha v_x - \beta v_y \quad , \quad u_y = \beta v_x + \alpha v_y,$$

con α, β funzioni limitate, e $\alpha^2 + \beta^2$ limitato inferiormente da un numero positivo.

Meccanica. — *Confronto fra due metodi di calcolo della portanza in corrente supersonica.* Nota (*) del Socio ENRICO PISTOLESI.

Per il calcolo della portanza su di un'ala infinitamente sottile in corrente supersonica, nell'ambito dell'equazione linearizzata del potenziale, vi sono alcuni metodi che si avvalgono di distribuzioni di singolarità sulla superficie dell'ala. Uno di essi, che si avvale di una doppia distribuzione di sorgenti, di segno opposto, sulle due facce della superficie portante, è applicabile soltanto quando tutto il contorno di essa è supersonico ed ha quindi un limitato campo di applicabilità. Restano due procedimenti: uno che chiameremo « delle doppiette », l'altro « degli elementi vorticosi ». Il primo consiste nel supporre le due distribuzioni opposte di sorgenti effettuate sopra due piani infinitamente vicini, essendo il prodotto dell'intensità f della distribuzione per la distanza h dei piani mantenuta costante all'avvicinarsi indefinito dei piani stessi; praticamente si ottiene il potenziale di tale corrente derivando rispetto alla coordinata z , supposta ortogonale al piano dell'ala, il potenziale dovuto ad una semplice distribuzione di sorgenti.

Il secondo invece si avvale di una distribuzione di singolarità, il cui potenziale si ottiene derivando rispetto alla z il potenziale di una « sorgente » e integrando poi rispetto alla ξ , essendo ξ la coordinata diretta nel senso della velocità asintotica sul piano dell'ala.

A questo proposito è opportuno stabilire che si indicano con x, y, z le coordinate del punto in cui si calcola il potenziale, con $\xi, \eta, \zeta = 0$ quelle dei punti dell'ala nei quali viene effettuata la distribuzione di singolarità.

Ebbi già occasione di rilevare (ved. ad esempio *L'Aerotecnica*, 31, n. 1, pp. 86-89 (1951)) che il cosiddetto metodo delle doppiette può essere applicato soltanto sotto certe condizioni, in quanto il potenziale relativo essendo ad un sol valore non può dare origine a circolazione, che è invece necessaria, anche in corrente supersonica, per la produzione di una portanza. È vero che anche la distribuzione di doppiette origina sull'ala un salto di potenziale fra l'una e l'altra faccia; ma questo salto si annulla attraverso i bordi di uscita, ciò che in definitiva conduce a ritenere collocato sui bordi stessi un vortice concentrato che annulla la circolazione e quindi la portanza.

Ciò non accade invece con la distribuzione di elementi vorticosi i quali sono gli analoghi, in campo supersonico, dei vortici elementari a staffa e danno origine, come nell'ordinaria teoria alare subsonica, ad un nastro vorticoso dietro l'ala, attraverso il quale si ha una discontinuità del potenziale.

La presente ricerca è diretta a investigare in quali condizioni i due metodi si equivalgono e in quali invece essi danno risultati differenti, nel

(*) Pervenuta all'Accademia l'11 ottobre 1952.

qual caso, essendo fuori dubbio la validità del metodo degli elementi vorticosi, il metodo cosiddetto delle doppiette deve ritenersi fallace.

1. Come indicato nella citata Nota, il potenziale della distribuzione di doppiette è dato da:

$$(1) \quad \varphi_D = \frac{\partial \varphi_S}{\partial z}$$

dove

$$(2) \quad \varphi_S = \int_0^{x-\lambda} d\xi \int_{\eta_1}^{\eta_2} f \varphi_s d\eta$$

con

$$(3) \quad \varphi_s = \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 - \lambda^2 [(y-\eta)^2 + z^2]}} = \frac{1}{\Omega}$$

essendo

$$\lambda = \sqrt{M^2 - 1}$$

(M = numero di Mach).

I limiti η_1 , η_2 dell'integrale possono, a seconda dei casi, essere determinati dai limiti propri dell'area su cui la f è distribuita (margini dell'ala) ovvero dalla curva intersezione del piano con l'anticono di Mach uscente dal punto x, y, z in cui si calcola il potenziale φ , curva che, com'è noto, è un ramo di iperbole. In tal caso η_1 ed η_2 sono le radici dell'equazione che si ottiene uguagliando a zero il denominatore della (3).

Convien trasformare la (2) ponendo

$$(4) \quad F = \int_{\eta_1}^{\eta_2} f \varphi_s d\eta$$

e integrando per parti. Si ha allora, posto:

$$(5) \quad G = \int \varphi_s d\eta = -\frac{1}{\lambda} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\lambda(y-\eta)}{\Omega},$$

$$(6) \quad F = f_2 G_2 - f_1 G_1 - \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\partial f}{\partial \eta} G d\eta$$

dove gli indici 1 e 2 indicano il valore dell'espressione cui sono apposti rispettivamente nei punti ξ, η_1 e ξ, η_2 .

Se ne deduce:

$$(7) \quad \varphi_D = \int_0^{x-\lambda|z|} \frac{\partial F}{\partial \xi} d\xi \mp \lambda F(x-\lambda|z|, y)$$

od anche, per essere $F(x - \lambda | z |, y) = \frac{\pi}{\lambda} f(x - \lambda | z |, y)$:

$$(7') \quad \varphi_D = \int_0^{x - \lambda | z |} \frac{\partial F}{\partial z} d\xi \mp \pi f(x - \lambda | z |, y)$$

dove il segno $-$ vale per la faccia superiore, il segno $+$ per la inferiore (rispetto, naturalmente, al senso positivo di z). Il doppio segno della (7) dà ragione della differenza di potenziale fra le due facce dell'ala.

La velocità addizionale $u = \frac{\partial \varphi_D}{\partial x}$ sull'ala risulta:

$$(8) \quad u = \left(\frac{\partial \varphi_D}{\partial x} \right)_{z=0} = \mp \pi \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \xi}.$$

2. Il potenziale della distribuzione di elementi vorticosi (ved. ancora Nota citata) è dato invece da:

$$(9) \quad \varphi_V = \int_0^{x - \lambda | z |} d\xi \int_{\eta_1}^{\eta_2} f' \varphi_v d\eta$$

dove

$$(10) \quad \varphi_v = \frac{(x - \xi)z}{(y - \eta)^2 + z^2} \cdot \frac{1}{\Omega}.$$

Operando come per la distribuzione di doppiette, posto:

$$(11) \quad F' = \int_{\eta_1}^{\eta_2} f' \varphi_v d\eta$$

$$(12) \quad H = \int \varphi_v d\eta = - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left\{ \frac{x - \xi}{z} \cdot \frac{y - \eta}{\Omega} \right\},$$

si ha:

$$(13) \quad \varphi_V = \int_0^{x - \lambda | z |} F' d\xi$$

con

$$(14) \quad F' = f_2 H_2 - f_1 H_1 - \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\partial f'}{\partial \eta} H d\eta.$$

Si ha inoltre:

$$(15) \quad \left(u = \frac{\partial \varphi_v}{\partial x} \right)_{z=0} = \pm \pi f'(\xi, \eta).$$

3. Da quanto precede si vede che il confronto fra φ_D e φ_V , dovendo essere effettuato a parità di u , richiede che si ponga $f' = -\frac{\partial f}{\partial \xi}$. Si ha pertanto:

$$(16) \quad \varphi_D - \varphi_V = \int_0^{x-\lambda|z|} \left(\frac{\partial F}{\partial z} - F' \right) d\xi + \pi f(x - \lambda|z|, y)$$

dove

$$(17) \quad \Phi = \frac{\partial F}{\partial z} - F' = f_2 \frac{\partial G_2}{\partial z} - f_1 \frac{\partial G_1}{\partial z} - \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial G}{\partial z} d\eta + \\ + \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \right)_2 H_2 - \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \right)_1 H_1 - \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} H d\eta.$$

Ma poichè, com'è facile verificare:

$$(18) \quad \frac{\partial G}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial \xi}$$

segue che la somma dei due integrali della (17) può esprimersi

$$- \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(H \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) d\eta.$$

Il contributo di questo termine nell' $\int \Phi d\xi$ dà luogo ad un integrale doppio esteso a tutto il campo di integrazione, limitato generalmente, come già si è detto, da un contorno fisso e da un contorno (che chiameremo variabile) costituito dall'intersezione del piano dell'ala con l'anticono di Mach. Effettuando prima l'integrazione rispetto a ξ si ha:

$$(19) \quad - \int_{\eta_1}^{\eta_2} \left[\left(H \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)'' - \left(H \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)' \right] d\eta = - \int_c \left(H \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)_c \frac{d\eta_c}{ds} ds$$

dove l'integrale è esteso al contorno del campo c , s è l'arco contato sul contorno stesso e gli indici '' e ' si riferiscono ai punti estremi P'' e P' di una corda parallela all'asse ξ .

Per quanto riguarda gli altri termini della (17) dobbiamo distinguere il caso in cui i punti a cui si riferiscono sono sul contorno fisso e quello in cui sono sul contorno variabile.

a) *contorno fisso*. In tal caso, per la (18):

$$(20) \quad f_2 \frac{\partial G_2}{\partial z} + \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \right)_2 H_2 = \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (fH) \right]_2 = \frac{d}{d\xi} (f_2 H_2) - \left[\frac{\partial}{\partial \eta} (fH) \right]_2 \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi}$$

e, analogamente per i termini con indice 1.

b) *contorno variabile*. Su di esso $G_2 = -G_1 = \frac{\pi}{2\lambda} = \text{cost}$;

$$H_2 = -H_1 = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Perciò

$$(21) \quad f_2 \frac{\partial G_2}{\partial z} + \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \right)_2 H_2 = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \right)_2 = \frac{\pi}{2} \frac{\partial f_2}{\partial \xi} - \frac{\pi}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)_2 \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi}$$

ovvero, per la costanza di H_2 :

$$(21') \quad f_2 \frac{\partial G_2}{\partial z} + \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \right)_2 H_2 = H_2 \frac{\partial f_2}{\partial \xi} - H_2 \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)_2 \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi}.$$

Integrando rispetto a ξ e distinguendo con l'indice k il contorno fisso, con l'indice v il contorno variabile, si ha pertanto:

$$\begin{aligned} \int_0^{x-\lambda|z|} \Phi d\xi &= [f_2 H_2 - f_1 H_1]_{\xi=x-\lambda|z|} - [f_2 H_2 - f_1 H_1]_{\xi=0} + \\ &+ \int_k \left[\frac{\partial}{\partial \eta} (fH) - H \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \right] \frac{\partial \eta_c}{ds} ds + \int_v \left[H_c \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)_c - H_c \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \right] \frac{\partial \eta_c}{ds} ds. \end{aligned}$$

Poichè il punto $\xi = 0$ sta necessariamente sul contorno fisso, o almeno in un punto di concorso del contorno fisso col contorno variabile, il secondo termine è nullo, mentre il primo, per essere $H_2 = -H_1 = \pm \frac{\pi}{2}$, è limite di $\pm \frac{\pi}{2} (f_1 + f_2)$ ossia $\pm \pi f(x - \lambda|z|, y)$ che annulla il termine di segno opposto nella (16).

Resta pertanto:

$$\varphi_D - \varphi_V = \int_k \left[\frac{\partial}{\partial \eta} (fH) - H \frac{\partial f}{\partial \eta} \right]_c \frac{d\eta_c}{ds} ds.$$

Ossia:

$$(22) \quad \varphi_D - \varphi_V = \int_k \left(f \frac{\partial H}{\partial \eta} \right)_c \frac{d\eta_c}{ds} ds$$

od anche, per la (12)

$$(22') \quad \varphi_D - \varphi_V = \int_k (f\varphi_v)_c \frac{d\eta_c}{ds} ds.$$

La (22) può ottenersi direttamente dalla (2) e dalla (4) quando tutto il campo sia limitato da contorno fisso (sia cioè l'ala interamente contenuta nell'anticono di Mach del punto indotto), giacchè in tal caso

$$\varphi_D - \varphi_V = \iint \left[f \frac{\partial \varphi_s}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \xi} \varphi_v \right] d\xi d\eta$$

e poichè $\varphi_v = \int \frac{\partial \varphi_s}{\partial z} d\xi$ e quindi $\frac{\partial \varphi_s}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_v}{\partial \xi}$ segue

$$\varphi_D - \varphi_V = \iint \frac{\partial}{\partial \xi} (f \varphi_v) d\xi d\eta$$

da cui integrando prima rispetto a ξ segue la (22').

Non così quando parte del contorno è variabile, sia perchè in tal caso φ_v e φ_s divergono infinite su quel contorno, sia per la necessità di tener conto della variabilità del contorno stesso nell'effettuare la derivata del potenziale di sorgente rispetto a z .

4. Dalla (22) segue che in generale i due potenziali coincidono; e che la coincidenza è assicurata quando sul contorno dell'ala sia ovunque o $f=0$ o $\frac{d\eta_c}{ds}=0$, quest'ultima condizione significando che il tratto di contorno considerato è parallelo all'asse ξ .

Se dal potenziale si passa alla velocità verticale indotta w sul piano $\xi\eta$ dell'ala, nel fare la derivata del potenziale rispetto a z occorre tener conto della variazione che subisce l'estensione del contorno fisso k al variare di z . Poichè peraltro $\varphi_v=0$ per $z=0$, il contributo che proviene per questo titolo alla derivata è nullo sul piano $z=0$. Si ha perciò

$$(23) \quad (w_D - w_V)_{z=0} = \int_k \left(f \frac{\partial \varphi_v}{\partial z} \right)_c \frac{d\eta_c}{ds} ds$$

ossia

$$(23') \quad (w_D - w_V)_{z=0} = \int_k \left[f \frac{x - \xi}{(y - \eta)^2} \cdot \frac{1}{\Omega} \right]_c \frac{d\eta_c}{ds} ds.$$

dove il contorno k è quello compreso nel doppio angolo di Mach uscente dal punto indotto e nell'espressione di Ω è fatto $z=0$.

La validità della (23') in casi particolari è confermata dal calcolo diretto di w_D e di w_V .

Fisica matematica. — *Sopra una estensione dei campi elettromagnetici.* Nota (*) del Corrisp. BRUNO FINZI.

In una Nota recente (1) ho dimostrato che entrambe le leggi a cui ubbidisce nello spazio-tempo un campo elettromagnetico possono dedursi da un unico principio di minima azione, e come, generalizzando l'espressione di tale azione, si possano ottenere le leggi che governano campi più generali di quello maxwelliano, fra i quali rientra quello di Proca-Yukawa. Desidero riprendere l'argomento, che mi sembra possa presentare qualche interesse fisico, per trarre alcune conseguenze dalle equazioni che reggono i campi generali considerati.

1. Un notissimo teorema di Clebsch afferma che un generico campo vettoriale può riguardarsi come composto di un campo irrotazionale e di uno solenoidale. Anche per i tensori doppi emisimmetrici dello spazio-tempo, funzioni dei punti (eventi) di questo, sussiste un teorema analogo: un generico tensore doppio emisimmetrico $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$ ($\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$) risulta somma di un tensore irrotazionale e di uno solenoidale (2). Detto Φ_α ($\alpha = 0, 1, 2, 3$) il potenziale vettore del componente irrotazionale $\Phi_{\beta/\alpha} - \Phi_{\alpha/\beta}$, detto Ψ_α ($\alpha = 0, 1, 2, 3$) il vettore che caratterizza il componente solenoidale $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \Psi^{\gamma/\delta}$, si ha:

$$(1) \quad F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha} = \Phi_{\beta/\alpha} - \Phi_{\alpha/\beta} + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \Psi^{\gamma/\delta}.$$

Nella (1) $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ è il tensore emisimmetrico di Ricci nello spazio-tempo quadridimensionale, e i due vettori spazio-temporali Φ_α e Ψ_α si riguardano solenoidali, cioè

$$(2) \quad \text{div } \Phi_\alpha \equiv \Phi_\alpha{}^{/\alpha} = 0, \quad \text{div } \Psi_\gamma \equiv \Psi_\gamma{}^{/\gamma} = 0.$$

Il generico tensore doppio emisimmetrico dello spazio-tempo $F_{\alpha\beta}$ può dunque esprimersi linearmente mediante due tensori derivati di due vettori solenoidali Φ_α e Ψ_α dello spazio-tempo stesso, vettori che potranno dirsi i due potenziali di $F_{\alpha\beta}$. Però, se il tensore $F_{\alpha\beta}$ che si considera è irrotazionale, esso può essere individuato col solo vettore potenziale Φ_α ; se il tensore $F_{\alpha\beta}$ è solenoidale, esso può essere individuato col solo vettore potenziale Ψ_α ; se poi il tensore $F_{\alpha\beta}$ è armonico, cioè irrotazionale e solenoidale, esso può essere individuato con uno qualunque dei due vettori Φ_α e Ψ_α , il primo dei quali è detto « potenziale » e il secondo « antipoteniale » del campo armonico considerato; mentre le (2) diventano le condizioni di Lorentz.

2. Diciamo $x^1 x^2 x^3$ tre coordinate spaziali e $x^0 = ct$ la coordinata temporale, essendo c la velocità della luce nel vuoto, rispetto ad un osser-

(*) Presentata nella seduta dell'8 novembre 1952.

(1) Questi « Rendiconti », ser. VIII, vol. XII, 1952, Nota I, p. 378, Nota II, p. 477.

(2) B. FINZI, loc. cit., Nota I.

vatore inerziale. Poniamo la metrica dello spazio-tempo pseudoeuclideo nella forma pseudopitagorica

$$(3) \quad ds^2 = dx^0{}^2 - (dx^1{}^2 + dx^2{}^2 + dx^3{}^2).$$

Il campo elettromagnetico nel vuoto può rappresentarsi con un unico tensore doppio emisimmetrico $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$ ($\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$), legato ai due potenziali Φ_α e Ψ_α dalla (1), e la distribuzione elettrica è rappresentata dal vettore spazio-temporale j_α .

Se ω è una regione dello spazio-tempo, avente per contorno τ , l'azione elettromagnetica è data dall' $\int_\omega I d\omega$, essendo I una densità di energia, combinazione lineare di invarianti quadratici formati con gli elementi che caratterizzano il campo elettromagnetico, i suoi potenziali e la distribuzione elettrica.

L'azione del campo che generalizza quello elettromagnetico si ottiene ponendo per I la seguente generica combinazione lineare di invarianti quadratici:

$$(4) \quad I = \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{\kappa}{4} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\epsilon} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\epsilon} - j_\alpha \Phi^\alpha - \chi j_\alpha \Psi^\alpha - \\ - \frac{1}{2\lambda^2} (\Phi_\alpha \Phi^\alpha + \mu \Psi_\alpha \Psi^\alpha + \nu \Phi_\alpha \Psi^\alpha),$$

dove $\kappa, \chi, 1/\lambda^2, \mu, \nu$ sono costanti universali (finite ed eventualmente nulle); κ, χ, μ, ν sono puri numeri e λ è una lunghezza. Nel caso maxwelliano $\kappa, \chi, 1/\lambda^2$ sono nulli e l'azione si riduce alla differenza fra l'azione di puro campo e quella sostanziale elettrica; nel caso di Yukawa κ, χ, μ, ν sono nulli, ma non $1/\lambda^2$.

Scrivendo che, fissata in ω la distribuzione elettrica j_α , è $\delta \int_\omega I d\omega = 0$ comunque si varino in ω i potenziali Φ_α e Ψ_α , ma non i loro valori al contorno τ , si ottengono entrambe le equazioni del campo generale considerato. Queste, quando sia $1 - 4\kappa^2 \neq 0$, possono risolversi rispetto a $\text{rot } F_{\alpha\beta} \equiv \epsilon_{\alpha\beta\gamma\epsilon} F^{\alpha\beta\gamma\epsilon}$ e a $\text{div } F_{\alpha\beta} \equiv F_{\alpha\beta}{}^{;\beta}$:

$$(5) \quad \begin{cases} \text{rot } F_{\alpha\beta} = \alpha j_\epsilon + \frac{1}{\lambda^2} \{ \beta \Phi_\epsilon + \gamma \Psi_\epsilon \} \\ \text{div } F_{\alpha\beta} = (1 + \kappa\alpha) j_\epsilon + \frac{1}{\lambda^2} \left\{ (1 + \kappa\beta) \Phi_\epsilon + \left(\frac{\nu}{2} + \kappa\gamma \right) \Psi_\epsilon \right\}. \end{cases}$$

Nelle (5) α, β, γ sono puri numeri costanti, legati a κ, χ, μ, ν dalle seguenti relazioni:

$$\alpha = \frac{4\kappa + 2\chi}{1 - 4\kappa^2}, \quad \beta = \frac{4\kappa + \nu}{1 - 4\kappa^2}, \quad \gamma = \frac{2\kappa\nu + 2\mu}{1 - 4\kappa^2}.$$

Le (5) generalizzano le equazioni di Maxwell nel vuoto:

$$(6) \quad \text{rot } F_{\alpha\beta} = 0, \quad \text{div } F_{\alpha\beta} = j_\epsilon \quad (3).$$

(3) Cfr. ad esempio B. FINZI e M. PASTORI, *Calcolo tensoriale e applicazioni*. (Bologna 1949), cap. IX.

Si riducono a queste per $\kappa, \chi, 1/\lambda^2$ nulli; e si riducono alle equazioni che reggono il campo di Proca-Yukawa

$$(7) \quad \text{rot } F_{\alpha\beta} = 0 \quad , \quad \text{div } F_{\alpha\beta} = j_\alpha + \frac{1}{\lambda^2} \Phi_\alpha^{(4)}$$

per κ, χ, μ, ν nulli (e quindi $\alpha = \beta = \gamma = 0$) e $1/\lambda^2 \neq 0$.

In sostanza, nelle (5) *il rotore e la divergenza del tensore elettromagnetico* (invece che essere eguagliati a zero e alla distribuzione elettrica, come avviene nelle equazioni di Maxwell) *sono eguagliati a generiche combinazioni lineari della distribuzione elettrica e dei due potenziali*.

In generale le (5) contengono cinque costanti indipendenti, disponibili per far rientrare nello schema precedente campi estendenti quello di Maxwell e quello di Yukawa, la cui considerazione può essere suggerita dall'esperienza.

3. Dalle (5) discendono due conseguenze importanti:

1^a) Prendendo la divergenza d'ambo i membri sia della prima che della seconda delle (5), ricordando le (2), e ricordando che (come per ogni tensore emisimmetrico)

$$\text{div rot } F_{\alpha\beta} \equiv \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\varrho} F^{\alpha\beta/\gamma\varrho} \equiv 0$$

$$\text{div div } F_{\alpha\beta} \equiv F_{\alpha\beta}^{/\beta\alpha} \equiv 0,$$

si ha:

$$(8) \quad \text{div } j_\alpha \equiv j_\alpha^{/\alpha} = 0.$$

La (8), affermando la solenoidalità nello spazio-tempo del vettore distribuzione elettrica j_α , traduce il *principio di conservazione dell'elettricità*, il quale sussiste dunque anche per il campo generale considerato retto dalle (5).

2^a) Poichè nel sistema differenziale costituito dalle (5) e (1) la parte differenziale relativa a $F_{\alpha\beta}$ è quella stessa del sistema differenziale (6) che regge il campo maxwelliano nel vuoto, le varietà caratteristiche del campo generale considerato coincidono con le varietà caratteristiche del campo maxwelliano nel vuoto, così che anche per il campo generale *i fronti d'onda avanzano normalmente con la velocità c della luce*. E così pure le discontinuità attraverso i fronti d'onda ubbidiscono alle stesse condizioni vigenti per i campi maxwelliani nel vuoto.

4. È noto che le equazioni maxwelliane (6) sono atte a determinare $F_{\alpha\beta}$ quando è assegnato il vettore solenoidale j_α , perchè le (6) sono equivalenti a otto equazioni scalari fra le quali intercedono le due identità scalari

$$\text{div rot } F_{\alpha\beta} \equiv \sigma^\alpha \quad , \quad \text{div div } F_{\alpha\beta} \equiv 0 = \text{div } j_\alpha,$$

mentre le componenti distinte e non nulle del tensore elettromagnetico $F_{\alpha\beta}$ sono sei.

(4) A. PROCA, « Journ. de Phys. Rad. », 7 (1936); H. YUKAWA, « Proc. Phys. Mat. Soc. of Japan », 20 (1938).

Le equazioni (7) di Proca-Yukawa sono anch'esse atte a determinare $F_{\alpha\beta}$, quando sia assegnato il vettore solenoidale j_e . Basta a tal fine aggiungere alla seconda di esse la relazione $F_{\alpha\beta} = \Phi_{\beta/\alpha} - \Phi_{\alpha/\beta}$ che sostituisce la prima e lega il tensore irrotazionale $F_{\alpha\beta}$ al suo potenziale Φ_α (solenoidale). Si ha infatti:

$$\Phi_e = \lambda^2 \{ F_{e\beta}/^\beta - j_e \}$$

$$F_{e\sigma} = \lambda^2 \{ F_{\sigma\beta}/^\beta_e + F_{\beta\sigma}/^\beta_\sigma - j_{\sigma/e} + j_{e/\sigma} \}.$$

Ma, per l'irrotazionalità di $F_{e\sigma}$, è $F_{e\sigma/\beta} + F_{\sigma\beta/e} + F_{\beta e/\sigma} = 0$ e quindi

$$(9) \quad F_{e\sigma} = -\lambda^2 \{ \square F_{e\sigma} + j_{\sigma/e} - j_{e/\sigma} \}.$$

La (9) è appunto l'equazione tensoriale che individua $F_{e\sigma}$.

Nei due casi precedentemente considerati è $\frac{v^2 - 4\mu}{\lambda^2} = 0$. Consideriamo ora il caso generale in cui $\frac{v^2 - 4\mu}{\lambda^2} \neq 0$. In questo caso si può risolvere il sistema (5) rispetto a Φ_e e Ψ_e , ottenendo:

$$(10) \quad \begin{cases} \Phi_e = \frac{\lambda^2}{v^2 - 4\mu} \{ (\nu + 4\kappa\mu) \text{rot } F_{\alpha\beta} - 4(\kappa\nu + \mu) \text{div } F_{e\beta} - 2(\chi\nu - 2\mu) j_e \} \\ \Psi_e = \frac{2\lambda^2}{v^2 - 4\mu} \{ 2(1 + \kappa\nu) \text{rot } F_{\alpha\beta} - 2(4\kappa + \nu) \text{div } F_{e\beta} - (2\chi - \nu) j_e \}. \end{cases}$$

Ponendo i secondi membri delle (10) nella (1) al posto di Φ_e e Ψ_e , si ottiene l'equazione tensoriale a cui ubbidisce $F_{\alpha\beta}$. Questa afferma che $F_{e\sigma}$ è eguale ad una combinazione lineare delle parti emisimmetriche dei seguenti tensori e dei loro coniugati ⁽⁵⁾:

$$(11) \quad \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\sigma} F^{\alpha\beta}/^\gamma_e, \quad F_{e\beta}/^\beta_\sigma, \quad j_{\sigma/e}.$$

I coefficienti sono funzioni razionali facilmente calcolabili dei coefficienti $\lambda, \kappa, \chi, \mu, \nu$.

Le equazioni a cui ubbidiscono i potenziali si ottengono invece valendosi della (1) per esprimere nelle (5) $F_{\alpha\beta}$ mediante i due potenziali solenoidali Φ_e e Ψ_e . Si ha così:

$$(12) \quad \begin{cases} 2\square\Psi_e + \alpha j_e + \frac{1}{\lambda^2} \{ \beta\Phi_e + \gamma\Psi_e \} = 0 \\ \square\Phi_e + (1 + \kappa\alpha) j_e + \frac{1}{\lambda^2} \left\{ (1 + \kappa\beta)\Phi_e + \left(\frac{\nu}{2} + \kappa\gamma \right) \Psi_e \right\} = 0. \end{cases}$$

I dalembertiani dei potenziali sono dunque funzioni lineari omogenee dei potenziali e della distribuzione elettrica.

(5) Coniugato di un tensore spazio-temporale $E_{\alpha\beta}$ (o della sua parte emisimmetrica) è:

$${}^*E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} E^{\gamma\delta}.$$

5. Le considerazioni svolte possono estendersi ai campi nella materia, dove gli elementi del campo elettromagnetico sono: il tensore doppio emisimmetrico $F_{\alpha\beta}$ che riassume il campo elettrico e l'induzione magnetica, il tensore doppio emisimmetrico $f_{\alpha\beta}$ che riassume il campo magnetico e l'induzione elettrica, i relativi potenziali Φ_α , Ψ_α e φ_α , ψ_α , nonché la distribuzione elettrica j_α ⁽⁶⁾.

In particolare vige ancora il principio di conservazione dell'elettricità tradotto dalla solenoidalità di j_α , e le varietà caratteristiche, e quindi la propagazione dei fronti d'onda e le discontinuità attraverso ad essi, sono quelle stesse che si hanno nei campi maxwelliani retti nello spazio-tempo dalle equazioni di Mie ⁽⁷⁾.

Giacimenti minerari. — *Sulla rigenerazione di soluzioni metallifere e di magmi.* Nota ^(*) del Corrisp. CIRO ANDREATTA.

Da tempo è noto il *principio della rigenerazione dei giacimenti*, per cui si ammette che una paragenesi possa venire portata in soluzione a distanza di tempo dalla sua origine e le sostanze relative rimesse in circolazione attraverso un processo di mobilitazione variamente interpretato e poi rideposte per dare altra paragenesi, nello stesso posto o in altro, nello stesso giacimento o in altro. La più elementare espressione di tale rigenerazione è data dalle zone di ossidazione e di cementazione di molti giacimenti metalliferi. In tali casi si tratta di soluzioni e di rideposizioni operate da acque di provenienza superficiale, cioè discendenti. In maniera equivalente possono evidentemente agire le soluzioni idrotermali ascendenti qualora investano giacimenti formati in precedenza.

Tengo a fare notare subito, anche per spiegare il titolo di questa Nota, che occorre trattare separatamente, secondo il mio parere, il problema della rigenerazione delle soluzioni che danno origine a giacimenti metalliferi dal problema puro e semplice della rigenerazione dei giacimenti stessi.

Infatti, le soluzioni metallifere e metallizzanti si possono rigenerare in diverse maniere, pure obbedendo a determinate leggi fisico-chimiche durante il loro arricchimento in sostanze disciolte. Si pensi appunto alle soluzioni che si originano nel cappellaccio dei giacimenti metalliferi, a quelle prodotte da correnti idrotermali che sciolgono variamente materia di rocce e di giacimenti minerari, fino alle soluzioni di mobilitazione metamorfica che agiscono su zone talora vastissime della corteccia terrestre.

(6) B. FINZI, loc. cit., Nota II. Fra questi campi rientrano in particolare quelli di Bopp, costruiti sovrapponendo al campo di Maxwell il campo di Yukawa (F. BOPP, « Ann. der Physik », 38 (1940); 42 (1942); cfr. P. CALDIROLA, « Rend. Seminario mat. e fis. di Milano », XXII (1951).

(7) G. MIE, « Ann. der Phys. », 37, 39, 40 (1912-13); 85 (1928).

(*) Presentata nella seduta dell'8 novembre 1952.

Le soluzioni rigenerate nelle diverse maniere presentano la possibilità di diversa composizione, in relazione alle sostanze minerali che hanno investito e più o meno profondamente disciolto, e in relazione alle loro condizioni di temperatura, di pressione e persino di iniziale composizione chimica.

Ma una volta originate, le soluzioni tendono ad obbedire a leggi definite e lentamente tendono ad uniformarsi, a parità dei fattori esterni che agiscono. È evidente che, indipendentemente dalla loro origine o meglio dal loro modo di rigenerazione, le soluzioni tendono a muoversi con le stesse leggi, a permeare le rocce in maniera analoga, a rideporre paragenesi minerali secondo le note regole della minerogenesi e della petrogenesi. Le paragenesi rigenerate, possono, cioè, essere diverse in relazione a diversità di composizione della corrente di soluzioni ed alle sue condizioni fisiche, ma esse paragenesi sono eguali a parità di tali condizioni, qualunque sia il modo di rigenerazione delle soluzioni.

Altrettanto si può dire circa i problemi riguardanti le rigenerazioni di magmi e di rocce magmatiche.

Il *principio dell'origine dei magmi per rifusione di rocce*, cioè in definitiva, della *rigenerazione dei magmi*, dato che direttamente o indirettamente tutte le rocce derivano da prodotti magmatici, è noto e diffuso ancora più ampiamente del principio della rigenerazione dei giacimenti, anche se non è stato accettato da tutti gli studiosi, ed ha dato origine ad una serie di complessi e interessanti dibattiti che continuano tuttora.

L'origine dei magmi per anatexis è interpretata in base ad apporto o sviluppo di calore per cause, che sono diverse per i diversi Autori: sprofondamenti notevoli, venute di magmi, venute di calore, frizione, radioattività, energia nucleare, ecc.

Secondo il mio parere, rigenerazioni di magmi si devono verificare per tutte queste ragioni e forse anche per altre; ma essenzialmente per energia nucleare ⁽¹⁾.

Una volta avvenuta la rigenerazione del magma, la sua cristallizzazione deve procedere secondo modalità che sono indipendenti dalle rocce da cui deriva il magma stesso, sempre a parità di condizioni e di composizione.

Che vi sia diversità di composizione fra un magma giovanile ed un magma rigenerato, a parità di tipo (per esempio granitico) è ancora troppo poco dimostrato. Ma soprattutto sappiamo ancora troppo poco delle trasformazioni che avvengono nelle profondità della litosfera e intravediamo appena la trasmutabilità degli elementi chimici, particolarmente come processo che si accompagna a sviluppi di energia nucleare.

(1) Secondo VAN BEMMELEN [bibl. 1], durante l'evoluzione dei pianeti dovrebbero verificarsi essenzialmente reazioni fra gli involucri elettronici esterni degli atomi, mentre lo sviluppo di energia nucleare sarebbe caratteristico dell'evoluzione stellare. Ma nella litosfera, secondo il mio parere [ved. anche bibl. 2], esistono tutte le condizioni per ammettere locali e limitati sviluppi di energia nucleare.

Circa diversità di contenuto in elementi tipici di alcuni giacimenti metalliferi, si pensi che una rifusione deve colpire una zona relativamente vasta della litosfera, quale che sia la causa che la produce. Come è noto, la massa fusa che si origina inizialmente ha, in generale, composizione granitica fino a granodioritica, poichè tale è la composizione più comune dell'eutectico per le rocce più abbondanti nella litosfera sialica (arenarie, argille, graniti s. l. e corrispondenti metamorfici). Ma questo eutectico, anche ammettendo un contenuto del 3-4 % di sostanze volatili e in particolare di acqua nelle rocce originarie, si forma a temperature che non possono essere certamente molto lontane dal migliaio di gradi, tenuto presente che le rifusioni si devono verificare in genere a profondità relativamente notevoli. A tali temperature, la mobilitazione (se non addirittura la rifusione) deve necessariamente interessare anche la maggior parte dei giacimenti metalliferi.

A proposito della presunta povertà in metalli rari dei magmi anatectici, c'è una considerazione che mi sembra decisiva; la quantità di tali metalli concentrata in giacimenti è una piccolissima parte di quella contenuta globalmente, per una data zona, in tutte le rocce della litosfera sialica sotto forma di piccole quantità disperse. Su questo argomento ritornerò fra poco.

Si noti infine che una roccia apparentemente magmatica si può rigenerare, sempre in accordo con moderne ipotesi, senza che si abbia rifusione, ma per semplice azione metasomatica di soluzioni: in tali casi si può parlare di una rigenerazione di rocce ma non di magmi.

*
* * *

Rigenerazioni di magmi e di soluzioni metallifere rappresentano due problemi spesso evidentemente collegati, per i quali non si può prescindere da uno trattando dell'altro. Inoltre, per entrambi i problemi, la accettazione di questa o di quella interpretazione dipende dal grado di estensione del concetto. In altre parole, è più facile accettare l'idea di rigenerazioni *parziali* di giacimenti e di magmi, che non il concetto di rigenerazioni *totali*, anche se esistono argomenti solidi in favore di questo concetto. Ma la verosimiglianza del principio generale di rigenerazione, sia di magmi che di soluzioni metallifere, è evidente per innumerevoli osservazioni di diversi ricercatori.

È merito di Schneiderhöhn di avere richiamato l'attenzione degli studiosi in questi due ultimi decenni sopra la rigenerazione dei giacimenti [bibl. 3]. Recentemente lo stesso Autore ha voluto proporre una classificazione dei giacimenti [bibl. 4] parzialmente nuova, sulla base geotettonica delle note concezioni di Stille, soprattutto introducendo due nuovi gruppi di giacimenti.

Se non fosse esplicitamente dichiarato da Schneiderhöhn, basterebbe osservare le tre grandi categorie da lui proposte, per comprendere come

egli basi la sua classificazione sui citati criteri geotettonici, anzichè su solidi principî chimico-fisici e genetici. Le tre grandi categorie proposte di giacimenti endogeni sono: 1^a *giacimenti magmatici di serie normale degli orogeni primitivi*; 2^a *giacimenti rigenerati*; 3^a *giacimenti della serie metamorfica negli scudi antichi precambrici*.

Dal punto di vista genetico, non mi pare sempre ammissibile una sostanziale generale diversità fra due correnti idrotermali, a parità di condizioni fisiche, una derivante da un ammasso magmatico e l'altra da una mobilitazione metamorfica. Non è provato che quest'ultima metta in circolazione maggiore quantità di silicati di fronte alla corrente di origine magmatica, mentre il contenuto in minerali metalliferi (per esempio solfuri) può essere scarso o nullo nella corrente idrotermale di origine magmatica. Se osserviamo le aureole di contatto dei grandi ammassi intrusivi fino al limite estremo di penetrazione delle soluzioni magmatiche, troveremo che i minerali di nuova formazione sono per la grandissima parte costituiti da silicati e possiamo anche constatare la grande analogia fra effetti di manifestazioni idrotermali di origine magmatica e di origine metamorfica.

Inoltre, una rigenerazione può interessare un giacimento senza distruggerlo, cioè solo con rimaneggiamenti spesso assai limitati, per cui si può parlare di giacimento magmatico più o meno rigenerato, senza attribuirlo ad una nuova categoria.

La nuova distinzione dei giacimenti proposta dallo Schneiderhöhn si basa essenzialmente sul seguente presupposto, che l'Autore enuncia ripetutamente e ribadisce in tutta la sua trattazione: dopo il cambrico si è verificata per l'Eurasia una sola orogenesi metallifera, la variscico-ercinica, per il Nord-America due orogenesi metallifere, la nevadica e la laramica. Tutte le orogenesi successive, e in particolare l'alpina, furono «sterili» di minerali metalliferi e produssero in prevalenza giacimenti rigenerati.

I tipici giacimenti magmatici originari si trovano solo nelle masse cratoniche denudate degli orogeni metallici primitivi («reine metallische Urogene»), cioè nelle masse varisciche dell'Europa centrale, negli Urali, nelle zone dei ripiegamenti nevadici e laramici degli Stati Uniti, ecc. Secondo l'Autore, se sopra tali masse cratoniche si depositarono, per parziali sprofondamenti o per «parageosinclinali» (secondo Stille), coperture di sedimenti e queste coperture furono fratturate in movimenti epirogenetici, una parte dei minerali metalliferi dei giacimenti dell'imbasamento venne disciolta ad opera di successive correnti idrotermali non metallifere («metallfreie Thermen») e rideposta entro le fratture della copertura, originando *giacimenti rigenerati in zone epirogenetiche* (esempi in Francia, Germania occidentale, Nord-Africa francese, ecc.).

Nelle masse orogene non completamente consolidate, in uno stato «quasi-cratonico», sempre secondo Schneiderhöhn, per sprofondamenti in zone ad alta temperatura, si verifica pure rigenerazione di giacimenti antichi con una rimobilizzazione generale, con processi di rideposizione nel soprastante orogene più recente. Tali rigenerazioni si notano nelle Alpi, nelle

Dinaridi, nelle Balcanidi e in parti degli orogeni circumpacifici. Esse, secondo l'Autore citato, sono operate da processi tettonico-metamorfici (specialmente nelle Alpi), talora con l'ausilio di un recente magmatismo privo di metalli (Carpazi, Balcanidi, Ande, Giappone, ecc.), e danno luogo alla formazione di *giacimenti rigenerati di tipo alpino* («Alpinotyp regenerierte Lagerstätten»).

Già da questo brevissimo riassunto appare la complessità dei concetti che informano la sistematica di Schneiderhöhn. Secondo il mio parere, però, questi concetti sono troppo legati alla tendenza umana di inquadrare in schemi elementari i complessi fenomeni naturali; inoltre essi sono in parte basati su principî che contrastano con alcuni fondamenti della petrogenesi.

In primo luogo è da osservare che per ammettere una lunga e complessa azione operata durante una intera orogenesi soltanto da correnti idrotermali non metallifere (erzfreien Thermen) occorre dimostrare l'esistenza di sole tali correnti. Nessuna prova possediamo in proposito e perciò l'ammissione della loro esistenza da sole, cioè non accompagnate da correnti variamente metallifere, è semplicemente ipotetica. Non esiste alcun dubbio che si possano sviluppare nella litosfera manifestazioni idrotermali non metallifere e che esse possano sciogliere e rimettere in circolazione le sostanze contenute in un giacimento metallifero. Ma che durante una intera orogenesi e durante la corrispondente fase metallogenica si abbiano sole manifestazioni idrotermali prive di metalli, non mi pare probabile.

In secondo luogo, per un basilare principio probabilistico, ritengo che una generale rimobilizzazione di materia durante un processo orogenetico, in particolare durante l'orogenesi alpina, determini una *generale dispersione di materia e non una concentrazione*.

Poniamo il caso del gruppo di giacimenti Raibl-Bleiberg-Auronzo: Schneiderhöhn presume che si siano originati per «reviviscenza di più antichi profondi giacimenti variscici attraverso l'orogenesi alpina» [bibl. 4 p. 53]. Se sotto la regione considerata, entro il substrato variscico, esistessero giacimenti metalliferi che fossero stati coinvolti in una mobilizzazione generale di materia durante l'orogenesi alpina, le sostanze in essi contenute sarebbero state disperse anzichè nuovamente concentrate, per la evidente ragione che le soluzioni dovettero permeare una vastissima zona dell'orogene, a temperatura verosimilmente uniforme, zona che deve avere un volume enormemente superiore a quello dei giacimenti ipoteticamente ammessi nel substrato variscico. Una parziale concentrazione, con precipitazione selettiva, potrebbe ammettersi solo come casuale e strettamente localizzata.

Una grande massa di solvente puro che colpisce e scioglie un piccolo blocchetto di sostanza solubile (il rapporto potrebbe essere quello fra l'acqua di un fiume e una zolla di zucchero), può deporre, concentrata, una parte del soluto solo in via del tutto eccezionale.

Ma c'è una terza osservazione che si oppone alla generalizzazione dell'origine per rigenerazione dei giacimenti di tipo alpino: *i tipici metalli dei*

minerali metalliferi concentrati nei giacimenti della litosfera sialica sono una piccolissima parte degli stessi metalli dispersi nelle diverse rocce della litosfera. Per esempio: lo Zn contenuto in tutti i giacimenti delle Alpi Orientali (noti alla superficie e supposti a profondità) è da calcolare molto inferiore ad un millesimo della quantità di Zn contenuta in tutte le rocce che costituiscono la stessa regione ⁽²⁾. Così si dica per Pb, Cu, ecc. Perchè una generale mobilitazione di materia in un orogene dovrebbe rimettere in circolazione solo la piccola parte di metalli dei giacimenti e non la maggiore quantità dispersa in tutte le rocce? Noi sappiamo che nelle mobilitazioni metamorfiche vengono disciolti persino i silicati e il quarzo in primo luogo. Ma le mobilitazioni, evidentemente, devono interessare solo una percentuale degli elementi.

Dunque, secondo il mio parere, i giacimenti che sono depositati da correnti idrotermali durante una mobilitazione generale in un orogene, vera mobilitazione metamorfica, non sono da considerare *rigenerati*, ma semplicemente di *origine metamorfica* e sono da definire *idrotermali di metamorfismo tettonico*, distinguendo in senso puramente teorico un idrotermalismo magmatico da uno metamorfico. Tali giacimenti non sono dovuti soltanto a materiale asportato da precedenti giacimenti, ma a materia mobilitata in senso generale entro un orogene, con o senza il sussidio di magmatismo.

Del resto, che esistano giacimenti alpini originati da soluzioni circolanti durante il metamorfismo tettonico (io direi durante i vari metamorfismi tettonici) è un concetto ammesso da molti Autori, da Angel, da Clar, da Huttenlocher e da molti altri, in parte in lavori precedenti a quelli di Schneiderhöhn.

Questo Autore ammette [bibl. 4, p. 75] che vi possano essere nelle Alpi Orientali giacimenti dovuti ad apporto di nuova materia proveniente da ricristallizzazione metamorfica, come i giacimenti di magnesite e di siderite. È evidente che alla stessa maniera si possono essere formati anche giacimenti di galena, di blenda, di pirite, ecc. perchè la mobilitazione deve avere interessato anche gli elementi che costituiscono questi minerali.

Le soluzioni di mobilitazione circolanti in un orogene, sia pure con il concorso di un attivo e vasto magmatismo, secondo Schneiderhöhn (bibl., 4 p. 78), dovrebbero portare in soluzione i minerali di ogni tipo di giacimento, dal pegmatitico all'idrotermale di bassa temperatura, e poi depositarli assieme nello stesso giacimento. Così, tali giacimenti rigenerati dovrebbero essere caratterizzati da mescolanze « eterogenetiche » di minerali delle più diverse termalità. Secondo il mio parere, anche questo non si può verificare che in casi eccezionali; le soluzioni di mobilitazione in un orogene sono pur sempre nello stato fisico delle soluzioni di stretta origine magmatica e, in

(2) Una corteccia dello spessore di 2 Km. di litosfera a composizione media corrispondente alla zona metallifera delle Alpi Orientali dovrebbe contenere circa 3000 volte la produzione mondiale di Zn del 1950 e circa 1200 volte la produzione mondiale di Pb del 1950.

generale e con le dovute eccezioni, devono sciogliere selettivamente oppure depositare selettivamente oppure ancora sciogliere e depositare selettivamente materia, in rapporto alle condizioni chimico-fisiche della corrente e dell'ambiente circostante.

Si potrebbe obiettare che le soluzioni di mobilitazione metamorfica potrebbero essere povere o prive di quegli elementi (Cl, F, S, ecc.) che sono ritenuti apportatori di alcuni metalli. Ma anche questa ammissione non è dimostrata e anzi vi sono argomenti che depongono in favore di un contenuto di tali elementi nelle soluzioni che circolano durante i metamorfismi tettonici, particolarmente se si ammette il concorso di un qualsiasi magmatismo.

D'altra parte è ammissibile una mobilitazione di certi metalli, quali Pb, Zn, Cu, ecc., anche senza l'intervento di quegli elementi chimici che con tali metalli danno sostanze volatili.

L'argomento della mobilitazione metamorfica è però assai complesso e mi riprometto di trattarne in altra Nota.

* * *

Con queste mie osservazioni non voglio negare l'esistenza di giacimenti totalmente rigenerati, cioè formati a spese di minerali contenuti in altri precedenti giacimenti. Nelle zone epirogenetiche, lungo superfici di frattura o di scorrimento metallizzate, si può avere un trasporto di sostanze verso l'alto e la loro rideposizione entro fratture di terreni più recenti, che siano a loro volta riattivate come continuazione di più antiche superfici di discontinuità.

Ammetto pure che in alcuni giacimenti si possano verificare, anche nelle Alpi, rimobilizzazioni secondarie con impoverimenti, arricchimenti e nuove distribuzioni selettive di minerali.

Io stesso ho sostenuto il concetto [bibl. 2] che negli orogeni vi sia una continua rigenerazione e iniezione di magmi, accanto a venute di magmi giovanili. Alle stesse conclusioni sulla molteplicità delle manifestazioni magmatiche nelle Alpi arrivai ancora successivamente, dopo ventidue anni di rilevamento geologico del gruppo dell'Ortler e delle regioni circostanti e dopo un approfondito studio del materiale raccolto.

I miei studi mi hanno portato a concludere [bibl. 5] che *le manifestazioni magmatiche in tale regione* (e per estensione in tutte le Alpi) *sono state molteplici e che le più recenti sono dovute a magmi anatectici* originati per rifusione oppure per ringiovanimenti magmatici per mobilitazione.

Tali rifusioni si possono verificare, verosimilmente per locali e improvvisi sviluppi di energia termica nucleare, in qualsiasi posto della litosfera e in *qualsiasi momento*.

Le orogenesi non fanno che strizzare parzialmente o totalmente le masse fuse (in generale, cioè magmi giovanili o palingenici) verso ed entro regioni dell'orogene che presentino indebolimenti o discontinuità.

Io considero gli orogeni come i luoghi nei quali il magmatismo ha la maggiore possibilità di venire spinto a manifestarsi verso le parti più superficiali della litosfera.

Le relazioni fra orogenesi e magmatismo sono, in definitiva, da considerare più locali che temporali.

Il concetto che il magmatismo sialico si sia esaurito con l'orogenesi variscico-ercinica e che per le orogenesi successive non sia rimasto a disposizione alcun magma sialico giovanile, costituisce una eccessiva schematizzazione, analoga a quella di considerare la stessa orogenesi come l'unica metallifera.

Non vi è dubbio che i giacimenti dovuti al magmatismo connesso con l'orogenesi variscico-ercinica si presentano, dopo un intenso smantellamento della copertura, nelle migliori condizioni per osservarne la regolare successione zonale di paragenesi. All'opposto, i giacimenti legati al magmatismo alpino, coi suoi cicli ripetuti irregolarmente, si trovano attualmente incisi solo nelle parti più lontane dalle maggiori masse intrusive (evidentemente ancora profonde) e in zone più vicine al magmatismo delle masse magmatiche minori, che per la loro frequente esiguità, non riuscirono a sviluppare grandi e durevoli correnti pneumatolitiche o idrotermali.

Altrettanto fuori dubbio è il fatto che il tentativo di legare una serie di giacimenti minerari a questa o a quella manifestazione magmatica visibile, è spesso un non senso, non solo perchè nello spessore della litosfera possono trovarsi ammassi magmatici alle più diverse profondità, ma anche perchè i giacimenti possono essere originati da soluzioni provenienti da zone di mobilizzazione, nelle quali non si è raggiunta la temperatura necessaria per la produzione di magmi.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] R. W. VAN BEMMELEN, *Cosmogony and Geochemistry*. « Report of the eighteenth Session, International Geological Congress, 1948 », part 2^a, 9-21, London 1950.
- [2] C. ANDREATTA, *Successione nelle manifestazioni magmatiche nel massiccio Ortles-Cevedale*. « Studi Trent. Sc. Nat. », 23, 161-187 (1942).
— *Energia nucleare e magmatismo*. « Scientia », 40, 77-83 (1946).
- [3] H. SCHNEIDERHÖHN, *Lehrbuch der Erzlagerstättenkunde*, 1941.
— *Schwergatgänge und pseudomorphe Quarzgänge in Westdeutschland*. « Neues Jahrbuch f. Min., Mh. A. » 191-202 (1949).
— *Metallepochen, Metallprovinzen und sekundärhydrothermale Vorgänge*. « Rend. Soc. Min. It. », 7, 109-114 (1951).
- [4] H. SCHNEIDERHÖHN, *Genetische Lagerstättengliederung auf geotektonischer Grundlage*. « Neues Jahrbuch f. Min., Mh. A. », 47-63 e 65-89 (1952).
- [5] C. ANDREATTA, *Syntektonische und posttektonische magmatische Erscheinungen in der Ortlergruppe*. Conferenza tenuta a Vienna presso la Società Mineralogica Austriaca il 26 maggio 1952, che sarà pubblicata nelle « Tschermak's Min. Petr. Mitt. ».

Biologia. — *Risultati sperimentali e problemi sui trapianti, espianti, parabiosi xenoplastiche negli Anfibi*^(*). Nota^(**) del Socio GIULIO COTRONEI.

Dal 1929 l'Istituto di Anatomia Comparata di Roma, già a quel tempo da me diretto, ha intrapreso, per mia iniziativa, lo studio delle costituzioni zoologiche scegliendo un materiale sperimentale tra i più adatti: gli Anfibi. Non è il caso, ora, di riaffermare l'alto interesse dell'argomento né, tanto meno, dare un giudizio sull'originalità dell'impostazione personale; questa e quello oggi va lasciato, dopo tanto tempo, a quella revisione obbiettiva che è poi l'anima dello sviluppo della Scienza.

Nel lungo lavoro che da quell'anno fu eseguito, ebbi la preziosa collaborazione di molti valenti studiosi tra i quali ricordo lo Spirito, il Guareschi, il Perri. Le ricerche iniziate con esperienze di trapianto⁽¹⁾, si svilupparono con gli espianti e le parabiosi; anche altre tecniche furono tentate, tutte rivolte alla risoluzione di questioni complesse affrontate con una metodologia che mirava sempre più a chiarire gli aspetti molteplici delle esperienze xenoplastiche tra Anfibi anuri e Anfibi urodeli, rivelati nel contrasto sia tra la compatibilità e la incompatibilità embrionale, sia nella differente incompatibilità embrionale e larvale.

Mi sia consentita una semplice constatazione obbiettiva: dato il gran numero di questioni così complesse trattate, anche se tutte coordinate, come credo, da una medesima impostazione rappresentata dallo studio della costituzione zoologica, in tutti i vari aspetti considerati, qualcosa fu raggiunto di nuovo, e nell'insieme i risultati raggiunti costituirono e costituiscono, obbiettivamente considerati, qualcosa di organico rispondente allo spirito informativo; ed è questo che io desidero qui richiamare perchè questo spirito coordinatore può, per tante questioni, anche antagoniste, facilmente ed anche involontariamente, sfuggire. Non è questo o quel risultato che voglio qui ricordare, ma lo sviluppo storico di vent'anni di nostre ricerche.

Tengo subito a riaffermare che i trapianti xenoplastici negli Anfibi non furono iniziati da me: basta ricordare i risultati sugli organizzatori ed un antico lavoro di Lewis; la tecnica dei trapianti xenoplastici ebbe però fin dalla prima Nota (1929) una determinata, ben chiara, direttiva biologica nell'indagine dei problemi non saprei dire se più difficili o se, forse per questo, più trascurati, riguardanti la costituzione zoologica.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata « G. B. Grassi » della Università di Roma.

(**) Presentata nella seduta del giorno 8 novembre 1952.

(1) Nei « Rendiconti dei Lincei » dal 1929 al 1932 furono pubblicate le prime nove Note sui trapianti xenoplastici tra Anuri e Urodeli, di G. COTRONEI e A. SPIRITO, di G. COTRONEI e C. GUARESCHI, e di G. COTRONEI dal titolo *Costituzione zoologica e trapianti*.

Ho già detto che sotto molti aspetti i problemi furono da noi metodicamente indagati; questi vari aspetti furono palesati dalle esperienze di trapianti tra Anuri e Urodeli ed il processo della rapida incompatibilità embrionale di Urodeli su *Rana* e della compatibilità di Urodeli su *Hyla arborea* rappresentò uno dei capisaldi per le ricerche causali (la compatibilità tra Tritone e *Hyla* fu annunciata da Cotronei e Spirito fin dal 1930, Nota III). Questa non è una considerazione che esponiamo di raccatto, ma è lo spirito direttivo di tutte le ricerche sull'argomento ed il lungo cammino già percorso nel 1937 veniva così riassunto nell'introduzione della Memoria ⁽²⁾ esponente i risultati sugli espianti xenoplastici di Cotronei e Perri « Lo studio delle compatibilità ed incompatibilità, che si riescono sperimentalmente a dimostrare tra le varie forme di Anfibi, è certo un argomento di grande interesse biologico e che pertanto ha richiamato da parecchi anni l'attenzione di G. Cotronei che, con la collaborazione di numerosi allievi (A. Spirito, C. Guareschi, T. Perri, O. Marcucci, E. Ruzza), ha sistematicamente indagato il difficile argomento ». Si mettevano, sempre nella introduzione, in risalto le differenze da noi studiate tra incompatibilità embrionale e incompatibilità larvale e si prospettava la necessità di ulteriori ricerche col metodo degli espianti: « Questo metodo, certamente assai meno semplice, o meglio più difficoltoso proprio per gli ostacoli che bisogna superare per una sufficiente durata della sperimentazione, presentava d'altra parte il vantaggio di poter discriminare con maggior sicurezza i vari fattori sperimentali, onde una diretta analisi dei fattori, di cui precedenti esperienze ci mostravano l'importanza ».

E in questa stessa Memoria del 1937, in cui si ricordava il lungo cammino già da noi percorso dal 1929, si metteva in risalto « che è stato solo l'uso del metodo comparativo sperimentale, metodo a cui fondamentalmente si ispirano le ricerche di questa Scuola, che ha permesso di valutare la reale importanza delle prime ricerche compiute e di tracciare una via ormai seguita per lungo tratto. In special modo le esperienze che mostrano risultati profondamente diversi nei trapianti di abbozzi d'organi di Urodeli su diverse forme di *Rana* in confronto a quelle eseguite su *Hyla arborea*, furono orientative dapprima e poi decisamente significative ». E subito dopo, quindici anni or sono, io esprimevo il mio disappunto riferendomi ad un lavoro della Hewitt (1934) in cui si discutevano le nostre interpretazioni prescindendo da tutte quelle differenze che le nostre ricerche prima ancora del 1934 avevano messo in evidenza nelle varie combinazioni xenoplastiche. Era da quanto precede, già accertata una netta distinzione tra differenti incompatibilità e quindi per me è incomprensibile perchè ancor oggi si voglia tener presente nella spiegazione causale della incom-

(2) G. COTRONEI e T. PERRI, *Ricerche sulle compatibilità ed incompatibilità embrionali negli Anfibi studiate con il metodo degli espianti*. « Arch. Zool. Ital. », XXIV, 1937. In questo lavoro il lettore troverà molte indicazioni bibliografiche riguardanti i lavori, fino al 1936, sull'argomento, della scuola di Roma.

patibilità soltanto l'influenza del vitello da noi certamente affermata e sostenuta nei casi di incompatibilità immediata embrionale quale risultava da esperienze di trapianti di abbozzi embrionali di Urodeli su embrione di *Rana*. Nei trapianti inversi di abbozzi embrionali di *Rana* su embrioni di Urodeli le nostre esperienze dimostravano un contegno differente, le distruzioni avvenivano dopo il differenziamento, in rapporto alle nuove condizioni larvali. E tutto questo fu ben messo in risalto fin dalle prime nostre Note. L'impostazione generale nello studio delle costituzioni zoologiche mirava proprio a mettere in evidenza il differente comportamento sperimentale fra le varie forme esaminate.

Il lavoro a cui mi sono richiamato era, lo ripeto, del 1937 ma esso faceva seguito a due Note pubblicate nei « Rendiconti dell'Accademia dei Lincei » nel 1934 ⁽³⁾ e nel 1936 ⁽⁴⁾. Già il titolo delle Note, sulle compatibilità ed incompatibilità negli espianti, mette in chiara luce la natura delle ricerche e delle verifiche causali: la prima espone solamente i risultati sperimentali tra Tritone e *Rana*, ma nella seconda Nota del 1936, in cui sono riferite le ricerche già compiute nel 1935, si confermano i risultati di esperienze tra *Triton* e *Hyla* che con gli espianti ribadivano quella compatibilità che Cotrone e Spirito avevano osservato nei trapianti già da molti anni (1930). Le esperienze di espianto erano dunque un controllo necessario, dato l'isolamento dei fattori che con questa tecnica si poteva precisare; e nel corso del lavoro del 1937 aggiungevamo, in nota, che eravamo lieti di rilevare, dopo lettura di una relazione di Jucci alla Società italiana per il Progresso delle Scienze (1936) l'interesse con cui venivano seguiti i nostri risultati, dato che si auspicava che gli espianti venissero estesi all'*Hyla arborea*, ricerche che noi peraltro avevamo già estese per nostra iniziativa in quanto, anche noi, avevamo rilevato quella logicità di sviluppo delle indagini. È superfluo avvertire che le ricerche sugli espianti miranti all'isolamento dei fattori causali non erano che un aspetto particolare del quadro più generale del nostro studio; sono ricerche che richiesero lunghi, continui e tenaci controlli.

Sempre in questo quadro generale, vanno considerate nell'esame delle compatibilità ed incompatibilità le ricerche sulle parabiosi (Cotronei e Urbani-Mistruzzi 1946-48 ⁽⁵⁾, ⁽⁶⁾). Non dimenticammo naturalmente di ricordare quelle osservazioni di Reverberi, che su questo punto ci aveva preceduto, riguardanti esperienze tra *Rana* e Tritone. Le nostre esperienze sulle parabiosi mirarono a mettere in evidenza, con nuove verifiche, gli eventuali fenomeni

(3) G. COTRONEI e T. PERRI, *Prime ricerche sulle compatibilità e incompatibilità embrionali negli Anfibi studiate con il metodo degli espianti*. « Rend. Acc. Lincei », XX, 1934.

(4) G. COTRONEI e T. PERRI, *Ulteriori ricerche sulle compatibilità ed incompatibilità embrionali negli Anfibi studiate con il metodo degli espianti*. « Rend. Acc. Lincei », XXIV, 1936.

(5) G. COTRONEI e L. URBANI-MISTRUZZI, *La costituzione zoologica degli Anfibi studiata con esperienze di parabiosi tra Anuri e Urodeli*. « Rend. Acc. Lincei », VIII, vol. I, 1946.

(6) Id. id., Nota II, « Rend. Acc. Lincei », VIII, vol. IV, 1948.

di compatibilità ed incompatibilità ed anche in queste esperienze mettemmo a confronto le combinazioni *Rana*-Tritone e *Hyla*-Tritone: la prima per la incompatibilità e la seconda per la compatibilità. Con queste ricerche di morfologia sperimentale nel periodo 1946-48 veniva confermato, dopo quasi vent'anni, quel complesso di indagini che si erano prospettate fin dai primi due anni di fecondo lavoro.

I trapianti avevano fatto vedere la incompatibilità e la compatibilità tra due combinazioni e nelle condizioni sperimentali più varie; e ci avevano dimostrato una incompatibilità larvale diversa da quella embrionale; gli espianti ci avevano permesso l'isolamento e lo studio di determinati fattori; la parabiosi ci permetteva di vedere come nelle combinazioni Tritone-*Rana*, *Hyla*-Tritone i fatti essenziali venissero confermati pur nelle differenti modalità rappresentate da interi organismi messi intimamente in connessione; la parabiosi rappresenta appunto una vita in comune ed è evidente che perchè la incompatibilità si manifesti in queste condizioni, si deve verificare la penetrazione di quelle sostanze che sono alla base dei processi di incompatibilità: se nelle parabiosi si è trattato di un semplice accollamento è evidente che la compenetrazione è lenta e difficoltosa.

Nelle nostre ricerche di parabiosi tra *Hyla* e Tritone furono interessanti per molte condizioni funzionali le intime fusioni di organi, proprio quelle fusioni che avevamo ottenuto nelle nostre antiche ricerche di trapianti.

Non è qui il caso di ricordare l'interesse che avevano questi esperimenti xenoplastici: le fusioni degli organi e dei tessuti simili erano state lo scopo delle profonde ed originali ricerche di Born, il portare lo studio degli innesti omoplastici (ricerche che io stesso avevo ripreso nel 1921) nel campo xenoplastico doveva a me servire nell'estensione delle indagini, proprio ad affermare quello studio sulle costituzioni zoologiche che nel 1929 riprendeva le più antiche ricerche sulle affinità embrionali di tessuti simili.

Le fusioni xenoplastiche tra donatore ed ospite dimostravano nelle forme di compatibilità embrionale e larvale le proprietà di affinità dei tessuti simili, anche con intima regolazione, ancora indifferenziati. E questi problemi avevano un particolare interesse soprattutto per l'impostazione e la valutazione generale del piano di lavoro. E non minore interesse ha quello studio di accrescimento di organi trapiantati di Urodeli su *Hyla* iniziato da Cotronei e Spirito ed esteso nel nostro Istituto da Nicolosi ⁽⁷⁾, ⁽⁸⁾, studio che mise in risalto sia l'utilizzazione del vitello di *Hyla*, sia l'utilizzazione degli alimenti assunti dall'ambiente esterno dalla larva di Anuro per l'accrescimento, nel periodo larvale, degli organi dell'Urodelo in essa trapiantati. Quale più semplice modo di dimostrare la corrispondenza metabolica nei trapianti xenoplastici di massima compatibilità?

(7) G. NICOLOSI, *Ricerche sull'accrescimento embrionale e larvale degli abbozzi oculari di Anfibi trapiantati xenoplasticamente*. « Rend. Accad. Lincei », vol. XXIX, 1939.

(8) G. NICOLOSI, *Ricerche sull'accrescimento embrionale e larvale degli abbozzi oculari trapiantati xenoplasticamente tra Anuri e Urodeli*. « Arch. Zool. Ital. », vol. XXX, 1942.

Risulta pertanto che l'accertamento dei dati ricavati dalla Morfologia sperimentale non fu fine a se stesso, ma mirò a svilupparsi nell'indagine fisiologica. E se lo studio dei diretti rapporti nervosi tra Anuri ed Urodeli, accertati da Cotronei e Spirito, fu portato più avanti da Autori stranieri, questo sviluppo serve a meglio valutare quella corrispondenza metabolica xenoplastica risultante dagli studi sull'accrescimento dell'abbozzo embrionale di Tritone trapiantato su *Hyla* avanti riferito.

Le relazioni « fra parti e parti eterogenee » furono costantemente tenute di mira; si rimane quindi un poco sorpresi a leggere in un lavoro di A. Passalacqua ⁽⁹⁾ dell'Istituto di Palermo che « le relazioni tra parti e parti eterogenee sono state invece poco studiate. Negli Anfibi qualcosa fu fatto da Cotronei e collaboratori, a cominciare dal 1929, con esperienze di fusione di abbozzi olfattori tra Anuri ed Urodeli; di combinazioni omoplastiche di abbozzi oculari su parti isolate di *Rana esculenta*; di vescicola ottica di Anuro con parte di quella di Urodelo; di encefalo di Anuro con encefalo di Anuro o di Urodelo e con altre esperienze nelle quali essi unirono la vescicola ottica di *Triton* con territori embrionali di *Rana* ».

Già la semplice enumerazione di questi svariati argomenti indica che il « qualcosa » era abbastanza ampio; ma al qualcosa elencato bisogna aggiungere molti altri argomenti che servono ad illustrare le relazioni tra parti e parti eterogenee; basta pensare a quanto fu da noi accertato circa il destino di queste parti associate, anche se fuse e regolate, quando interviene la incompatibilità larvale; fatti tutti che non possono, in nessun modo, essere considerati in giusta luce se si prescinde da tutte le altre nostre esperienze. È doveroso però aggiungere che il Reverberi ⁽¹⁰⁾, direttore dello stesso Istituto, in un lavoro successivo molto più ampio ed in cui viene ampiamente esposta la letteratura sull'argomento, l'opera nostra viene giudicata diversamente con una valutazione che noi Autori non avremmo dato e non oseremmo dare: « Le ricerche di Cotronei e della sua Scuola, condotte su numerosi abbozzi e su numerose combinazioni hanno inizio, come fu detto nel 1929. Numerosi fatti fondamentali furono stabiliti con queste ricerche ».

Nell'estensione delle indagini ci proponemmo anche lo studio di altre forme di Anfibi per valutare le differenze costituzionali tra forme diverse, ed in questo campo trovano posto le pregevoli osservazioni personali di Reverberi. Nel 1939 la mia allieva M. T. Parravano ⁽¹¹⁾ pubblicò alcune osservazioni riguardanti i trapianti della vescicola ottica di Tritone su embrioni di *Discoglossus* notando che il comportamento di questa forma si avvicina a quello dell'*Hyla* mentre si allontana da quello di *Rana*, si presentava quindi utile l'estensione di queste indagini sul *Discoglossus*.

(9) A. PASSALACQUA, *Compatibilità e incompatibilità embrionali in espianti etero- e xeno-plastici*. « La Ricerca Scientifica », Anno 22, p. 1224 (1952).

(10) G. REVERBERI, *Trapianti e parabiosi xenoplastiche*. « La Ricerca Scientifica », Anno 22, p. 1355 (1952).

(11) M. T. PARRAVANO, *Il comportamento del « Discoglossus pictus » nei trapianti embrionali etero e xenoplastici*. « Rend. Accad. Lincei », vol. XXIX, 1939.

Nelle forme di rapida incompatibilità embrionale da noi studiate e mi riferisco a quelle che si hanno in abbozzi di Urodeli su embrioni di *Rana*, risulta da molte esperienze concordanti l'influenza del vitello (ed è proprio questo il campo delle nostre osservazioni che ebbe la più ampia conferma dai lavori di studiosi italiani di altri Istituti). È naturale che se, come abbiamo rilevato, ci sono altre forme che esprimono invece la compatibilità embrionale o larvale, almeno per un tempo più o meno lungo, è intuitivo, ripeto, che il complesso meccanismo che presiede poi ai fenomeni di citolisi debba nei vari casi presentare delle varianti notevoli. C'è forse da stupirsi per questo? Perchè nelle profonde differenze qualitative o costituzionali che si incontrano negli Anfibi, la diversa qualità delle forme non dovrebbe interferire nel fenomeno? Ancora oggi siamo d'avviso che in questo campo d'indagine la morfologia sperimentale, intesa anche e soprattutto in senso comparativo, vale per indicare i comportamenti differenziali e serve per base di partenza per ulteriori ricerche essenzialmente basate su procedimenti biochimici, e c'è posto per tanto nuovo lavoro ⁽¹²⁾ e per tanti nuovi studiosi se caso per caso conviene procedere nelle ulteriori esperienze ad integrare quanto è stato già accertato.

Ma come e perchè il vitello può esercitare tale influenza? C'è qualche base biochimica che possa lasciare intravedere qualche possibile spiegazione?

Siamo per quanto ora diremo in un campo puramente analogico e ben diverso dai risultati sperimentali avanti accennati, ma che tuttavia merita di essere considerato. È ben noto che Delazenne trattando la lecitina dell'uovo (ossia del vitello) con veleni animali liberava una sostanza intensamente emolitica che chiamava lisolecitina ⁽¹³⁾; seguirono le ricerche di Belfanti e di Belfanti e Contardi che estesero le osservazioni sulla natura dei veleni animali, che si possono ricondurre ad azioni enzimatiche, con formazione di prodotti a base di lisofosfatidi che, a differenza del fosfatide originario, posseggono una spiccata azione tossica.

Nelle mie ricerche prospettai nella spiegazione della rapida incompatibilità l'esistenza di un meccanismo immunitario dove il vitello agisce in senso di complemento; qui è opportuno ricordare le vecchie ricerche di Kyes e Sachs che considerarono l'azione della lecitina rispetto al veleno del cobra come quella di un complemento; altra analogia tra queste azioni citotossiche con i fatti che più direttamente ci riguardano è il differente

(12) È stato esaminato il comportamento dell'acido ribonucleico dell'abbozzo oculare sia di *Triton taeniatus* trapiantato su embrioni di *Rana esculenta*, sia di *Rana esculenta* trapiantato su embrioni di *Triton taeniatus*. Nelle esperienze finora eseguite, la quantità di acido ribonucleico nelle cellule ancora in buone condizioni è apparentemente normale; negli ammassi cellulari in necrosi la quantità di questo acido è notevolmente diminuita. Ma le osservazioni, riferite recentemente in una tesi di laurea del nostro Istituto, non le consideriamo definitive, anche perchè pensiamo debbano essere cimentati altri abbozzi embrionali in altre combinazioni xenoplastiche.

(13) Per le nozioni fondamentali riguardanti le lisolecitine si consulti: P. RONDONI, *Elementi di Biochimica*, IV Ediz., U.T.E.T., 1942.

comportamento che le lisolecitine possono avere su differenti specie, sia sensibili che insensibili.

Si formano anche nei nostri casi di rapida incompatibilità delle sostanze citolitiche analoghe alle lisolecitine? Soltanto uno studio biochimico analitico potrà dare una risposta obbiettiva. Sarebbe poi facile sulla carta prospettare eventuali prove da tentare per eventuali verifiche sul comportamento sperimentale, ma preferisco avvertire che nella realtà, per le condizioni embrionali, queste verifiche presentano non poche difficoltà.

Ma non è mio scopo appesantire questa Nota col fare appello a nuove ipotesi. Quelle che io adottai nell'esecuzione del lungo piano di lavoro si palesarono sempre nella formulazione concreta di ricerche sperimentali: con queste furono cimentate quelle questioni e quei problemi formulati concretamente fin dall'inizio e che rilevarono quelle diverse modalità che abbiamo analizzato, almeno crediamo, con la maggiore obbiettività; tuttavia ben sappiamo che tutto va continuamente revisionato alla luce dei nuovi progressi delle indagini biologiche.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Sulle derivate delle funzioni di Bessel rispetto all'ordine, nel caso in cui questo è la metà di un intero dispari.* Nota (*) di MARIA TERESA VACCA, presentata dal Corrisp. F. G. TRICOMI.

1. Il prof. Tricomi ha recentemente mostrato in questi stessi « Rendiconti »⁽¹⁾ che le derivate delle funzioni ipergeometriche confluenti $\Phi(a, c; x)$ e $\Psi(a, c; x)$ rispetto ai parametri a e c possono esprimersi mediante funzioni della stessa classe allorché il parametro c è un numero intero. Considerato che le funzioni di Bessel di ordine ν sono delle funzioni ipergeometriche confluenti relative ai parametri $a = 1/2 + \nu$ e $c = 2a = 1 + 2\nu$, ne segue che le derivate delle funzioni di Bessel rispetto all'ordine ν potranno esprimersi mediante funzioni ipergeometriche confluenti sempre che ν sia un intero o la metà di un intero dispari.

Nella Nota del prof. Tricomi è trattato il caso di ν intero; qui considero invece quello in cui ν sia la metà di un intero dispari. In tal caso le funzioni di Bessel si riducono notoriamente a funzioni elementari, ma non così le loro derivate rispetto all'ordine, che, come vedremo, risultano esprimibili mediante la funzione gamma incompleta complementare $\Gamma(\alpha, z)$ nel caso di $\alpha = 0$, cioè mediante l'*esponenziale integrale* e funzioni connesse.

(*) Pervenuta all'Accademia il 13 ottobre 1952.

(1) FRANCESCO G. TRICOMI, *Sulle derivate delle funzioni ipergeometriche confluenti rispetto ai parametri*. [« Rend. Lincei » (8), 12, 227-233 (1952)].

Nel caso della funzione di prima specie J le formule che saranno qui stabilite permettono di ritrovare immediatamente due dimenticate formule di Ansell e Fisher ⁽²⁾ stabilite, in vista della costruzione di tavole numeriche delle derivate di cui qui si discorre, derivando sotto il segno la rappresentazione integrale di Hankel della funzione J_ν .

2. Per calcolare le derivate rispetto all'ordine ν delle funzioni di Bessel, nel caso che qui interessa, potremo evidentemente limitarci a considerare le funzioni di Bessel di 3^a specie (o di Hankel) $H_\nu^{(1)}$ e $H_\nu^{(2)}$, con $\nu = \pm 1/2$. Infatti, una volta calcolate le derivate rispetto all'ordine ν delle funzioni $H_\nu^{(1)}(x)$ e $H_\nu^{(2)}(x)$, si è in grado di poter ottenere anche quelle delle altre funzioni di Bessel, per esempio di $J_\nu(x)$, utilizzando le formule che esprimono ciascuna funzione di Bessel quale combinazione lineare di quelle di 3^a specie. Inoltre dalla formula di ricorrenza segue subito un'analoga formula di ricorrenza per le derivate rispetto a ν , che consente la loro determinazione, nel caso in cui ν sia la metà di un intero dispari qualsiasi, quando siano note le loro espressioni per i particolari valori dell'ordine $\nu = \pm 1/2$.

Possiamo inoltre limitarci a considerare la sola funzione $H_\nu^{(2)}$ perchè, com'è ben noto, quando ν e x sono reali, $H_\nu^{(1)}(x)$ e $H_\nu^{(2)}(x)$ sono complesse coniugate.

3. La funzione di Hankel $H_\nu^{(2)}(x)$ è notoriamente connessa con la funzione ipergeometrica confluyente Ψ mediante la formula ⁽³⁾:

$$(1) \quad H_\nu^{(2)}(x) = i \sqrt{\frac{2}{\pi x}} (2x)^{\nu+1/2} e^{-i(x-\nu\pi)} \Psi\left(\frac{1}{2} + \nu, 1 + 2\nu; 2ix\right).$$

Posto per brevità:

$$(2) \quad \dot{\Psi}(a, c; x) = \Psi_a(a, c; x) + 2\Psi_c(a, c; x)$$

ed indicate analogamente con un punto sovrapposto le derivate delle funzioni di Bessel rispetto all'ordine ν , si ha quindi:

$$(3) \quad \dot{H}_\nu^{(2)}(x) = i \sqrt{\frac{2}{\pi x}} (2x)^{\nu+1/2} e^{-i(x-\nu\pi)} \dot{\Psi}\left(\frac{1}{2} + \nu, 1 + 2\nu; 2ix\right) + H_\nu^{(2)}(x) [\log(2x) + i\pi].$$

Dunque per calcolare $\dot{H}_\nu^{(2)}$ (e quindi anche $\dot{H}_\nu^{(1)}$) nel caso di $\nu = -1/2$ occorre il valore di $\dot{\Psi}$ per $a=c=0$, mentre nel caso $\nu = 1/2$ occorre $\dot{\Psi}$ per $a=1, c=2$.

(2) P. R. ANSELL and R. A. FISHER, *Note on the numerical evaluation of a Bessel function derivative*. [«Proc. London. Math. Soc.» (2), 24 (1926) LIV-LVI].

(3) Le notazioni e le formule qui adoperate relative alle funzioni ipergeometriche confluenti sono quelle usate da F. G. TRICOMI. Si vedano, per esempio, le sue: *Lezioni sulle Funzioni Ipergeometriche Confluenti* (Editore Gheroni, Torino 1952).

4. *Calcolo di $\dot{\Psi}(0, 0; x)$.* — Dalla nota formula di derivazione:

$$\frac{d^n}{dx^n} [x^{c-1} \Psi(a, c; x)] = (-1)^n (a - c + 1)_n x^{c-n-1} \Psi(a, c - n; x)$$

per $n = 1$ si ottiene:

$$\frac{d}{dx} [x^{c-1} \Psi(a, c; x)] = -(a - c + 1) x^{c-2} \Psi(a, c - 1; x)$$

e quindi, indicando con un apice la derivazione rispetto ad x , si ha:

$$x \Psi'(a, c; x) + (c - 1) \Psi(a, c; x) = -(a - c + 1) \Psi(a, c - 1; x).$$

Applicando ai due membri della precedente relazione l'operatore $\frac{\partial}{\partial a} + 2 \frac{\partial}{\partial c}$, si trova:

$$\begin{aligned} x \frac{\partial}{\partial x} \dot{\Psi}(a, c; x) + (c - 1) \dot{\Psi}(a, c; x) + 2 \Psi(a, c; x) = \\ = -(a - c + 1) \dot{\Psi}(a, c - 1; x) + \Psi(a, c - 1; x). \end{aligned}$$

Posto $c = 1$ ed osservato che sussiste ⁽⁴⁾ la relazione:

$$(4) \quad \dot{\Psi}(a, 1; x) = -\Psi(a, 1; x) \log x,$$

essendo inoltre

$$\frac{\partial}{\partial x} [\Psi(a, 1; x)] = -a \Psi(a + 1, 2; x)$$

risulta:

$$(5) \quad a [\dot{\Psi}(a, 0; x) + x \log x \Psi(a + 1, 2; x)] = \Psi(a, 0; x) - \Psi(a, 1; x).$$

D'altra parte, dalla formula di ricorrenza:

$$(a + x) \Psi(a, c; x) + a(c - a - 1) \Psi(a + 1, c; x) - x \Psi(a, c + 1; x) = 0$$

ponendo $c = 0$ si ricava:

$$x [\Psi(a, 0; x) - \Psi(a, 1; x)] = a(a + 1) \Psi(a + 1, 0; x) - a \Psi(a, 0; x)$$

che combinata con la (5) fornisce:

$$(6) \quad x [\dot{\Psi}(a, 0; x) + x \log x \Psi(a + 1, 2; x)] = (a + 1) \Psi(a + 1, 0; x) - \Psi(a, 0; x).$$

Ponendo $a = 0$ nella (6) ed essendo ⁽⁵⁾:

$$(7) \quad \Psi(0, 0; x) = 1, \quad \Psi(1, 2; x) = x^{-1}$$

risulta:

$$x [\dot{\Psi}(0, 0; x) + \log x] + 1 = \Psi(1, 0; x).$$

(4) Cfr. la Nota di F. G. TRICOMI cit. ⁽¹⁾.

(5) La prima delle (7) segue dalla $\Psi(0, c; x) = 1$ e la seconda discende dalla $\Psi(a, a + 1; x) = x^{-a}$, entrambe ottenute dalla relazione fondamentale tra Φ e Ψ .

Dalla formula di ricorrenza con $c-1$ e $c+1$ per $c=1$ si ha:

$$\Psi'(1, 0; x) = x \Psi'(1, 2; x) - x \Psi'(1, 1; x)$$

e quindi

$$\Psi'(0, 0; x) \mp \log x = -\Psi'(1, 1; x).$$

Ma se indichiamo con $\Gamma(\alpha, x)$ la funzione gamma incompleta complementare ⁽⁶⁾, si ha:

$$(8) \quad \Gamma(\alpha, x) = e^{-x} \Psi'(1 - \alpha, 1 - \alpha; x),$$

quindi per $\alpha=0$ si ottiene in definitiva:

$$(9) \quad \Psi'(0, 0; x) = -e^x \Gamma(0, x) - \log x.$$

5. *Calcolo di $\Psi'(1, 2; x)$.* - Dalla formula di derivazione:

$$(10) \quad \frac{\partial^n}{\partial x^n} [e^{-x} \Psi'(a, c; x)] = (-1)^n e^{-x} \Psi'(a, c+n; x)$$

ricordando la (2) si deduce facilmente:

$$\Psi'(a, c+n; x) = (-1)^n e^x \frac{\partial^n}{\partial x^n} [e^{-x} \Psi'(a, c; x)]$$

che, posto $a=1$, $c=1$, $n=1$ e tenuto conto della (4), diviene

$$\Psi'(1, 2; x) = e^x \frac{\partial}{\partial x} [e^{-x} \Psi'(1, 1; x) \log x].$$

Poichè dalla (10) ponendo $a=1$, $c=1$, $n=1$, si deduce che:

$$\frac{\partial}{\partial x} [e^{-x} \Psi'(1, 1; x)] = -e^{-x} \Psi'(1, 2; x),$$

risulta:

$$\Psi'(1, 2; x) = \frac{1}{x} \Psi'(1, 1; x) - \log x \Psi'(1, 2; x)$$

la quale relazione fornisce, con la seconda delle (7) e con la (8) in cui sia posto $a=0$, il desiderato risultato:

$$(11) \quad \Psi'(1, 2; x) = \frac{1}{x} [e^x \Gamma(0, x) - \log x].$$

6. *Determinazione di $\dot{H}_{-1/2}^{(2)}(x)$ e $\dot{H}_{1/2}^{(2)}(x)$.* - Dalla (3) per $\nu=-1/2$ si trova:

$$\dot{H}_{-1/2}^{(2)}(x) = i \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i(x+\pi/2)} \Psi'(0, 0; 2ix) + H_{-1/2}^{(2)}(x) [\log(2x) + i\pi]$$

e per la (9) si ha la formula:

$$\dot{H}_{-1/2}^{(2)}(x) = H_{-1/2}^{(2)}(x) [\log(2x) + i\pi] - i \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i(x+\pi/2)} [e^{2ix} \Gamma(0, 2ix) + \log(2ix)].$$

(6) Per le notazioni e formule relative alla funzione gamma incompleta vale una osservazione analoga a quella della nota (3).

Inoltre, considerando che dalla (1), per la prima delle (7), si ha:

$$H_{-1/2}^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-ix},$$

se ne conclude che è

$$(12) \quad \dot{H}_{-1/2}^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\frac{i\pi}{2} e^{-ix} - e^{ix} \Gamma(0, 2ix) \right].$$

In modo analogo, dalla (3) per $\nu = 1/2$ si trova:

$$\dot{H}_{1/2}^{(2)}(x) = i \sqrt{\frac{2}{\pi x}} 2x e^{-i(x-\pi/2)} \Psi(1, 2; 2ix) + H_{1/2}^{(2)}(x) [\log(2x) + i\pi]$$

e per la (11) si ottiene allora

$$\dot{H}_{1/2}^{(2)}(x) = H_{1/2}^{(2)}(x) [\log(2x) + i\pi] + \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i(x-\pi/2)} [e^{2ix} \Gamma(0, 2ix) - \log(2ix)].$$

Quindi osservando che dalla (1), tenuto conto della seconda delle (7), si ha:

$$H_{1/2}^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i(x-\pi/2)}$$

si giunge così alla formula:

$$(13) \quad \dot{H}_{1/2}^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[-\frac{\pi}{2} e^{-ix} + i e^{ix} \Gamma(0, 2ix) \right].$$

7. La (12) e la (13) sono le formule cardinali di questo lavoro.

Appoggiandosi ad esse, si riesce, per la via indicata in principio, ad esprimere in termini finiti le derivate rispetto all'ordine ν di qualsivoglia funzione di Bessel, nel caso in cui ν sia la metà di un intero dispari, per mezzo di funzioni elementari e della funzione gamma incompleta complementare $\Gamma(0, z)$.

Tenendo conto che

$$\Gamma(0, iy) = -Ci y + i \left(Si y - \frac{\pi}{2} \right)$$

dove

$$Ci y = - \int_y^\infty \frac{\cos t}{t} dt, \quad Si y = \int_0^y \frac{\sin t}{t} dt,$$

in luogo di $\Gamma(0, 2ix)$ si possono fare intervenire le due ultime funzioni (intabulate nelle note tavole di Jahnke-Emde) pervenendo così, con facili calcoli, alle formule di Ansell e Fisher, cui si è accennato in principio:

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} [Ci(2x) \cos x + Si(2x) \sin x],$$

$$\dot{J}_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} [Ci(2x) \sin x - Si(2x) \cos x].$$

Geometria algebrica. — *Sulle singolarità delle curve algebriche.*
 Nota di LUIGI CAMPEDELLI, presentata (*) dal Socio U. AMALDI.

1. Risale al Noether (1875) quello che l'Enriques indica come « l'acquisto più importante nella teoria delle singolarità »⁽¹⁾, e cioè il concetto della composizione di una singolarità mediante punti multipli infinitamente vicini. Nel caso delle curve piane (algebriche), ad esso si giunge attraverso il ricorso ad una serie di trasformazioni quadratiche, ciascuna delle quali, « dilatando » un punto in una retta, porta ad una precisa idea di quello che è l'« intorno » di un punto, P , e alla possibilità di determinare gli altri punti multipli che può avervi una curva, C , passante più volte per P .

Alla conclusione di tale indagine è il problema di riconoscere che il numero dei punti multipli della C , infinitamente vicini a P , è finito. A ciò si arriva per vie diverse, e tra queste la più espressiva è quella che fa ricorso all'esame del comportamento, nei punti multipli della C , della curva polare prima, φ , di un punto generico del piano rispetto alla C . Poichè la φ passa per tutti quei punti, siano essi distinti o infinitamente vicini, il loro numero è certo finito (supposta la C priva di componenti multiple), poichè altrimenti la φ farebbe parte della C ⁽²⁾.

Ma a questo procedimento ha mosso un'acuta obiezione B. Segre⁽³⁾.

Il modo nel quale è definita la φ determina in essa il passaggio, con date molteplicità, per i punti singolari della C . Ma siamo sicuri che questi punti multipli della φ si presentino *effettivamente*? Non può accadere che il gioco delle condizioni a cui è assoggettata la φ conduca a delle molteplicità *effettive*, comprendenti quelle *virtuali* volute dalle circostanze, ma diverse da esse?

Se la cosa si verificasse, e venisse a mancare il passaggio della φ per i punti multipli della C che si trovano infinitamente vicini ad altri, nei loro intorni da un certo ordine in poi, cadrebbe l'assurdo sopra rilevato, e non sarebbe più lecita la deduzione che se ne fa.

A conforto del suo appunto — che sembra sfuggito anche ai più autorevoli trattatisti — il Segre mostra degli ingegnosi esempi di curve piane nelle

(*) Nella seduta dell'8 novembre 1952.

(1) Cfr. F. ENRIQUES e O. CHISINI, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, vol. II, libro IV, cap. III, § 29 (Bologna, Zanichelli, 1918).

(2) Per le considerazioni qui accennate, e per altre a cui verrà fatto riferimento in seguito, cfr., per esempio, F. ENRIQUES e O. CHISINI, op. cit. Ci sia consentito di rimandare anche a L. CAMPEDELLI, *Lezioni di geometria*, vol. II, p. II, *Le curve e le superficie*, la cui 2ª ed. (attualmente in corso di stampa, Padova, « Cedam ») ha dato motivo al presente scritto.

(3) B. SEGRE, *Sullo scioglimento delle singolarità delle varietà algebriche* (« Annali di Matematica pura ed applicata », ser. IV, to. XXXIII, 1952). Questo importante studio si consulti anche per la ricca bibliografia.

cui singolarità le polari non hanno il comportamento prescritto ⁽⁴⁾, e presenta una ricostruzione di tutta la teoria, che appare di notevole interesse.

Vogliamo qui mostrare come si possa continuare a seguire il procedimento classico, con l'aggiunta di una semplice osservazione.

Gli esempi del Segre riguardano, naturalmente, curve concrete, nella loro realtà logica, e quindi non infirmano un ragionamento « per assurdo », il quale si riferisce invece ad una curva di esistenza ipotetica, e che anzi dovrà *a posteriori* risultare contraddittoria. Si tratta allora di indagare se possa determinarsi la situazione a cui fa riferimento il dubbio sollevato dal Segre, o se piuttosto essa non venga esclusa *a priori* dalle altre condizioni alle quali si suppone assoggettata la C (esistenza di infiniti punti multipli consecutivi ad uno di essi). È appunto questa la facile affermazione a cui si giunge.

2. Come è ovvio, il caso che dobbiamo esaminare è quello in cui le molteplicità *effettive* di una curva (algebrica piana), φ , possano risultare minori di quelle *virtuali* imposte. Esso è espresso dal *principio di scaricamento* dell'Enriques ⁽⁵⁾, il cui significato appare chiaro attraverso il ricorso alle trasformazioni quadratiche.

La φ passi r volte per P e possegga, nell'intorno del primo ordine di P , un punto, P_1 , di molteplicità $r_1 (\leq r)$. Una trasformazione quadratica, ω , con un punto fondamentale in P , muta la φ in una curva, φ' , che presenta un punto r_1 -plo, P'_1 , situato sopra il lato fondamentale, B_2C_2 , che proviene dalla dilatazione di P nella ω . Le condizioni imposte alla φ implicano, dunque, fra l'altro, questo comportamento per la φ' in P'_1 . Ma, tra le curve per cui ciò accade, sono anche quelle spezzate nella retta B_2C_2 e in una curva residua avente in P_1 la molteplicità $r_1 - 1$. Ebbene, se la φ' è così composta, quando si risale da essa alla φ mediante la ω^{-1} , si trova che la φ' presenta in P un punto $(r + 1)$ -plo, con infinitamente vicino, in P_1 , un punto $(r_1 - 1)$ -plo. Cioè, pur essendo soddisfatte tutte le condizioni volute, la singolarità effettiva $(\dots; r + 1, \dots; r_1 - 1, \dots; \dots)$ che la φ possiede in P è diversa da quella virtualmente imposta $(\dots; r, \dots; r_1, \dots)$.

Il fatto illustrato per la coppia P, P_1 può combinarsi con altri analoghi e dar luogo a risultati più complessi, ma la legge che lo regola appare sufficientemente chiarita dalle considerazioni esposte.

Dopo queste premesse, supponiamo che una curva, φ , debba soddisfare ad un insieme di condizioni dalle quali nasca per essa una serie di punti aventi determinate molteplicità *virtuali*. Li indichiamo con:

$$(I) \quad P, P^{(1)}, P^{(2)}, \dots, P^{(i-1)}, P^{(i)}, P^{(i+1)}, \dots, P^{(k)},$$

intendendo che *ciascuno di essi appartenga all'intorno del precedente*.

(4) B. SEGRE, loc. cit., n. 19.

(5) Cfr. F. ENRIQUES e O. CHISINI, op. cit., vol. II, libro IV, cap. II, § 17.

Sia poi R_i la somma delle molteplicità virtuali dei punti $P, P^{(1)}, \dots, P^{(i-1)}$, ed S_i quella delle loro molteplicità effettive.

Allora:

a) se la molteplicità effettiva di P si abbassa di uno rispetto alla virtuale, la somma S_i viene a superare la R_i di un'unità almeno, poichè altrettanto avviene delle molteplicità effettive e virtuale di uno (almeno) dei punti che precedono $P^{(i)}$;

b) se i punti $P^{(i)}, P^{(i+1)}, \dots, P^{(k)}$ hanno tutti la medesima molteplicità virtuale, $h (\geq 1)$, qualora la molteplicità effettiva di $P^{(i)}$ risulti uguale ad $h-1$, questo valore non è superato dalle molteplicità effettive dei punti successivi $P^{(i+1)}, \dots, P^{(k)}$. E ciò per la relazione aritmetica fondamentale per cui la molteplicità di un punto, appartenente all'intorno di un altro, non può essere maggiore di quella di quest'ultimo.

Dalla combinazione delle proposizioni a) e b) si deduce:

quando i punti $P^{(i)}, P^{(i+1)}, \dots, P^{(k)}$ presentano tutti la molteplicità virtuale h , se la molteplicità effettiva di $P^{(i)}$ prende il valore $h-1$, risulta:

$$S_i \geq R_i + k - i + 1$$

e pertanto il numero k è necessariamente finito.

3. Questa conclusione richiede che la singolarità della φ in P sia costituita nel modo indicato nella (1): ma non si tratta di una ipotesi restrittiva.

Invero, se può accadere che una curva possieda infiniti punti multipli successivi ad un altro, P , ciò richiede necessariamente che si finisca con il trovare una serie di punti, $P^{(i)}, P^{(i+1)}, \dots, P^{(k)}, \dots$, situati ciascuno nell'intorno del precedente ed aventi tutti la medesima molteplicità. È questa una conseguenza della relazione aritmetica già sopra ricordata:

$$s \leq \sum s_j,$$

che intercede fra la molteplicità, s , di un punto e quelle, s_1, s_2, \dots , degli altri che si trovano nel suo intorno del primo ordine.

Se poi teniamo presente che la polare, φ , di un punto generico del piano rispetto alla curva C passa h volte per ogni punto $(h+1)$ -plo della C , appare chiaro il motivo per cui nel n. 2 si è fatto riferimento a particolari circostanze.

4. Tuttavia, per giungere al risultato che ci interessa, si può anche evitare un esplicito richiamo alla costituzione della singolarità della curva φ in P . Supponiamo che, se è possibile, le condizioni imposte alla φ determinino virtualmente in questa un punto multiplo, P , i cui successivi intorni, di ordine tanto grande quanto si vuole, contengano altri punti multipli, Q . Ebbene, non accade mai che si annulli la molteplicità effettiva della φ in uno dei punti Q .

Invero, la proposizione a) è indipendente dall'aver supposto che, nella serie dei punti (1), ognuno appartenga all'intorno dei precedenti. Essa vale

anche quando si abbassi la molteplicità del nostro punto Q , purchè si faccia riferimento alla somma, S , delle molteplicità effettive dei punti situati negli intorni che precedono quello in cui si trova Q , e si confronti con la somma delle loro molteplicità virtuali.

La proprietà δ) invece deve essere opportunamente sostituita. Se la molteplicità di Q diminuisce, non è detto che ugualmente accada per quella di altri punti successivi. Ma, qualora la molteplicità effettiva in Q divenga nulla, si annullano pure le molteplicità dei punti appartenenti ai successivi intorni di Q . Si ha quindi uno « scaricamento » sopra i punti che precedono Q , e la somma S aumenta di un numero di unità che è tanto più grande quanti più sono gli intorni successivi di Q che contengono dei punti multipli. Si conclude nuovamente che il numero di questi non può essere infinito.

Cioè — prescindendo dalla possibilità della sua esistenza logica — *una curva, dotata virtualmente di infiniti punti multipli, non può presentare la molteplicità effettiva nulla in nessuno di essi.*

5. Conviene enunciare in diversa forma le conclusioni raggiunte.

L'ipotesi che i punti multipli della φ , nei successivi intorni di P , siano in numero infinito è incompatibile con il supporre che fra quei punti ne esistano infiniti nei quali la φ presenti una molteplicità effettiva minore di quella virtuale.

Invero, se la φ è assoggettata a passare per infiniti punti prossimi a P , questi, necessariamente (n. 3), finiscono con il costituire una successione come la (1), in cui ogni punto appartiene all'intorno del precedente (ed è il solo che vi ha la φ), mentre, da uno di essi in poi, acquistano tutti la medesima molteplicità h (≥ 1). Allora, poichè — in ciascun intorno di P — i punti della φ sono in numero finito, per poterne avere infiniti successivi a P nei quali la molteplicità della φ diminuisce, bisogna giungere fino ai punti $P^{(i)}, P^{(i+1)}, \dots$ della serie (1); e si presenta così l'assurdo dianzi detto (n. 2).

A fortiori la cosa accade — come si è osservato direttamente (n. 4) — se la molteplicità virtuale si abbassa fino a divenire nulla, e basta che ciò si verifichi per un solo punto.

6. Le considerazioni esposte consentono di eliminare il dubbio esposto dal Segre anche nel caso delle superficie.

Se una superficie (algebrica), F , possiede un punto multiplo *isolato*, P , gli intorni di P sulla F , nei quali si trovano altri punti multipli di questa, sono necessariamente in numero finito.

Per provarlo si svolge anche qui un ragionamento per assurdo. Si suppone verificata l'ipotesi contraria e si prende in esame la curva, K , comune alle superficie polari prime di due punti generici dello spazio rispetto alla F . Poichè in un punto r -plo per la F quelle polari presentano la molteplicità virtuale $r-1$, la K passa (almeno semplicemente) per tutti i punti multipli della superficie; allora viene ad avere con questa, nell'intorno di P ,

un numero infinitamente grande di intersezioni, e quindi giace per intero sopra di essa. Cioè, pur essendo semplice per la F , la K dovrebbe far parte della curva di contatto dei coni circoscritti alla F da due punti diversi: ne nasce l'assurdo ⁽⁶⁾.

Il ragionamento svolto presuppone che il complesso delle condizioni a cui è assoggettata la K la portino a passare *effettivamente* per tutti i punti multipli della F , e che non si tratti invece di circostanze *virtuali* per cui le intersezioni della K con la F risultino in realtà in numero finito. Per provare che questo non può accadere basta sostituire alla K una sua generica proiezione piana e ricordare l'enunciato con cui termina il n. 4.

Qualora si preferisca far riferimento, piuttosto che alla K , alla curva, Γ , lungo cui la F è tagliata dalla polare di un punto generico, l'assurdo s'incontra nel fatto che la Γ verrebbe a possedere infiniti punti multipli (almeno doppi) nei successivi intorno di P ; e che si tratti effettivamente di punti multipli risulta dal n. 5.

Geometria. — *Alcune osservazioni sulle curve sferiche ed una nuova caratterizzazione della sfera.* Nota di DIONISIO GALLARATI, presentata ^(*) dal Corrisp. B. SEGRE.

1. Sia \mathcal{F} una superficie reale dell'ordinario spazio euclideo; \mathcal{L} una curva appartenente ad \mathcal{F} e lungo la quale esistano le derivate del punto dei primi tre ordini. Denotiamo con s , c , T rispettivamente l'arco, la flessione e la torsione di \mathcal{L} , e supponiamo $c > 0$ in tutti i punti di \mathcal{L} .

W. Scherrer ⁽¹⁾ ha dimostrato che \mathcal{F} è una sfera allora e soltanto allora che per ogni curva chiusa \mathcal{L} appartenente ad \mathcal{F} sia

$$\oint_{\mathcal{L}} T ds = 0.$$

Successivamente B. Segre ⁽²⁾ ha dimostrato che \mathcal{F} è una sfera allora e soltanto allora che per ogni curva chiusa \mathcal{L} appartenente ad \mathcal{F} risulti

$$\oint_{\mathcal{L}} \frac{T}{c} ds = 0.$$

(6) Cfr. L. CAMPEDELLI, op. cit., cap. IV, n. 4, 9).

(*) Nella seduta dell'8 novembre 1952.

1 W. SCHERRER, *Eine Kennzeichnung der Kugel*, *Vierteljahrsschrift der naturforsch. Ges. Zürich*, 85 (1940), « Beiblatt. », 32, pp. 40-46.

(2) B. SEGRE, *Una nuova caratterizzazione della sfera*, « Rend. Acc. Naz. Lincei » 48, 3, pp. 420-422 (1947).

Qui assegno dapprima un semplice significato geometrico per le due espressioni $T ds$ e $\frac{T}{c} ds$, il quale permette di calcolare i due integrali

$$\int_{\mathcal{L}} T ds \quad , \quad \int_{\mathcal{L}} \frac{T}{c} ds,$$

estesi ad una qualunque curva \mathcal{L} chiusa o aperta appartenente ad una sfera. In secondo luogo stabilisco una elegante proprietà delle curve sferiche, espressa dal

TEOREMA I. — *Se \mathcal{L} è una curva appartenente ad una sfera \mathcal{F} di centro O e se \mathcal{L}^* è la curva luogo dei centri di prima curvatura di \mathcal{L} , la proiezione di \mathcal{L}^* dal punto O sulla sfera (ossia il luogo delle tracce sulla sfera delle s e m interette proiettanti da O i singoli punti di \mathcal{L}^* , ha la stessa lunghezza di \mathcal{L}^* .*

Infine, invertendo una proposizione equivalente a tale teorema, trovo una nuova caratterizzazione della sfera. Precisamente, ottengo il

TEOREMA II. — *Condizione necessaria e sufficiente affinché una superficie \mathcal{F} sia una sfera di raggio R è che per ogni curva \mathcal{L} giacente su essa avvenga che la lunghezza della linea \mathcal{L}^* luogo dei centri di prima curvatura sia $R\Lambda$, essendo Λ la lunghezza dell'indicatrice sferica delle binormali di \mathcal{L} .*

2. Sia \mathcal{F} una sfera di centro O e raggio R ed \mathcal{L} una curva tracciata su \mathcal{F} , descritta da un punto P . Denotiamo con $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3$, i versori della tangente, della normale principale e della binormale di \mathcal{L} in P . Si ha:

$$\overline{OP}^2 = R^2$$

e quindi, derivando successivamente rispetto ad s ,

$$(1) \quad \overline{OP} \times \bar{\xi}_1 = 0, \quad (2) \quad 1 + \overline{OP} \times \frac{d\bar{\xi}_1}{ds} = 0.$$

Dalla (2), derivando ancora, si ha

$$\overline{OP} \times \frac{d^2 \bar{\xi}_1}{ds^2} = 0$$

ossia, per le formule di Frénet,

$$\overline{OP} \times \left(-c^2 \bar{\xi}_1 + \frac{dc}{ds} \bar{\xi}_2 - cT \bar{\xi}_3 \right) = 0;$$

e da qui per la (1):

$$\overline{OP} \times \left(\frac{dc}{ds} \bar{\xi}_2 - cT \bar{\xi}_3 \right) = 0.$$

Ora dalla (2) segue che è

$$\overline{OP} \times \bar{\xi}_2 = -\frac{1}{c},$$

e quindi l'ultima equazione fornisce:

$$\overline{OP} \times \bar{\xi}_3 = \frac{1}{c^2 T} \frac{dc}{ds}.$$

Detta h la distanza tra il centro O della sfera ed il centro C_1 di prima curvatura di \mathcal{L} in P (o anche tra O ed il piano osculatore ad \mathcal{L} in P),

si ha $\overline{OP} \times \bar{\xi}_3 = h$; per la distanza $-h$ tra il piano osculatore ad \mathcal{L} in P ed O si ottiene dunque l'espressione

$$(3) \quad -h = -\frac{1}{c^2 T} \frac{dr}{ds} = \frac{1}{T} \frac{dr}{ds},$$

essendo $r = 1/c$ il raggio di prima curvatura di \mathcal{L} in P. D'altra parte, dalla $r^2 + h^2 = R^2$ si trae $r \frac{dr}{ds} = -h \frac{dh}{ds}$ e quindi, per la (3),

$$(4) \quad \frac{T}{c} ds = dh.$$

Ciò, del resto, poteva dedursi subito dalla ben nota equazione intrinseca delle curve sferiche:

$$\frac{T}{c} + \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{T} \frac{dr}{ds} \right) = 0,$$

tenuto conto della (3).

Se denotiamo con α l'angolo tra la normale ad \mathcal{F} in P e la normale principale di \mathcal{L} in P, si ha

$$h = R \sin \alpha$$

e quindi

$$dh = R \cos \alpha d\alpha = r d\alpha = \frac{1}{c} d\alpha,$$

ossia, per la (4):

$$(5) \quad T ds = d\alpha.$$

Dalle (4), (5) segue subito che, se \mathcal{L} è una qualunque curva tracciata sulla sfera \mathcal{F} , indicati con P_0 e P_1 gli estremi di \mathcal{L} ; con h_0 ed h_1 le distanze di O dai piani osculatori di \mathcal{L} in P_0 e P_1 ; con α_0 ed α_1 rispettivamente l'angolo tra la normale ad \mathcal{F} in P_0 e la normale principale di \mathcal{L} in P_0 , e quello tra la normale ad \mathcal{F} in P_1 e la normale principale di \mathcal{L} in P_1 , si ha

$$\int_{\mathcal{L}} T ds = \alpha_1 - \alpha_0, \quad \int_{\mathcal{L}} \frac{T}{c} ds = h_1 - h_0.$$

3. Dimostriamo ora il teorema I. All'uopo consideriamo la curva \mathcal{L}^* , luogo dei centri di prima curvatura di \mathcal{L} , definita dall'equazione

$$\overline{OC}_0 = h \bar{\xi}_3 = -\frac{1}{T} \frac{dr}{ds} \bar{\xi}_3.$$

Risulta:

$$\frac{d\overline{OC}_0}{ds} = -\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{T} \frac{dr}{ds} \right) \bar{\xi}_3 + \frac{dr}{ds} \bar{\xi}_2 = \frac{T}{c} \bar{\xi}_3 + \frac{dr}{ds} \bar{\xi}_2$$

e quindi

$$\left(\frac{d\overline{OC}_0}{ds} \right)^2 = \frac{T^2}{c^2} + \left(\frac{dr}{ds} \right)^2.$$

Se dS^* è l'elemento d'arco su \mathcal{L}^* , si ha allora

$$dS^{*2} = dh^2 + dr^2.$$

Risulta d'altra parte $rdr = -h dh$, sicchè $dr^2 = \frac{h^2}{r^2} dh^2$; pertanto:

$$dS^{*2} = \frac{h^2 + r^2}{r^2} dh^2 = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - h^2}} dh^2 = R^2 \left[d \left(\arcsen \frac{h}{R} \right) \right]^2 = R^2 d\alpha^2 = R^2 T^2 ds^2,$$

e quindi

$$dS^* = R |T| ds.$$

Indicando con S^* la lunghezza di \mathcal{L}^* , si ha dunque

$$S^* = R \int_{\mathcal{L}} |T| ds.$$

Ma $\int_{\mathcal{L}} |T| ds$ è la lunghezza dell'indicatrice sferica delle binormali di \mathcal{L} ,

onde la tesi è conseguenza immediata del fatto che il raggio OC_0 è parallelo al vettore $\bar{\xi}_3$ (in quanto, ovviamente, i cerchi osculatori di \mathcal{L} giacciono su \mathcal{F}).

4. Il teorema I può anche enunciarsi nella forma: *Se \mathcal{L} è una curva appartenente ad una sfera di raggio R , la lunghezza della curva S^* luogo dei centri di prima curvatura di \mathcal{L} è RA , essendo A la lunghezza dell'indicatrice sferica delle binormali di \mathcal{L} .*

Dimostriamo ora che tale proposizione si inverte col teorema II.

Sia O un punto fisso dello spazio e P denoti il punto variabile su \mathcal{L} . Se C_0 è il centro di prima curvatura di \mathcal{L} in P , risulta

$$\overline{OC_0} = \overline{OP} + \overline{PC_0} = \overline{OP} + r\bar{\xi}_2$$

e quindi

$$\frac{d\overline{OC_0}}{ds} = \frac{dr}{ds} \bar{\xi}_2 + T r \bar{\xi}_3,$$

da cui

$$\left(\frac{d\overline{OC_0}}{ds} \right)^2 = \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + T^2 r^2.$$

Se S^* è l'arco di \mathcal{L}^* si ha dunque

$$dS^{*2} = \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 ds^2 + r^2 T^2 ds^2.$$

L'ipotesi ammessa nel teorema II implica che sia $dS^{*2} = R^2 T^2 ds^2$; conseguentemente risulta

$$\left(\frac{dr}{ds} \right)^2 = (R^2 - r^2) T^2$$

e pertanto

$$\pm T ds = d \left(\arcsen \frac{r}{R} \right).$$

Da ciò si deduce che, per ogni curva chiusa \mathcal{L} tracciata su \mathcal{F} , si ha

$$\oint_{\mathcal{L}} T ds = 0$$

e dunque, per il teorema di Scherrer, \mathcal{F} è una sfera; sicchè, in base a quanto precede, \mathcal{F} è una sfera di raggio R .

Meccanica. — *Nocciolo di sicurezza di una figura piana convessa.* Nota di PIERO GIORGIO BORDONI, presentata (*) dal Socio A. SIGNORINI.

1. PREMessa. — In alcune questioni di meccanica applicata si presenta la necessità di riconoscere se un determinato punto [*centro di pressione*] appartenga al nocciolo centrale di inerzia di una figura piana. Siccome il tracciamento del contorno del nocciolo richiede quasi sempre costruzioni grafiche o calcoli numerici molto laboriosi, interessa stabilire qualche condizione semplice e non troppo restrittiva la quale assicuri l'appartenenza del centro di pressione al nocciolo, evitando però la costruzione di quest'ultimo.

Nella presente Nota ci si propone appunto di mostrare come, nel caso di una figura omogenea σ , semplicemente connessa, e limitata da un contorno convesso γ , la linea γ' , omotetica a γ rispetto al baricentro G secondo il rapporto $1/6$, non possa avere punti esterni al nocciolo. Condizione sufficiente per l'appartenenza a quest'ultimo è quindi l'appartenenza alla superficie limitata dalla linea γ' , la quale ha sul nocciolo il vantaggio di poter essere immediatamente tracciata.

Mediante esempi relativi a figure semplici si verifica che γ' risulta inoltre assai prossima al contorno del nocciolo, ed ha talvolta dei punti in comune con esso. Può quindi riuscir conveniente, specialmente nei problemi tecnici in cui la sicurezza della soluzione interessi in modo particolare, la sostituzione dell'effettivo nocciolo con la superficie limitata da γ' , la quale viene così a costituire una specie di *nocciolo di sicurezza*.

Per stabilire la proprietà enunciata relativa a γ' occorre innanzi tutto ricavare una limitazione inferiore per il raggio di girazione baricentrale ρ di una generica figura piana omogenea a contorno convesso. In questa Nota tale limitazione è ricavata valendosi di un procedimento assai semplice, il quale fornisce direttamente un estremo inferiore per ρ . L'effettivo limite inferiore del raggio di girazione sarà ricavato con un procedimento più generale in un lavoro successivo, insieme con ulteriori limitazioni per ρ , e con altre proprietà del nocciolo e dell'ellisse centrale.

2. ESTREMO INFERIORE PER ρ . — In tutte le considerazioni successive si manterrà soltanto la limitazione che sia convesso il contorno γ della superficie piana, omogenea e semplicemente connessa σ . Per evitare distinzioni troppo minute nei riguardi di γ , dovute per esempio all'esistenza di punti angolosi o di tratti rettilinei, ci si riferirà sistematicamente al caso della fig. 1, che è già di tipo molto generale.

Sia τ un asse baricentrale di σ ; τ_1 e τ_2 le due tangenti a γ parallele a τ , situate da bande opposte rispetto ad essa, alle distanze d_1 e d_2 . Con A si

(*) Nella seduta dell'8 novembre 1952.

indichi uno dei punti comuni a γ ed a τ_1 , e con B l'analogo su τ_2 ; siano inoltre C e C' le due intersezioni di γ con τ .

Per la convessità di γ certo esiste su di essa un punto H, non esterno all'arco compreso tra τ_1 e τ_2 ed avente per estremi A e C, tale che l'intersezione D_1 di AH con τ costituisca il vertice di un triangolo mistilineo CD_1H avente, rispetto a τ , lo stesso momento statico della porzione di σ (tratteggiata in figura) che si trova dalla banda opposta di G rispetto alla retta AH. Per convincersi dell'esistenza di H basta osservare che, quando l'intersezione di γ con la retta uscente da A tende a C, il momento statico del triangolo mistilineo tende a zero e contemporaneamente il momento del settore compreso tra la stessa retta e γ aumenta, mentre si verifica l'opposto quando l'intersezione tende ad A.

In maniera analoga si constata l'esistenza sull'arco compreso tra le stesse rette τ_1 e τ_2 ed avente per estremi A e C', di un punto H' tale che il mo-

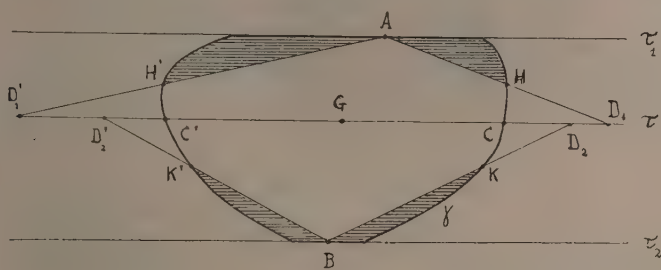


Fig. 1.

mento statico del triangolo mistilineo $C'D'_1H'$ eguagli quello della porzione di σ (tratteggiata in figura) che si trova dalla banda opposta di G rispetto alla retta AH'.

In complesso il triangolo $AD_1D'_1$ ha quindi rispetto a τ lo stesso momento statico S_1 della porzione σ_1 di σ appartenente alla striscia $\tau_1\tau$. Si vede inoltre che l'area \mathfrak{A}_1 del triangolo non è mai inferiore a quella di σ_1 , mentre invece il suo momento di inerzia \mathfrak{J}_1 rispetto a τ non è mai superiore all'analogo momento di σ_1 . Sia infatti $\Delta^{(1)}$ l'area del settore compreso tra AH e γ ; $s^{(1)}$ il suo momento statico rispetto a τ ; $\Delta^{(2)}$ l'area del triangolo mistilineo CD_1H , ed $s^{(2)}$ il corrispondente momento statico; sia inoltre h la distanza di H da τ . Il baricentro $^{(1)}$ di $\Delta^{(1)}$ ha certo una distanza da τ non minore di h , mentre il baricentro di $\Delta^{(2)}$ ha una distanza non superiore alla stessa grandezza; l'eguaglianza dei momenti statici impone quindi la condizione

$$(1) \quad \Delta^{(1)} \leq \Delta^{(2)}.$$

(1) Di considerazioni analoghe si è valso A. SIGNORINI nella Nota: *Una proprietà di ubicazione dell'ellisse centrale* « Rend. Acc. Naz. Lincei », 23, p. 334 (1914), per stabilire una limitazione superiore per ρ . Si veda anche in proposito: A. SIGNORINI, *Meccanica razionale con elementi di statica grafica*. Perrella Ed., Roma, 2^a ediz., p. 306 (1952).

Lo stesso si può ripetere per l'arco AC' , e resta quindi stabilito che l'area \mathcal{A}_1 del triangolo $AD_1D'_1$ non è inferiore a quella di σ .

Quanto ai momenti di inerzia, quello relativo a $\Delta^{(1)}$ non può essere inferiore ad $h \cdot s^{(1)}$, mentre quello relativo a $\Delta^{(2)}$ non può superare $h \cdot s^{(2)}$, dimodoché, con ovvio significato dei simboli, si ha

$$(2) \quad \mathfrak{J}^{(1)} \geq \mathfrak{J}^{(2)}.$$

Ripetendo lo stesso ragionamento per l'arco AC' si vede che il momento di inerzia \mathfrak{J}_1 del triangolo $AD_1D'_1$ rispetto a τ non supera l'analogo momento di σ_1 .

Allo stesso modo si dimostra l'esistenza di un triangolo $BD_2D'_2$, avente rispetto a τ un momento statico S_2 eguale a quello della porzione σ_2 di σ appartenente alla striscia $\tau_2 \tau$, e si verifica inoltre che l'area \mathcal{A}_2 del triangolo non è mai inferiore a quella di σ_2 , mentre il momento di inerzia \mathfrak{J}_2 del triangolo rispetto a τ non supera il corrispondente momento di σ_2 .

In definitiva, qualunque sia la curva convessa γ , il momento di inerzia di σ rispetto all'asse baricentrale τ , non è mai inferiore ad $\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2$, mentre l'area di σ non può superare $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$; il raggio di girazione è quindi soggetto alla limitazione

$$(3) \quad \rho^2 \geq \frac{\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2}{\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2}.$$

Tenendo presente che \mathfrak{J}_1 ed \mathfrak{J}_2 sono i momenti di inerzia dei triangoli $AD_1D'_1$ e $BD_2D'_2$ rispetto alle basi $D_1D'_1$ e $D_2D'_2$ e che \mathcal{A}_1 ed \mathcal{A}_2 sono le aree rispettive, si ha dalla (3) con un ovvio calcolo

$$(4) \quad \rho^2 \geq \frac{d_1 d_2}{6}.$$

3. UNA PROPRIETÀ DI UBICAZIONE DEL NOCCIOLO CENTRALE. - La disuguaglianza ottenuta non costituisce la limitazione più restrittiva che sia possibile stabilire per il raggio di girazione baricentrale di una generica figura convessa, in quanto l'insieme dei due triangoli $AD_1D'_1$ e $BD_2D'_2$ non costituisce in generale una figura convessa, e quindi il valore $d_1 \cdot d_2 / 6$ è un estremo inferiore, ma non un limite ⁽²⁾ per ρ^2 . La (4) basta tuttavia a dimostrare che la figura omotetica a γ rispetto a G secondo il rapporto $1/6$ non ha punti esterni al nocciolo centrale.

Se si indicano infatti con k_1 , k_2 le distanze da τ degli antipoli di τ_1 e di τ_2 si hanno, per la definizione stessa di antipolo, e tenendo conto della (4) le disuguaglianze:

(2) Nel lavoro più generale cui si è precedentemente accennato, si mostrerà che l'effettivo limite inferiore per ρ^2 vale:

$$\rho^2 \geq \frac{d_1 d_2}{6} \left[\frac{d_1}{d_2} + \frac{d_2}{d_1} - 1 \right] \geq \frac{d_1 d_2}{6}.$$

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} k_1 = \frac{\rho^2}{d_1} \geq \frac{d_2}{6} \\ k_2 = \frac{\rho^2}{d_2} \geq \frac{d_1}{6} \end{array} \right.$$

In base alle (5) gli antipoli di τ_1 e di τ_2 riescono non interni alla striscia di piano compresa tra due rette parallele a τ , e la cui distanza da G sia $1/6$ di quella della tangente parallela che si trova dalla stessa banda. Al variare di τ queste rette inviluppano appunto una linea omotetica a γ rispetto a G se-

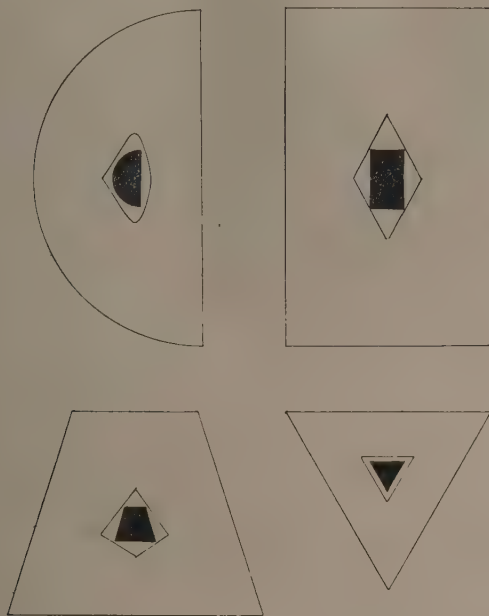


Fig. 2. — Confronto tra il nocciolo centrale ed il nocciolo di sicurezza (in nero) per alcune figure semplici.

condo il rapporto $1/6$, la quale — essendo anch'essa convessa — certo non ha punti esterni al nocciolo. Il confronto di questa linea con il nocciolo centrale di alcune figure semplici (fig. 2) mostra che i rispettivi contorni sono sempre molto prossimi, ed, in qualche caso, hanno addirittura dei punti in comune.

4. CONCLUSIONE. — Per verificare se un punto assegnato P riesca interno al nocciolo centrale di una figura piana omogenea a contorno convesso, ci si può servire della seguente regola:

Se la distanza di P da G non supera $1/6$ della distanza di G dal punto in cui la semiretta GP interseca il contorno, P appartiene certamente al nocciolo.

La condizione sufficiente indicata è inoltre abbastanza prossima a quella necessaria per l'appartenenza al nocciolo, in modo che, in molte questioni tecniche, il tracciamento di quest'ultimo può essere evitato.

Fisica matematica. — *Sopra un campo estendente quello elettromagnetico.* Nota di PAOLO UDESCHINI, presentata ^(*) dal Corrisp. B. FINZI.

In una recente Nota ⁽¹⁾ Finzi ha dedotto nello spazio-tempo, da un principio di minimo riguardante un'azione elettromagnetica generalizzata, le leggi che governano campi più generali di quello maxwelliano, fra i quali rientra anche quello di Proca-Yukawa. L'argomento è stato ripreso in una successiva Nota inserita in questi « Rendiconti » ⁽²⁾ per trarre alcune conseguenze dalle equazioni che reggono detti campi generali.

Le equazioni generali di Finzi contengono cinque costanti universali, quattro sono dei puri numeri e la quinta ha le dimensioni del reciproco di una lunghezza; queste costanti sono *a priori* disponibili per adattare alle esigenze fisiche lo schema proposto.

In questa mia Nota, dopo aver posto le equazioni generali, che Finzi ha dedotto nello spazio-tempo, nella forma che ad esse compete nell'ordinario spazio tridimensionale euclideo, prendo in esame il comportamento delle equazioni in vari casi particolari, ma fisicamente tipici, per trarne alcune conclusioni, con particolare riguardo alle cinque costanti universali menzionate.

Mostro che se si vuole costruire, come nelle ordinarie teorie elettromagnetiche, una estensione elettrostatica, in modo indipendente dall'esistenza di un campo « magnetico », come pure una estensione magnetostatica, in modo indipendente dal campo « elettrico », tali cinque costanti *a priori* disponibili si riducono a due essenzialmente non nulle, di cui la prima ha le dimensioni del reciproco di una lunghezza e la seconda è un puro numero.

Rilevo anche, fra l'altro, che le tre costanti che si debbono ritenere nulle, in dipendenza dalla precedente norma di natura fisica, sono proprio quelle tre costanti che dovrebbero ritenersi immaginarie se si volesse dar forma reale alle originarie equazioni generali del campo, nonchè all'espressione generalizzata dell'azione elettromagnetica.

Deduco così le equazioni relative ad un campo elettrostatico generalizzato e quelle relative ad un campo magnetostatico generalizzato per passare poi ad un generico campo variabile.

(*) Nella seduta dell'8 novembre 1952.

(1) B. FINZI, *Sul principio della minima azione e sulle equazioni elettromagnetiche che se ne deducono.* Nota I, II. « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », vol. XII, ser. VIII, fasc. 4 e 5, 1952.

(2) B. FINZI, *Sopra una estensione dei campi elettromagnetici.* « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », vol. XIII (1952).

Le equazioni che ottengo modificano lievemente quelle relative al campo di Proca-Yukawa, come già queste modificano lievemente quelle di Maxwell.

Inoltre tali equazioni più generali, in confronto a quelle di Yukawa, presentano un aspetto più simmetrico in riguardo ai due campi « elettrico » e « magnetico », nonché ai relativi potenziali.

Dò infine una soluzione esplicita nel caso particolare « elettrostatico » a simmetria sferica, corrispondente, ad esempio, al caso di un campo generato da una « carica » concentrata in un punto.

1. CAMPI NEL VUOTO. EQUAZIONI NELLO SPAZIO-TEMPO. — Nello spazio-tempo quadridimensionale pseudoeuclideo, il campo nel vuoto viene rappresentato da un unico tensore doppio emisimmetrico $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$ ($\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$) e la distribuzione elettrica da un vettore j^α ($\alpha = 0, 1, 2, 3$).

L'indice 0 contraddistingue la coordinata temporale $x^0 = ct$ (c velocità della luce nel vuoto) e gli indici 1, 2, 3, contraddistinguono le coordinate spaziali $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$. Poniamo la metrica dello spazio-tempo nella forma pseudopitagorica

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Il tensore doppio emisimmetrico $F_{\alpha\beta}$, funzione dei punti dello spazio-tempo, può esser riguardato ⁽¹⁾ come somma di un tensore irrotazionale e di uno solenoidale e può scriversi così:

$$(1) \quad F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha} = \Phi_{\beta/\alpha} - \Phi_{\alpha/\beta} + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \Psi^{\delta/\gamma} \quad (3)$$

dove Φ_α e Ψ_α ($\alpha = 0, 1, 2, 3$) sono due vettori solenoidali dello spazio-tempo, i due quadrivettori potenziali; il primo caratterizza il componente irrotazionale del tensore $F_{\alpha\beta}$ ed il secondo quello solenoidale.

Le generali equazioni del campo nello spazio-tempo ottenute da Finzi ⁽²⁾ sono le seguenti:

$$(2) \quad \begin{cases} \text{rot } F_{\alpha\beta} = -\alpha j_\alpha - \frac{1}{\lambda^2} \{ \beta \Phi_\alpha + \gamma \Psi_\alpha \} \\ \text{div } F_{\alpha\beta} = (1 + \kappa\alpha) j_\alpha + \frac{1}{\lambda^2} \left\{ (1 + \kappa\beta) \Phi_\alpha + \left(\frac{\nu}{2} + \kappa\gamma \right) \Psi_\alpha \right\}. \end{cases}$$

Nelle (2), se $\varepsilon_{\alpha\gamma\beta}$ è il tensore di Ricci nello spazio-tempo,

$$\text{rot } F_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\gamma\beta} \dot{F}^{\alpha\beta/\gamma} \quad \text{e} \quad \text{div } F_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}{}^{/\beta};$$

$1/\lambda$ è una costante universale che ha le dimensioni del reciproco di una

(3) Gli indici assumono i valori 0, 1, 2, 3, la lineetta precedente indici è simbolo di derivazione tensoriale rispetto a questi indici; è sottintesa, al solito, la sommatoria nella saturazione di indici omonimi.

lunghezza, α, β, γ sono dei puri numeri legati a quattro costanti universali κ, χ, μ, ν , anch'esse puri numeri, dalle seguenti relazioni:

$$(3) \quad \alpha = \frac{4\kappa - 2\chi}{1 - 4\kappa^2}, \quad \beta = \frac{4\kappa - \nu}{1 - 4\kappa^2}, \quad \gamma = \frac{2\kappa\nu - 2\mu}{1 - 4\kappa^2} \quad (4).$$

Le cinque costanti universali $1/\lambda, \kappa, \chi, \mu, \nu$ sono state introdotte da Finzi esplicitamente nell'espressione generalizzata del principio variazionale di minima azione, dal quale provengono le (2) ⁽¹⁾.

Le equazioni (2), che generalizzano le classiche equazioni di Maxwell nel vuoto, contengono dunque cinque costanti universali $1/\lambda, \kappa, \chi, \mu, \nu$, *a priori* disponibili, per far rientrare nello schema (2) campi più generali di quelli di Maxwell e di Yukawa, secondo quanto può esser suggerito dall'osservazione sperimentale. Si constata facilmente che per $1/\lambda, \kappa, \chi, \mu, \nu$ nulli le (2) sono le equazioni di Maxwell nello spazio-tempo e per κ, χ, μ, ν nulli e $1/\lambda$ non nullo le (2) si riducono alle equazioni del campo di Yukawa.

2. EQUAZIONI NELLO SPAZIO GEOMETRICO TRIDIMENSIONALE. - Diamo alle equazioni (2) dello spazio-tempo quadridimensionale la forma che ad esse compete nello spazio geometrico tridimensionale euclideo. A tal' fine introduciamo gli enti scalari e vettori che, nell'ordinario spazio tridimensionale, individuano il campo nel vuoto e che corrispondono ai tensori e vettori spazio-temporali che figurano nelle (2).

Il tensore doppio emisimmetrico spazio-temporale $F_{\alpha\beta}$ individua, com'è noto, i due vettori dello spazio geometrico tridimensionale \mathbf{E} ed \mathbf{H} che rappresentano rispettivamente il campo «elettrico» e il campo «magnetico» nel vuoto. Il vettore quadridimensionale j^α rappresenta l'insieme della densità elettrica ρ e del vettore densità di corrente di convenzione \mathbf{I} , quando si identifichi la componente temporale j^0 con la densità elettrica ρ e le tre componenti spaziali j^h ($h = 1, 2, 3$), a meno del fattore $1/c$, con quelle del vettore spaziale \mathbf{I} .

Il vettore spazio-temporale Φ_α sintetizza il potenziale scalare e il potenziale vettore, quando si ponga Φ_0 uguale al potenziale elettrico V e si interpretino Φ_h ($h = 1, 2, 3$) come componenti cartesiane del vettore spaziale \mathbf{A} che rappresenta il potenziale vettore.

Analogamente il vettore spazio-temporale Ψ_α sintetizza il potenziale scalare e il potenziale vettore *coniugati* quando si ponga $i\Psi_0$, con i unità immaginaria, uguale al potenziale *coniugato* V^* e si interpretino $i\Psi_h$ ($h = 1, 2, 3$) come componenti cartesiane del vettore spaziale \mathbf{A}^* che rappresenta il potenziale vettore *coniugato*.

$$\Phi_\alpha \left\{ \begin{array}{l} \Phi_0 = V \\ \Phi_h = A_h \end{array} \right. \quad (h = 1, 2, 3) \quad \Psi_\alpha \left\{ \begin{array}{l} i\Psi_0 = V^* \\ i\Psi_h = A_h^* \end{array} \right.$$

(4) Nelle espressioni di α, β, γ , come pure nella prima delle (2), si ha una diversità di segni in confronto alle relazioni corrispondenti date da Finzi nelle Note citate, perchè per il calcolo dei rotori spazio-temporali si è fatta una inversione di indici nel tensore di Ricci conformemente alle usuali notazioni. Cfr. FINZI-PASTORI, *Calcolo tensoriale e applicazioni*, Bologna (1949).

Nello spazio geometrico tridimensionale le equazioni generalizzate del campo elettromagnetico, equivalenti alle (2) dello spazio-tempo quadridimensionale, sono le seguenti:

$$(4) \left\{ \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{H} &= -\frac{i\alpha}{2} \rho - \frac{1}{2\lambda^2} \{ i\beta V + \gamma V^* \} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \frac{i\alpha}{2c} \mathbf{I} - \frac{1}{2\lambda^2} \{ i\beta \mathbf{A} + \gamma \mathbf{A}^* \} \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= (1 + \kappa\alpha) \rho + \frac{1}{\lambda^2} \left\{ (1 + \kappa\beta) V - i \left(\frac{\nu}{2} + \kappa\gamma \right) V^* \right\} \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \operatorname{rot} \mathbf{H} &= -(1 + \kappa\alpha) \frac{1}{c} \mathbf{I} + \frac{1}{\lambda^2} \left\{ (1 + \kappa\beta) \mathbf{A} - i \left(\frac{\nu}{2} + \kappa\gamma \right) \mathbf{A}^* \right\} \end{aligned} \right.$$

dove div e rot sono operatori dello spazio geometrico tridimensionale. Le equazioni (4) costituiscono un sistema di due equazioni scalari e due vettoriali più generali di quelle di Maxwell perchè contenenti cinque costanti universali $1/\lambda, \kappa, \chi, \mu, \nu$ e se queste sono nulle e quindi nulle sono anche α, β, γ , le (4) sono le classiche equazioni maxwelliane, nello spazio geometrico, del campo elettromagnetico nel vuoto. Le relazioni, dedotte da (1), che legano i due vettori spaziali di campo \mathbf{E} ed \mathbf{H} ai relativi potenziali scalari V e V^* e potenziali vettori \mathbf{A} e \mathbf{A}^* risultano le seguenti:

$$(5) \left\{ \begin{aligned} \mathbf{E} &= \operatorname{grad} V - \operatorname{rot} \mathbf{A}^* - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \mathbf{H} &= \operatorname{rot} \mathbf{A} + \operatorname{grad} V^* - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial t} \end{aligned} \right.$$

Assunte le (4) come equazioni fondamentali di un generale campo, prendiamo in esame qualche caso particolare, ma fisicamente significativo, per trarne qualche conseguenza con speciale riguardo alle cinque costanti universali $1/\lambda, \kappa, \chi, \mu, \nu$.

Osservo subito che se, partendo dalle equazioni (4) relative ad un generale campo, vogliamo costruire in particolare una « elettrostatica » e una « magnetostatica », in modo analogo a quanto si fa nelle ordinarie teorie elettromagnetiche, vogliamo cioè dedurre due gruppi di equazioni, involgenti il primo soltanto il campo « elettrico » \mathbf{E} e relativi potenziali, ed il secondo soltanto il campo « magnetico » \mathbf{H} e relativi potenziali, le cinque costanti universali $1/\lambda, \kappa, \chi, \mu, \nu$ e quindi α, β, γ costruite con le precedenti, *a priori* disponibili, debbono verificare opportune condizioni limitative. Vediamo infatti dapprima come si può costruire, nel modo detto, una « elettrostatica » che generalizzi quella nota di Maxwell.

3. CAMPO « ELETTROSTATICO ». — In un campo « elettrostatico » viene a mancare ogni dipendenza dal tempo, nullo è il vettore di corrente, nulli debbono ritenersi i due potenziali scalare e vettore V^* ed \mathbf{A} , che danno,

rispettivamente col loro gradiente e rotore, il vettore **H**. In tali ipotesi le equazioni (4) diventano:

$$(6) \quad \begin{cases} \alpha\rho + \frac{\beta}{\lambda^2} V = 0 \\ \left(\frac{\nu}{2} + \kappa\gamma\right) \mathbf{A}^* = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\gamma}{2\lambda^2} \mathbf{A}^* \\ \text{div } \mathbf{E} = (1 + \kappa\alpha)\rho + \frac{1}{\lambda^2}(1 + \kappa\beta)V. \end{cases}$$

Dalle prime due relazioni (6), ritenendo genericamente diversi da zero ρ , V ed \mathbf{A}^* , e i primi due non proporzionali, si deduce $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\nu/2 + \kappa\gamma = 0$.

Quindi

$$(6') \quad \alpha = 0, \quad \chi = 0, \quad \nu = 0, \quad \gamma = -2\mu \quad (5).$$

Risultano così non nulle due delle originarie cinque costanti universali: $1/\lambda$, μ , delle quali la prima ha le dimensioni del reciproco di una lunghezza e la seconda è un puro numero.

Le equazioni del campo « elettrostatico » assumono dunque la forma:

$$(7) \quad \begin{cases} \text{rot } \mathbf{E} = \frac{\mu}{\lambda^2} \mathbf{A}^* \\ \text{div } \mathbf{E} = \rho + \frac{1}{\lambda^2} V. \end{cases}$$

Il vettore **E** non è più irrotazionale, come nelle ordinarie teorie, non esiste quindi uno scalare V (il potenziale elettrico) di cui **E** è gradiente, ma si possono determinare uno scalare V e un vettore \mathbf{A}^* che, col gradiente e rispettivamente rotore, danno il campo **E**:

$$\mathbf{E} = \text{grad } V - \text{rot } \mathbf{A}^*.$$

Le equazioni relative ai due potenziali V ed \mathbf{A}^* sono:

$$(8) \quad \Delta V = \rho + \frac{1}{\lambda^2} V, \quad \Delta \mathbf{A}^* = \frac{\mu}{\lambda^2} \mathbf{A}^*.$$

dove Δ è l'operatore di Laplace nello spazio euclideo tridimensionale.

Le equazioni « elettrostatiche » così ottenute riguardano un campo che modifica lievemente quello « elettrostatico » di Yukawa, retto dalle (7) per $\mu = 0$ e anche quello elettrostatico maxwelliano retto dalle (7) per $1/\lambda = 0$ (6).

4. CAMPO « MAGNETOSTATICO ». - In un campo « magnetostatico » viene a mancare ogni dipendenza dal tempo e sono nulli lo scalare ρ e i vettori **I** ed **E**. Le equazioni di campo dedotte da (4), tenendo presente che $\alpha = 0$,

(5) α , β , $\nu/2 + \kappa\gamma$ possono annullarsi anche per $\chi = 2\kappa$, $\nu = 4\kappa$, $\mu = 1$, e quindi $\gamma = -2$, ma le equazioni che ne conseguono sono un caso particolare di quelle ottenute grazie a (6'), cioè le (7); caso corrispondente a $\mu = 1$.

(6) Nelle (7) si è assunto come vettore di campo di Yukawa $\mathbf{E} = \text{grad } V$ anziché $\mathbf{E} = \lambda \text{ grad } V$. Cfr. P. CALDIROLA, *È la massa dell'elettrone di natura elettromagnetica?* « Rend. del Seminario matematico e fisico di Milano », vol. XXII (1951).

$\beta = 0$, $v/2 + \kappa\gamma = 0$, $\gamma = -2\mu$ per le considerazioni svolte nel paragrafo precedente, si riducono a due identità e alle seguenti:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \mathbf{H} = \frac{\mu}{\lambda^2} V^* \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\frac{1}{\lambda^2} \mathbf{A} \end{array} \right.$$

Il vettore \mathbf{H} non è dunque solenoidale, come nelle ordinarie teorie, non esiste quindi un solo vettore \mathbf{A} di cui \mathbf{H} è il rotore, ma si possono determinare un vettore \mathbf{A} e uno scalare V^* che individuano il vettore \mathbf{H} secondo la relazione:

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A} + \operatorname{grad} V^*.$$

Le equazioni cui obbediscono i due potenziali \mathbf{A} e V^* sono:

$$(10) \quad \Delta \mathbf{A} = \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{A} \quad , \quad \Delta V^* = \frac{\mu}{\lambda^2} V^*.$$

Il campo « magnetostatico » dedotto dalle precedenti equazioni generalizza quello di Yukawa come pure quello di Maxwell: infatti le (9) per $\mu = 0$ sono le equazioni di Yukawa e per $1/\lambda = 0$ quelle di Maxwell.

Confrontando le (7) con le (9), come pure le (8) con le (10), si vede che la costante μ/λ^2 adempie nel campo « elettrostatico » generale lo stesso ufficio che ha $1/\lambda^2$ nel campo « magnetico » di Yukawa, ed adempie pure nel campo « magnetostatico » generale lo stesso ufficio che ha $1/\lambda^2$ nel campo « elettrostatico » di Yukawa.

5. CAMPO VARIABILE. — Un generico campo variabile, tenendo conto che, per quanto è stato osservato precedentemente, $\kappa = 0$, $\chi = 0$, $v = 0$, risulta retto dalle seguenti equazioni sempre dedotte dalle (4):

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \mathbf{E} = \rho + \frac{1}{\lambda^2} V \quad , \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = \frac{\mu}{\lambda^2} V^* \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{\mu}{\lambda^2} \mathbf{A}^* \quad , \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{c} \mathbf{I} - \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{A} \end{array} \right.$$

In queste equazioni, come nelle precedenti (7) e (9) che ne costituiscono due casi particolari, intervengono dunque soltanto due delle originarie cinque costanti universali che figurano nelle (2): le due costanti $1/\lambda$ e μ . La prima è in sostanza la costante caratteristica del campo di Yukawa, mentre la seconda μ è una nuova costante universale che è un puro numero, a differenza della precedente dimensionata come il reciproco di una lunghezza.

Le (11) costituiscono un sistema di quattro equazioni, due scalari e due vettoriali, lievemente diverse da quelle che reggono il campo di Yukawa e quindi anche lievemente diverse dalle equazioni maxwelliane. Le prime infatti si ottengono ponendo $\mu = 0$ e le seconde quando $1/\lambda = 0$.

I due vettori di campo \mathbf{E} ed \mathbf{H} sono legati ai potenziali dalle relazioni:

$$(12) \quad \begin{cases} \mathbf{E} = \text{grad } V - \text{rot } \mathbf{A}^* - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A} + \text{grad } V^* - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial t} \end{cases}$$

Le equazioni atte a determinare i due potenziali scalari V e V^* e i due potenziali vettori \mathbf{A} ed \mathbf{A}^* sono:

$$(13) \quad \begin{cases} \square V^* = \frac{\mu}{\lambda^2} V^* & , \quad \square V = \rho + \frac{1}{\lambda^2} V \\ \square \mathbf{A}^* = \frac{\mu}{\lambda^2} \mathbf{A}^* & , \quad \square \mathbf{A} = -\frac{1}{c} \mathbf{I} + \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{A} \end{cases}$$

dove, con notazioni ordinarie, \square è l'operatore di d'Alembert

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad \text{con } \Delta \text{ operatore di Laplace.}$$

Da un semplice sguardo alle equazioni (11), (12), (13), si può osservare come l'introduzione della nuova costante μ/λ^2 dia alle relazioni scritte, per così dire, una maggior simmetria rispetto agli enti che individuano il campo.

Che se poi dalla rappresentazione nello spazio tridimensionale ritorniamo alla sede quadridimensionale, nello spazio-tempo, con le solite notazioni tensoriali le (11) e (13) diventano:

$$(14) \quad \begin{cases} \text{rot } F_{\alpha\beta} = \frac{2\mu}{\lambda^2} \Psi_{\alpha\beta} \\ \text{div } F_{\alpha\beta} = j_{\alpha} + \frac{1}{\lambda^2} \Phi_{\alpha} \end{cases} \quad (15) \quad \begin{cases} \square \Phi_{\alpha} - \frac{1}{\lambda^2} \Phi_{\alpha} = j_{\alpha} \\ \square \Psi_{\alpha} - \frac{\mu}{\lambda^2} \Psi_{\alpha} = 0 \end{cases}$$

La densità spazio-temporale dell'azione elettromagnetica generalizzata ⁽¹⁾, dalla quale, attraverso a un principio di minimo, Finzi ha dedotto le equazioni (2), nel caso in esame assume la seguente forma, che generalizza quella corrispondente al campo di Yukawa per $\mu = 0$, e quella corrispondente al campo maxwelliano per $1/\lambda = 0$:

$$(16) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - j_{\alpha} \Phi^{\alpha} + \frac{1}{2\lambda^2} \Phi_{\alpha} \Phi^{\alpha} + \frac{\mu}{2\lambda^2} \Psi_{\alpha} \Psi^{\alpha}.$$

Mi sembra di un qualche interesse notare come le tre costanti universali κ, χ, ν che, attraverso a considerazioni di natura fisica, abbiamo posto uguali a zero, siano quelle tre costanti che dovrebbero essere considerate immaginarie per dare forma reale all'espressione dell'azione generalizzata nonchè forma reale alle generali equazioni (4) che ne conseguono ⁽⁷⁾.

(7) L'espressione generalizzata data da Finzi alla densità spazio-temporale dell'azione elettromagnetica è la (16) con l'aggiunta dei seguenti termini:

$$\frac{\kappa}{4} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\varrho} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\varrho} - \chi j_{\alpha} \Psi^{\alpha} - \frac{\nu}{2\lambda^2} \Phi_{\alpha} \Psi^{\alpha}$$

che manifestamente, con le notazioni tensoriali usate, sono reali per κ, χ, ν immaginari. Infatti il tensore di Ricci $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\varrho}$ ha nella metrica pseudopitagorica le componenti non nulle uguali a $\mp i$, e Ψ^{α} ha le componenti immaginarie.

6. SOLUZIONE PARTICOLARE. — Ecco, a mo' di esempio, una particolare soluzione relativa ad un campo « elettrostatico » a simmetria sferica, come quello, ad esempio, generato da una « carica » q concentrata in un punto. Le equazioni (8), relative ai potenziali V ed \mathbf{A}^* sono nel caso specifico:

$$\Delta V - \frac{1}{\lambda^2} V = 0, \quad \Delta \mathbf{A}^* - \frac{\mu}{\lambda^2} \mathbf{A}^* = 0$$

nelle quali lo scalare V e il vettore \mathbf{A}^* sono funzioni soltanto della distanza r fra la « carica » concentrata ad esempio in O (origine delle coordinate) e il generico punto P dello spazio.

La prima equazione ammette la nota soluzione del potenziale di Yukawa

$$V = q \frac{e^{-r/\lambda}}{r}$$

Analogamente dalla seconda equazione si ha:

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{Q} \frac{e^{-\frac{\sqrt{\mu}}{\lambda} r}}{r}$$

dove \mathbf{Q} è un vettore costante.

Il corrispondente campo « elettrostatico » è:

$$\mathbf{E} = -\frac{q}{r^2} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\lambda} \right) e^{-\frac{r}{\lambda}} \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{O}) + \frac{q}{r^2} \left(\frac{1}{r} + \frac{\sqrt{\mu}}{\lambda} \right) e^{-\frac{\sqrt{\mu}}{\lambda} r} \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{Q}.$$

Il campo considerato modifica dunque lievemente quello di Yukawa. Il vettore di campo \mathbf{E} è somma di due parti: la prima è il campo centrale di Yukawa ⁽⁶⁾ e la seconda è costituita da un vettore ortogonale al precedente.

Fisica. — *Misure di sezione d'urto totale per neutroni di 14 MeV.*

Nota (*) di MARIO AGENO, GIORGIO CORTELLESA e RUGGERO QUERZOLI, presentata dal Socio G. C. TRABACCHI.

Le misure di sezione d'urto totale (assorbimento + sparpagliamento elastico) per neutroni di qualche diecina di MeV, permettono, com'è noto, di trarre informazioni abbastanza dirette sul valore dei raggi nucleari. La connessione tra le due specie di grandezze non è in realtà così semplice come vorrebbe la teoria elementare della diffrazione di neutroni veloci da parte di nuclei ⁽¹⁻²⁾ e i valori dei raggi nucleari che si stabiliscono per questa via vengono sensibilmente a dipendere dal modello schematico di nucleo che si assume. Resta per altro il fatto che, a questi valori dell'energia delle particelle incidenti, le particolarità di struttura interna dei vari nuclei debbono

(*) Pervenuta all'Accademia il 14 ottobre 1952.

(1) N. BOHR, R. PIERLS, G. PLACZEK, « Nature », 144, 200 (1939).

(2) H. A. BETHE, « Phys. Rev. », 57, 1125 (1939).

ormai aver perduto qualunque importanza, di guisa che la sezione d'urto totale deve dipendere esclusivamente dalla dimensioni nucleari. Siccome d'altra parte l'energia non è ancora così elevata da far sì che un neutrone abbia una sensibile probabilità di attraversare il nucleo senza interagire con nessuna delle particelle che lo costituiscono, è da escludere in misure di questo tipo qualunque effetto di trasparenza e la sezione d'urto deve risultare una funzione regolare del numero di massa, capace di dare informazioni precise sulla densità della materia nucleare.

I dati sperimentali, raccolti in questi ultimi anni da diversi Autori ⁽³⁻⁶⁾ con neutroni di energia compresa tra 14 e 25 MeV, confermano in linea generale queste previsioni. Se ad esempio dai valori sperimentali delle sezioni d'urto si deducono i raggi nucleari efficaci con la formula elementare:

$$(1) \quad R = \left(\frac{\sigma}{2\pi} \right)^{1/2}$$

le misure a 14 MeV di Amaldi e collaboratori ⁽⁴⁾, che sono le più complete, forniscono come andamento dei raggi nucleari in funzione del numero di massa ⁽⁷⁾:

$$(2) \quad R = 1,37 + 1,3 A^{1/3}.$$

Vi sono tuttavia numerosi elementi che scartano dall'andamento medio assai di più di quanto non sia da attendersi sulla base del solo errore statistico, quali Be, S, Zr, Pb, Bi, fatto questo che si è cercato di mettere in relazione con la struttura a shell dei nuclei.

Soprattutto allo scopo di chiarire quest'ultimo punto, abbiamo ripreso in esame tutta la questione, proponendoci: *a*) di stabilire con sicurezza se gli scarti accennati siano reali; *b*) di esaminare un certo numero di elementi, la cui sezione d'urto totale per neutroni di 14 MeV non è stata finora misurata.

In un precedente lavoro ⁽⁸⁾ abbiamo descritto in dettaglio le esperienze preliminari che ci hanno permesso di adottare un procedimento di misura tale da eliminare con sicurezza ogni influenza sui dati di trasmissione da parte dei neutroni lenti diffusi, il che costituiva la maggior difficoltà da superare per eliminare gli errori sistematici. In tale lavoro abbiamo inoltre pubblicato i primi dati relativi alle sezioni d'urto del rame e dello zolfo, facendo vedere come il raggio nucleare dello zolfo risulti a noi in perfetto accordo con l'andamento (2) di Amaldi.

(3) R. SHERR, « Phys. Rev. », 68, 240 (1945).

(4) E. AMALDI, D. BOCCIARELLI, B. N. CACCIAPUOTI, G. C. TRABACCHI, « Rend. Lincei », 1, 29 (1946); « Nuovo Cimento », 3, 15 (1946); id., 3, 203 (1946).

(5) E. AMALDI, B. N. CACCIAPUOTI, « Phys. Rev. », 71, 739 (1947).

(6) A. H. LASDAY, « Phys. Rev. », 81, 139 (1951).

(7) L. J. COOK, E. M. McMILLAN, J. M. PETERSON, D. C. SEWELL, « Phys. Rev. », 75, 7 (1949).

(8) M. AGENO, G. CORTELLESA, R. QUERZOLI, « Rend. Ist. Sup. Sanità », XV, 555 (1952).

Vogliamo ora riferire su di una seconda serie di risultati, ottenuti sempre rivelando i neutroni veloci attraverso l'attività da essi indotta nel rame con il processo $\text{Cu}^{63}(n, 2n)\text{Cu}^{62}$. Mentre le relative misure erano in molto avanzato corso di esecuzione, abbiamo avuto notizia di due lavori pubblicati in America sullo stesso argomento ⁽⁹⁻¹⁰⁾, relativi però entrambi ad elementi leggeri. L'unico dato comune è quello relativo all'ossigeno, che si accorda entro gli errori sperimentali col nostro.

Il dispositivo sperimentale da noi adottato è rappresentato schematicamente nella fig. 1, nella quale le distanze indicate sono espresse in millimetri. T è la targhetta di litio del tubo acceleratore, che veniva bombardata con neutroni di 750 KeV, con che l'energia media dei neutroni effettivamente utilizzati risulta di 13,8 MeV. D è il diffusore costituito dalla sostanza in esame. R è il rivelatore, costituito da un dischetto di rame del diametro di 3,5 cm., circondato da uno schermo di B_2O_3 contenente circa 1 gr/cm² di B, avente lo scopo di ridurre l'effetto dei neutroni lenti diffusi

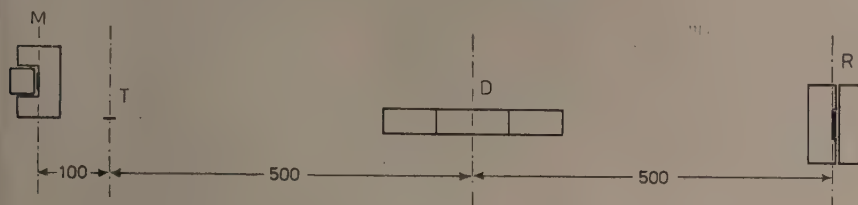


Fig. 1.

che pure attivano sensibilmente il rame con periodo di 5^m. L'attività del periodo di 10^m indotta nel rame dai neutroni veloci veniva misurata subito dopo l'irraggiamento con un contatore di Geiger a parete frontale di mica, di tipo convenzionale. M è un dischetto di rame del diametro di 2 cm (monitor), pure schermato con B_2O_3 e posto in posizione fissa, che è stato ogni volta irraggiato e misurato contemporaneamente al rivelatore, allo scopo di normalizzare tutte le misure allo stesso valore dell'intensità neutronica.

Il procedimento adottato ⁽⁶⁾ consiste nel misurare successivamente:

1° le attività (normalizzate) N_0 ed N del rivelatore di rame, senza e con diffusore;

2° le attività (normalizzate) M_0 ed M di un rivelatore di rodio (schermato con B_2O_3) posto nella stessa posizione del rivelatore di rame. Questo rivelatore si attiva praticamente solo per effetto dei neutroni lenti diffusi.

Successivamente:

3° dalle attività M_0 ed M del rivelatore di rodio, si calcolano le attività L_0 ed L , che si avrebbero nelle stesse condizioni sperimentali con un rivelatore di rame, che si attivi però solo per effetto dei neutroni lenti. È:

(9) H. L. POSS, E. O. SALANT, G. A. SNOW, L. C. L. YUAN, « Phys. Rev. », 87, 11 (1952).

(10) D. I. MEYER, W. NYER, « Los Alamos Report », n. 1279 (1951).

$L_0 = \alpha M_0$, $L = \alpha M$, essendo α il rapporto misurato una volta per tutte tra le attivabilità del rame e del rodio schermati, posti successivamente nella posizione del rivelatore, quando praticamente tutti i neutroni veloci siano stati eliminati mediante un diffusore di ottone della lunghezza di 25 cm.

La trasmissione del diffusore in esame è allora data da:

$$T = \frac{N - L}{N_0 - L_0}$$

e la sezione d'urto relativa:

$$\sigma = \frac{1}{nx} \ln \frac{1}{T}$$

ove n è il numero di atomi per cm^3 ed x lo spessore del diffusore espresso in cm.

Le sezioni d'urto sono state infine corrette col metodo di Amaldi ⁽⁴⁾, per tener conto dei neutroni che, pur avendo subito un urto nel diffusore, a causa della geometria non ideale raggiungono ancora il rivelatore. Questa correzione risulta, nelle nostre condizioni geometriche sempre inferiore al 3 %.

TABELLA I.

	gr/cm ²	T^{-1}	σ	σ_{corr}	R	R (Amaldi)
Cu	53,4	$4,67 \pm 0,28$	$3,03 \pm 0,12$	$3,09 \pm 0,12$	$7,01 \pm 0,14$	$6,75 \pm 0,18$
S	21,85	$2,21 \pm 0,09$	$1,97 \pm 0,10$	$2,00 \pm 0,10$	$5,71 \pm 0,10$	$5,02 \pm 0,16$
	28,73	$7,27 \pm 0,55$	$2,09 \pm 0,08$	$2,12 \pm 0,08$ $2,06 \pm 0,07$		
Al	16,21	$1,94 \pm 0,05$	$1,83 \pm 0,07$	$1,86 \pm 0,07$	$5,44 \pm 0,07$	$5,54 \pm 0,13$
Al ₂ O ₃	14,85	$2,13 \pm 0,04$	$8,63 \pm 0,22$	$8,73 \pm 0,22$	—	—
O (calcolato)	—	—	—	$1,67 \pm 0,09$	$4,75 \pm 0,09$	—
P	21,72	$2,45 \pm 0,05$	$2,12 \pm 0,05$	$2,15 \pm 0,05$	$5,85 \pm 0,04$	$9,08 \pm 0,16$
Bi	67,92	$2,74 \pm 0,08$	$5,16 \pm 0,14$	$5,32 \pm 0,14$	$9,15 \pm 0,08$	

I risultati finora ottenuti sono raccolti nella tabella I. Nelle due ultime colonne di essa sono indicati i raggi nucleari efficaci, calcolati con la (1) e per confronto quelli derivanti dalle misure di Amaldi. La figura 2 rappresenta i nostri raggi nucleari e quelli di Amaldi in funzione della radice cubica del numero di massa. Come si vede, il Bismuto anche per noi scarta ancora

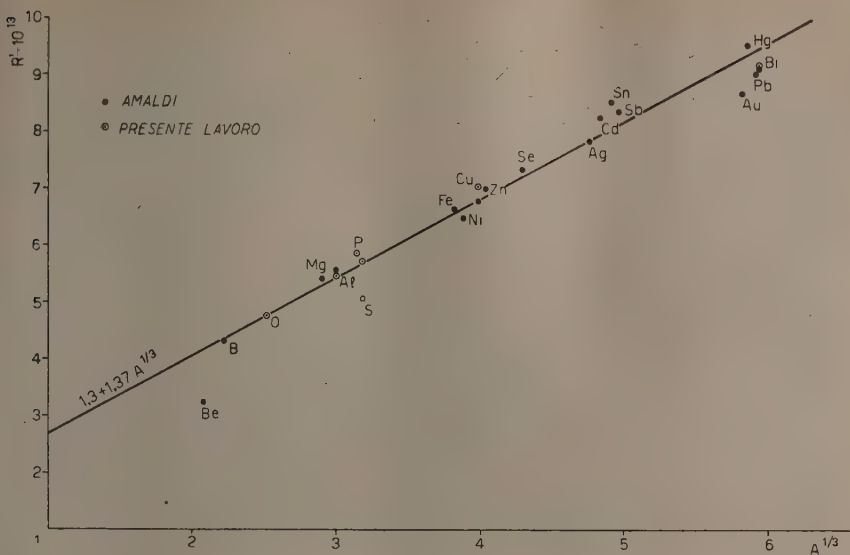


Fig. 2.

sensibilmente dalla retta interpolata. Stiamo per altro facendo prove per controllare in modo definitivo la purezza e l'omogeneità dei campioni di tale elemento da noi usati per le misure.

Un altro gruppo di dati è in corso di elaborazione e su di esso si riferirà in seguito.

Chimica organica. — *Sopra alcuni acidi piridin-policarbossilici* (*). Nota (**) di CESARE CARDANI, IURI BASSAROV e FRANCO PIOZZI, presentata dal Corrisp. A. QUILICO.

Nel corso di alcune ricerche relative alla struttura di sostanze naturali, è stato isolato tra i prodotti di degradazione ossidativa un acido cui, in base all'analisi elementare, si poteva assegnare la formula $C_{13}H_{13}O_8N$.

Le caratteristiche del prodotto ci hanno fatto ritenere possibile trattarsi di un acido piridin-tetracarbossilico, e poiché in letteratura non sono descritti acidi di questo tipo aventi una catena C_4 , ci siamo proposti di prepararne uno per studiarne le proprietà.

Tra i possibili isomeri, il più facile da preparare ed anche quello che con maggior probabilità corrispondeva all'acido di provenienza naturale, era quello sostituito in γ ; era inoltre molto probabile che la catena C_4 fosse un isobutile.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale del Politecnico di Milano e Centro di Chimica Industriale del C.N.R.

(**) Pervenuta all'Accademia il 20 ottobre 1952.

PARTE SPERIMENTALE.

1. - *Acido 2-metil-4-i-butil-piridin-3,5,6-tricarbonico* (form. IV). — Una soluzione acquosa concentrata di g 15 di cloridato del dietilestere dell'acido 2,6-dimetil-4-i-butil-piridin-3,5-dicarbonico ⁽²⁾ viene resa nettamente alcalina con NaOH e poi estratta 2 volte con etere. Dall'estratto eterico si distilla via l'etere e si saponifica il residuo con potassa alcoolica in autoclave, scaldando per 21 ore a 110–115°. In tali condizioni però la saponificazione del secondo carbossile non è completa; per completarla si distilla via l'alcool, lo si sostituisce con acqua e si prosegue il riscaldamento per altre 30 ore a 120–130°.

La soluzione acquosa viene svaporata a secchezza su b. m., onde eliminare quanto più è possibile l'alcool che ancora contiene, ripresa con acqua, saturata con CO₂ e poi ossidata con KMnO₄ scaldando su b. m. Si aggiungono inizialmente in una sola volta g 14 di KMnO₄ sciolti in 300 cm³ di acqua e quando questo è tutto consumato 10–15 cm³ di soluzione al 3 % ripetendo tali aggiunte fino a che il colore viola del KMnO₄ è visibile ancora dopo 4–5 ore dall'ultima aggiunta. (La quantità di ossidante necessaria corrisponde a 1,1–1,2 volte il teorico). Si porta all'ebollizione per rendere filtrabile l'MnO₂. La soluzione acquosa viene acidificata al Congo con H₂SO₄ ed estratta con etere in estrattore per liquidi. Tale estrazione va protratta molto essendo l'acido poco solubile in etere.

Dall'estratto eterico si allontana quasi tutto l'etere e si raccoglie il solido separatosi che viene cristallizzato da acqua. Tale prodotto è quasi insolubile nei comuni solventi organici, ma molto solubile in alcool e in acqua. Con 3 cristallizzazioni da acqua lo si ha perfettamente bianco in grossi cristalli prismatici che fondono a 172–174°. Contiene 1 mol. d'acqua di cristallizzazione che non cede completamente nemmeno a 120°. L'analisi (micro) ⁽³⁾ del prodotto seccato su CaCl₂ ha dato:

trov. % C	52,15	52,25	52,32	H	6,05	5,96	5,78	N	4,55	4,60
per C ₁₃ H ₁₅ O ₆ N·H ₂ O calc. %		52,17			5,73				4,68	

La titolazione potenziometrica con NaOH N/10 ha dato due flessi corrispondenti a pH 4,2 e 7,5 per cui l'equivalente acido risulta rispettivamente

	148,7	e	94,9
per 1/2 C ₁₃ H ₁₇ O ₇ N calc.	149,63	e per 1/3 C ₁₃ H ₁₇ O ₇ N calc.	99,76

La soluzione acquosa satura a freddo dell'acido, con FeSO₄ dà solo debole colorazione gialla.

(2) Preparato secondo ENGELMAN, « Ann. », 231, 57 (1885).

(3) Le microdeterminazioni di C e H sono state eseguite dal Centro di Microanalisi Organica del C.N.R. annesso all'Istituto Donegani di Novara della Società Montecatini.

L'estere metilico viene preparato introducendo poco a poco l'acido in un piccolo eccesso di soluzione eterea di diazometano ed eliminando poi sotto vuoto il diazometano. Si presenta come olio marrone chiaro che a 4 mmHg bolle a 175°. È assai solubile in metanolo, meno in benzene, poco in etere di petrolio, pochissimo in acqua. Da nessuno di questi solventi ci è riuscito di ottenerlo cristallino. Analisi (micro):

trov. % C	59,29	59,18	59,23	H	6,62	6,57	6,59	N	4,41	4,56
per C ₁₆ H ₂₁ O ₆ N	calc. %	59,43			6,55				4,33	

2. — 2-metil-4-*i*-butil-piridina (form. V). — Ad una soluzione acquosa di acido 2-metil-4-*i*-butil-piridin-3,5,6-tricarbonico si aggiunge acqua di calce fino a reazione alcalina alla fenoltaleina. Si svapora a secchezza su b. m. e poi si secca in stufa a 100°. Il sale di calcio così ottenuto viene caricato in un tubo da saggio che viene gradualmente scaldato cominciando dalla estremità chiusa. Distilla così acqua e un olio giallo con odore piridico. Nel tubo non si ha carbonizzazione. Il liquido distillato viene ridistillato in corrente di vapore; le gocce oleose che così si hanno sono assolutamente incolori.

La 2-metil-4-*i*-butil-piridina non è stata separata, ma se ne è preparato il picrato, aggiungendo a tale distillato acquoso un piccolo eccesso di acido picrico in soluzione acquosa satura a freddo. Il picrato si separa immediatamente in aghetti gialli che fondono a 114–116°. Se si cristallizza il picrato da acqua si ha la dissociazione di una parte considerevole. Cristallizzandolo da una soluzione acquosa satura a freddo di acido picrico, la dissociazione è minore e lo si ottiene così in aghetti che fondono a 117° dec. Analisi (micro):

trov. %	N	14,94	14,58
per C ₁₆ H ₁₈ O ₇ N ₄	calc. %	14,81	

3. — Ossidazione della 2-metil-4-*i*-butil-piridina: Acido piridin-2,4-dicarbonico (form. VI). — La 2-metil-4-*i*-butil-piridina preparata a partire da g 1,4 di acido metil-*i*-butil-piridintricarbonico viene ossidata su b. m. con KMnO₄ acquoso al 3 %. Il consumo dell'ossidante all'inizio è molto rapido, poi rallenta e dopo 13 ore di riscaldamento cessa completamente dopo che sono stati aggiunti complessivamente g 3,3 di KMnO₄. Separato l'MnO₂ si acidifica al congo con H₂SO₄ e si estrae ripetutamente con etere. Il residuo dell'evaporazione dell'estratto etero, cristallizzato da acqua, per riscaldamento in capillare si decompone, come riferito da Eguchi ⁽⁴⁾ per l'acido piridin-2,4-dicarbonico. Pure in accordo è l'intensa colorazione rossa che si ha aggiungendo FeSO₄ alla soluzione acquosa concentrata dell'acido.

Per ulteriore conferma abbiamo preparato l'estere dimetilico con diazometano. Tale estere, cristallizzato da etere di petrolio (p. eb. 40–50°)

(4) EGUCHI, « Bull. Chem. Soc. Japan », 2, 176–186; « Chem. Zentral. », 1927, II 1223.

o da acqua, fonde a 56-57° in accordo col valore riferito da Meyer e Tropsch ⁽⁵⁾.

4. - *Acido 4-i·butil-piridin-2,3,5,6-tetracarbonico* (form. VII). — L'acido 2-metil-4-i·butil-piridin-3-5-6-tricarbonico sciolto in acqua e neutralizzato con Na₂CO₃ non viene più ossidato dal permanganato, scaldando su b. m. L'ossidante invece viene ancor consumato, sia pur lentamente, se si scalda all'ebollizione.

Aggiungendo l'ossidante in soluzione acquosa al 3 %, a poco a poco, si nota che solo dopo 20 ore circa cessa il consumo di KMnO₄ essendone stata complessivamente consumata la quantità teorica. Dopo aver eliminato l'MnO₂ si acidifica al Congo con H₂SO₄ e si estrae a lungo con etere in estrattore continuo. Dall'estratto eterico, essiccato su Na₂SO₄, per eliminazione del solvente si ha un residuo solido bianco, poco solubile in alcool, praticamente insolubile negli altri comuni solventi organici, ma estremamente solubile in acqua. La purificazione da acqua è difficile data la sua grande solubilità ⁽⁶⁾; con due cristallizzazioni si ottiene un prodotto che bruciato lascia ceneri bianche. Dalle determinazioni analitiche risulta che tale prodotto è prevalentemente un sale monopotassico. Per avere l'acido puro occorre spappolare tale miscela in H₂SO₄ 50 % ed estrarre poi ripetutamente con etere. Gli estratti eterici riuniti, lavati con pochissima acqua, essiccati e svaporati, lasciano un residuo bianco che, cristallizzato da acqua si presenta in piccolissimi cristalli fondenti a 168-170° dec. che bruciati su lamina di platino non lasciano residuo. È molto solubile in acqua e in alcool, praticamente insolubile nei comuni solventi organici. La soluzione acquosa satura dà intensa colorazione rosso-arancio per aggiunta di soluzione satura di FeSO₄.

Il prodotto, seccato su CaCl₂ è stato analizzato (micro):

	trov. %	C 49,95	49,80	H 5,08	5,24
per C ₁₃ H ₁₃ O ₈ N	calc.	50,16		4,21	

L'acido γ -i·butil-piridin-tetracarbonico viene preparato più comodamente ossidando direttamente con KMnO₄ all'ebollizione l'acido 2,6-dimetil-4-i·butil-piridin-3,5-dicarbonico preparato come precedentemente indicato. Il consumo di ossidante all'inizio è molto rapido, poi diventa sempre più lento fino ad arrestarsi completamente quando né è stata aggiunta la quantità stechiometricamente necessaria per ossidare entrambi i metili.

5. - *4-i·butil-piridina* (form. VIII). — Viene preparata per decarbossilazione dell'acido γ -i·butil-piridin-tetracarbonico in maniera analoga a quanto descritto per la 2-metil-4-i·butil-piridina.

(5) MEYER e TROPSCH, «Monatsh.», 35, 193 (1914).

(6) Abbiamo preferito non usare l'alcool perchè, trattandosi di un acido molto forte, fosse assolutamente evitata ogni possibilità di eventuale esterificazione.

Il *picrato* si separa immediatamente aggiungendo ad una sospensione acquosa della base un piccolo eccesso di soluzione acquosa satura a freddo di acido picrico. Il *picrato* si presenta in aghetti gialli che fondono a 115–116° con dec.; per riscaldamento in acqua si scindono parzialmente nei componenti. Analisi (micro):

	trov. %	N 15,18
per $C_{15}H_{16}O_7N_4$	calc. %	15,38

6. — *Ossidazione della 4-i. butil-piridina: Acido isonicotinico* (form. IX). — La 4-i. butil-piridina preparata a partire da g 1 di acido γ -i. butil piridin-tetracarbonico viene ossidata con $KMnO_4$ in soluzione acquosa. Il consumo di ossidante è piuttosto lento e si arresta dopo che sono stati aggiunti 45 cm³ di soluzione di $KMnO_4$ al 3%, il che richiede circa 10 ore. Eliminato l' MnO_2 si acidifica al Congo con H_2SO_4 e si estrae ripetutamente con etere: nel residuo dell'estratto eterico sono presenti sostanze resinose a carattere acido non allontanabili totalmente per cristallizzazione da acqua. Sublimando nel vuoto (150° a 20 mm. di Hg) si riesce ad ottenere una polvere bianca che fonde a 300–302°; con ulteriore sublimazione il p. f. sale a 310° e viene così riconosciuto per acido isonicotinico.

7. — *Dietilestere dell'acido 2,6-dimetil-4-epil-diidropiridin-3,5-dicarbonico* (form. X). — g 10 di aldeide caprilica, g 20,3 di estere acetacetico e 18 cm³ di ammoniaca alcoolica (contenenti g 1,5 di NH_3) vengono bolliti per 22 ore su b. m. Si distilla via l'alcool su b. m. applicando alla fine il vuoto. Il residuo dopo qualche tempo cristallizza. Asciugato su piatto poroso e poi cristallizzato da alcool diluito si presenta in aghetti bianchi che fondono a 73–75°. Analisi (micro):

	trov. %	C 68,55	68,60	H 9,69	9,82	N 4,02
per $C_{20}H_{33}O_4N$	calc. %	68,34		9,46		3,99

8. — *Dietilestere dell'acido 4-epil-2,6-dimetil-piridin-3,5-dicarbonico* (form. XI). — L'estere precedentemente descritto viene ossidato in soluzione alcoolica 5 % con N_2O_5 . Dopo aver eliminato l'alcool si diluisce con etere e si lava con Na_2CO_3 . La soluzione eterica, dopo eliminazione dell'etere, viene distillata a 10 mm. di Hg raccogliendo la frazione che passa tra i 200 e i 220°. Tale estere, che non cristallizza nemmeno dopo lungo riposo, per trattamento con HCl conc., non dà un cloridrato solido e cristallizzabile da acqua, come dà invece il dietilestere dell'acido 4-i. butil-2,6-dimetil-piridin-3,5-dicarbonico precedentemente descritto.

La saponificazione completa dell'estere è invece assai difficile ed in tutto paragonabile a quella del prodotto prima citato.

Chimica inorganica. — *Composti nitrosilcarbamilminici di ferro e cobalto*^(*). Nota preliminare di LAMBERTO MALATESTA e ADRIANO SACCO, presentata^(**) dal Socio LIVIO CAMBI.

La relativamente alta stabilità dei composti isonitrilici $\text{Ni}(\text{CNR})_4$ ⁽¹⁾, $\text{Cr}(\text{CNR})_6$ ⁽²⁾, e $\text{Mo}(\text{CNR})_6$ ⁽³⁾ ottenuti da sali e sali complessi dei metalli e le carbilammine ($\text{R} = \text{metil, fenil, tolil, ecc.}$) in ambiente opportunamente riducente, e le analogie strutturali tra questi composti e i metallocarbonili $\text{Ni}(\text{CO})_4$, $\text{Cr}(\text{CO})_6$ e $\text{Mo}(\text{CO})_6$, poneva il problema della esistenza di complessi carbilammino-nitrosilici per quei metalli che danno luogo a nitrosil-carbonili stabili.

Nel corso di una indagine da poco iniziata furono da noi ottenuti i complessi ferro- e cobalto-nitrosilcarbamilminici, come composti ben definiti ed allo stato di purezza.

La preparazione avvenne secondo due vie essenzialmente diverse, e cioè:

1° Addizione di carbilammina ai sali nitrosilici di ferro e cobalto quali $\text{KFe}(\text{NO})_2\text{S}_2\text{O}_3$ e $\text{Co}(\text{NO})(\text{NH}_3)_5\text{Cl}_2$ in ambiente riducente.

2° Reazione tra l'idrossilammina e gli alogenuri ferrotetracarbamilminici $\text{Fe}(\text{CNR})_4\text{Cl}_2$ e cobaltotetracarbamilminici $\text{Co}(\text{CNR})_4\text{I}_2$. La reazione ha un corso che riteniamo analogo a quello della reazione della stessa idrossilammina sui cianosali di Nast⁽⁴⁾ attraverso lo ione NO^- .

Le ferronitrosocarbamilmine $\text{Fe}(\text{NO})_2(\text{CNR})_2$ sono composti stabili all'aria per qualche ora, solubili in benzolo ed altri solventi organici, diamagnetici. Nello spazio di giorni subiscono una completa demolizione perdendo ossido d'azoto. Furono finora preparati i derivati delle metil-, fenil- e p-tolil-carbamilmine.

Le cobaltonitrosocarbamilmine $\text{Co}(\text{NO})(\text{CNR})_3$, sono simili ai composti del ferro, ma molto più stabili di quelli. Furono preparate sinora i derivati della fenil-, p-tolil-, p-(amminodimetil)fenil- e p-clorofenilcarbamilmina.

Le ricerche continuano.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale dell'Università di Milano.

(**) Nella seduta dell'8 novembre 1952.

(1) L. MALATESTA e A. SACCO, questi « Rendiconti », VIII, 12, 308 (1952).

(2) L. MALATESTA, A. SACCO e S. GHIELMI, « Gazzetta Chim. It. », 82, 516 (1952).

(3) L. MALATESTA, A. SACCO e M. GABAGLIO, « Gazzetta Chim. It. », 82, 548 (1952).

(4) NAST e PROESCHEL, « Zeit. anorg. allg. Ch. », 256, 158 (1948).

Chimica inorganica. — *Le leghe fra Cerio e Manganese* (*).

Nota di ALDO IANDELLI, presentata (**) dal Socio L. ROLLA.

Lo studio del sistema Lantanio-Manganese, effettuato vari anni fa ⁽¹⁾, portò al risultato inatteso che, a differenza delle altre leghe delle terre rare già esaminate, i due metalli non formavano fra loro dei composti; ed anzi presentavano una estesa lacuna di miscibilità allo stato liquido. Il diagramma di stato fu confermato recentemente da una ricerca sulla suscettività magnetica delle leghe Lantanio-Manganese ⁽²⁾.

Mentre inoltre le terre rare si comportano nelle leghe conosciute sempre nello stesso modo ⁽³⁾, per quelle col Manganese questo non avviene. Successivamente alla pubblicazione del diagramma La-Mn, fu dimostrata infatti l'esistenza di due composti del Gadolinio: $GdMn_2$ e $GdMn_3$ dei quali fu determinata la struttura ⁽⁴⁾. Nelle leghe col Manganese Lantanio e Gadolinio mostrano quindi una differenza fra di loro assai più accentuata che nei composti ordinari; e, se il Gadolinio non presenta proprio una singolarità, c'è da pensare che esaminando la successione di tali leghe col La, Ce, Pr, ecc., ad un certo momento si debba osservare una variazione discontinua da un tipo di diagramma ad un altro, il che permetterebbe di dividere le terre rare in base al loro comportamento « metallico ». Partendo da queste considerazioni, ho studiato il sistema Cerio-Manganese, del quale riferirò nel presente lavoro.

La preparazione delle leghe è stata effettuata come di solito, per fusione dei due metalli sotto uno strato protettore di NaCl o $BaCl_2$.

Il Cerio, della Società Auer, conteneva come impurezze lo 0,5 % di Si e Fe; mentre il Manganese era un buon metallo elettrolitico al 99,8 % con tracce di Ni, Zn, S, ed una certa quantità di idrogeno. Le lamine di Mn sono state, prima di prepararne le leghe, fuse sotto idrogeno o sotto $BaCl_2$ fornendo un metallo compatto, fragile, a punto di fusione fra 1244° e 1250° , in buon accordo con i valori migliori conosciuti ⁽⁵⁾. Le temperature di trasformazione $\alpha \rightarrow \beta$ e $\beta \rightarrow \gamma$, osservabili solo per quantità sufficientemente forti di metallo, sono di 670° e 1100° ; e le costanti reticolari delle due modificazioni α e β risultano rispettivamente 8,901 e 6,302, valori tutti quanti sostanzialmente identici a quelli conosciuti ⁽⁵⁾.

(*) Lavoro eseguito col finanziamento del C. N. R.

(**) Nella seduta dell'8 novembre 1952.

(1) L. ROLLA e A. IANDELLI, « Ber. », 75, 2091 (1942).

(2) A. SERRES, « J. Phys. Radium », 13, 46 (1952).

(3) R. VOGEL e T. HEUMANN, « Z. Metallk. », 35, 29 (1943).

(4) F. ENDTER e W. KLEMM, « Z. anorg. allgem. Chem. », 252, 64 (1943); 252, 377 (1944).

(5) A. E. VAN ARKEL, *Reine Metalle*, Springer, Berlin 1939.

Il peso di lega preparato ogni volta è stato di 25-30 gr., e, dato che i punti di fusione nel sistema non sono troppo elevati, l'attacco del crogiolo Phytagoras da parte del Cerio fuso (che produce la perdita di metallo raro nella lega) non è stato di solito troppo forte. Le leghe risultanti, il cui peso mostrava una variazione rispetto a quello calcolato, sono state analizzate precipitando il Cerio come ossalato e pesandolo come ossido e determinando il Manganese come Mn_3O_4 .

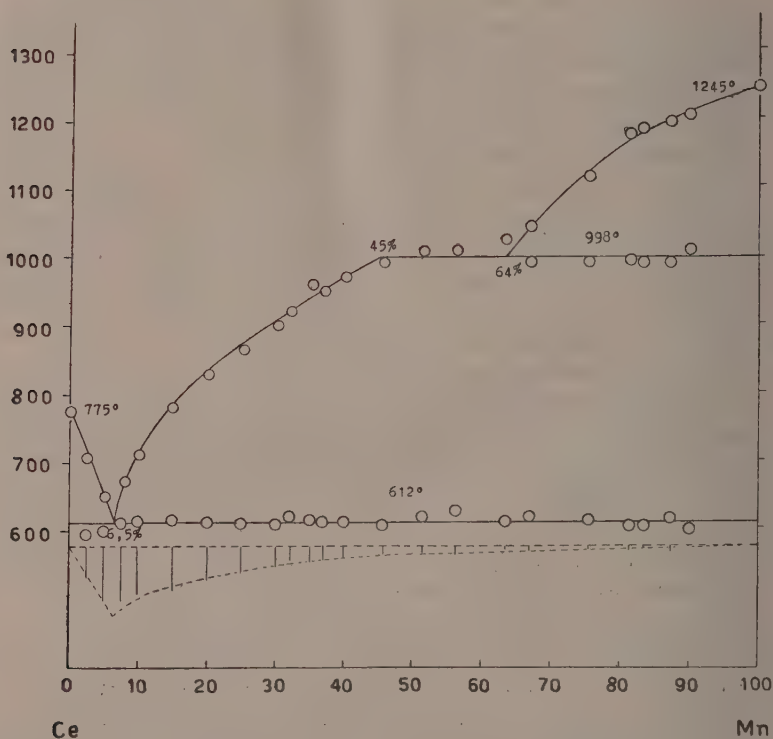


Fig. 1. - Diagramma di stato del sistema Cerio-Manganese.

Le temperature caratteristiche ottenute dalle curve di raffreddamento delle varie leghe sono riportate nella tabella I, per mezzo della quale è stato disegnato il grafico della fig. 1.

Il punto di fusione delle leghe si abbassa rapidamente da quello del Cerio (775°) fino ad un minimo di 612° al 6,5 % Mn, per poi risalire fino a 998° (45 % Mn), temperatura che corrisponde ad una piccola evoluzione termica, ma che si ritrova costantemente in tutte le composizioni fino al Manganese, insieme all'arresto a 612°. Dopo il 64 % Mn i punti di fusione tornano a salire fino a raggiungere quello del Manganese.

Il diagramma precedente è stato completamente confermato dalle osservazioni micrografiche e röntgenografiche eseguite sui vari campioni, che

hanno mostrato concordemente l'assenza di qualsiasi altra fase diversa dai due metalli.

TABELLA I.

*Temperature caratteristiche sulle curve di raffreddamento
delle leghe Cerio-Manganese.*

% Mn	Temperature caratteristiche			Durate degli assesti eutettici
0	775°	—	—	—
2,5	708	—	595°	27'
5,1	650	—	600	48
8,0	673	—	612	47
10,2	710	—	613	43
15,0	780	—	615	40
20,0	830	—	612	29
25,0	865	—	611	23
30,0	900	—	609	18
32,1	920	—	620	13
35,3	962	—	614	14
37,0	950	—	612	12
40,0	970	—	613	10
45,8	—	990°	608	7
51,6	—	1007	620	6
56,2	—	1009	627	10
63,5	—	1023	612	4
66,9	1042	988	620	5
75,5	1112	991	614	4
81,5	1175	992	605	5
83,3	1184	987	603	—
87,2	1193	988	618	7
90,0	1202	1008	600	—
100,0	1245	—	—	—

Le quattro micrografie riportate possono bastare a illustrare l'aspetto dei vari campioni. Per tutte le leghe si ritrova la presenza di una fase poco at-

taccabile, insieme ad una facilmente attaccabile, nella quale la prima è distribuita in forma eutettica; e la cui quantità va crescendo regolarmente con l'aumento della percentuale di Manganese della lega. Le due fasi sono costituite da Cerio e Manganese, come è dimostrato dai fotogrammi delle polveri eseguiti sui vari campioni, che presentano solo le righe dei due metalli, con valori delle costanti reticolari praticamente identici a quelle dei due elementi separati. Così, mentre per il Cerio usato si ha $a_0 = 5,140$, per la lega all'8% Mn, sul fotogramma della quale compaiono solo le righe di questo elemento, $a_0 = 5,135$; per la lega al 30% Mn con le righe del Cerio e del Manganese: $a_0(\text{Ce}) = 5,137$, $a_0(\text{Mn}) = 9,895$. Leghe ricotte non presentano differenze

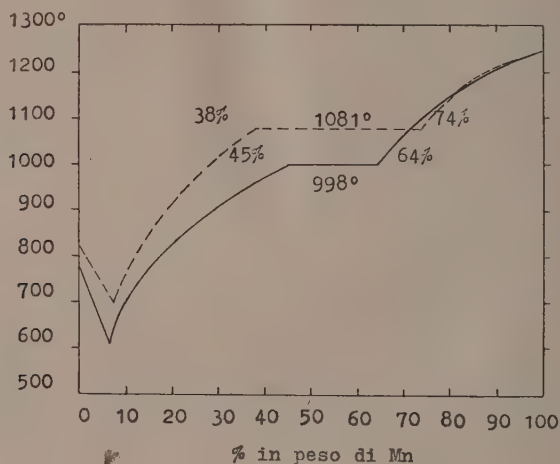
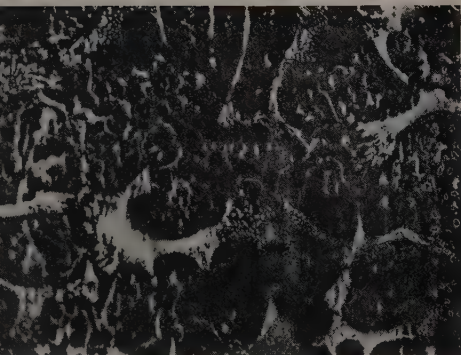


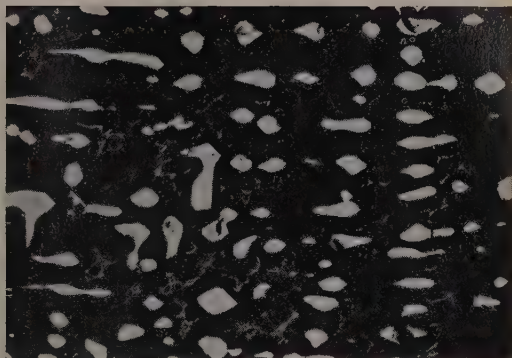
Fig. 2. - Sistemi La-Mn (---) e Ce-Mn (—).

rispetto a quelle raffreddate normalmente, salvo un ingrossamento dei cristalli di Manganese, visibile sulla micrografia n. 2.

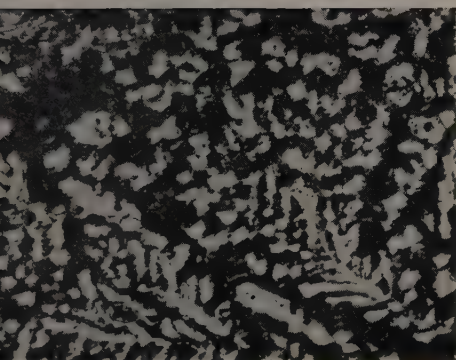
In conclusione, Cerio e Manganese si legano incompletamente presentando una lacuna di miscibilità allo stato liquido fra il 45 ed il 64% Mn e non dando nessuna fase intermedia, almeno nel campo di temperature esaminato (da 500° in su). Il comportamento è lo stesso di quello delle leghe La-Mn, come si osserva dalla figura 2 nella quale sono stati riportati schematicamente i due diagrammi di stato. A differenza di queste però la lacuna di miscibilità è più piccola per la lega del Cerio, mentre ci si potrebbe aspettare in caso, dato il loro punto di fusione inferiore, un allargamento. È probabile quindi che la comparsa di un diagramma senza immiscibilità e con una fase intermedia si abbia per le leghe del Manganese con una terra rara non troppo lontana dal Cerio.



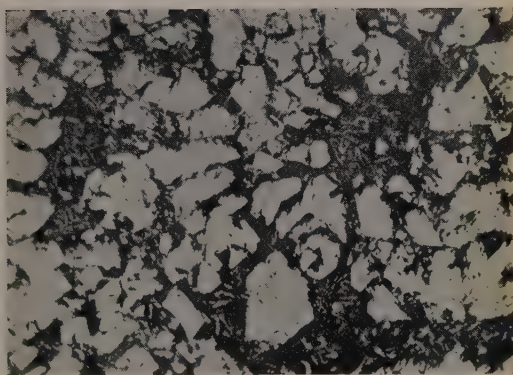
8 % Mn \times 140.



37 % Mn dopo ricottura \times 160.



51,6 % Mn \times 240.



63,5 % Mn \times 160.

Geochimica. — *La ripartizione degli elementi tra fase silicata e metallica nelle meteoriti ed il calore di formazione degli ossidi.* — I. *Le affinità geochimiche* ^(*). Nota di FRANCO TONANI, presentata ^(**) dal Socio G. CAROBBÌ.

§ 1. Poichè la definizione delle affinità geochimiche in recenti trattati si presenta sotto forma non molto chiara, sembra opportuna anzitutto una breve illustrazione di tale definizione.

Il carattere geochimico di ogni elemento viene indicato con il nome di quella tra le fasi naturali metallica, a solfuri, silicata o gassosa, per la quale l'elemento stesso mostra la massima affinità assoluta ⁽¹⁾.

La distribuzione di un elemento fra due, tre o quattro fasi, è individuata d'altronde rispettivamente da uno, due e tre rapporti di ripartizione tra coppie di fasi. Per la grande maggioranza degli elementi il caso di interesse geochimico è rappresentato dalla distribuzione di una specie chimica fra le tre fasi: metallica, a solfuri ed a silicati, e perciò si tratta di problemi i cui termini sono individuati dai valori di due variabili, cioè dai rapporti di ripartizione fra due coppie di fasi. L'assenza di una delle tre fasi conduce a casi particolari che non dovrebbero sollevare difficoltà, se non forse di nomenclatura.

Nel caso generale (tre fasi) un solo rapporto di ripartizione non definisce la distribuzione, e quindi neppure il carattere geochimico di un elemento: perchè questo carattere sia definibile occorrono due rapporti di ripartizione, cioè due affinità geochimiche.

In pratica si incontrano ostacoli nel determinare la distribuzione degli elementi, e quindi il carattere geochimico, a causa della variabilità dei rapporti di ripartizione, che dipendono dalle condizioni di temperatura e di pressione dell'equilibrio e dalla composizione delle fasi naturali.

Qui interessa rilevare che in fin dei conti le affinità geochimiche sono affinità (termodinamiche) misurate in particolari condizioni. Queste condizioni si precisano dicendo che si sarebbero realizzate in certi sistemi naturali di speciale significato: le meteoriti.

§ 2. La prima legge di distribuzione geochimica degli elementi, ridotta al suo stretto contenuto empirico, stabilisce che la diffusione degli elementi nella litosfera è determinata dalla loro affinità geochimica per le fasi sili-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di mineralogia, petrografia e geochimica della Università di Firenze, centro di studio per la geochimica del C.N.R.

(**) Nella seduta dell'8 novembre 1952.

(1) V. M. GOLDSCHMIDT, *Geochemische Verteilungsgesetze der Elemente*, II, p. 15 («Vidensk. Skr.», I, «Mat.-Naturv. Kl.», n. 4).

cate rispetto all'affinità per le fasi metallica ed a solfuri. Questa legge lega dunque l'affinità geochimica e la composizione della litosfera.

Nella letteratura è stato ormai accettato il criterio delle affinità geochimiche, introdotto dal Goldschmidt, perchè si è preferito stabilire un legame fra la composizione della litosfera ed osservazioni non solo empiriche ma riferentisi ad eventi effettivamente verificatisi nell'universo in condizioni determinate (formazione delle meteoriti). Queste osservazioni appaiono contrapposte a quei dati dell'esperienza che fanno astrazione da condizioni specifiche, come ad esempio avviene per l'idea di un legame tra la ripartizione geochimica degli elementi ed i loro potenziali elettrochimici, seguita a suo tempo dal Tammann e discussa dal Goldschmidt (loc. cit.).

Le affinità geochimiche si riferiscono a condizioni particolari realizzatesi in natura; se desideriamo una interpretazione della distribuzione geochimica degli elementi in termini generali, dobbiamo collegare alla loro volta le affinità geochimiche con altre proprietà degli elementi, le quali siano definibili in maniera generale e cioè senza riferimento a circostanze speciali. V. M. Goldschmidt mise in evidenza la relazione esistente tra le affinità geochimiche degli elementi, la loro posizione nel sistema periodico, ed il loro volume atomico. Le vedute del Tammann sopra ricordate contengono implicita l'idea di una analoga relazione tra affinità geochimiche e potenziali normali.

Il Goldschmidt stesso, il Wahl ed altri hanno indicata come possibile l'esistenza di una relazione tra affinità geochimiche ed affinità di formazione degli ossidi e dei solfuri.

A quanto mi risulta soltanto il Brown ed il Patterson⁽²⁾ hanno messo a confronto le osservazioni naturali con una legge di senso fisico definito (almeno implicitamente) che lega il calore di formazione degli ossidi e la costante di ripartizione tra le fasi metallica e silicata delle meteoriti. Il Brown ed il Patterson non avevano però in vista problemi geochimici, occupandosi piuttosto di individuare le condizioni di origine delle meteoriti.

Successivamente il Rankama ed il Sahama⁽³⁾ hanno adottato in modo predominante la considerazione delle proprietà termochimiche degli ossidi e dei solfuri al fine di illustrare la classificazione naturale geochimica degli elementi, lasciando però cadere la legge chiaramente formulata dal Brown e dal Patterson. Il Rankama ed il Sahama, nell'applicazione di quei dati in considerazioni geochimiche, si limitano alla presentazione di una tabella dei valori dei calori di formazione, ed al confronto fra la successione di elementi ordinata in tal modo con i gruppi di elementi in ordine di affinità geochimica tra fase silicata e fase metallica, o tra fase a solfuri e fase metallica. Nel trattato citato si discute ampiamente la corrispondenza o la discordanza, caso per caso, delle due serie. Il senso di una discussione così puntua-

(2) H. BROWN e C. PATTERSON, *The composition of meteoritic matter*, III. («J. Geol. », LVI, n. 2, marzo 1948).

(3) K. RANKAMA e TH. G. SAHAMA, *Geochemistry*, Chicago 1949.

lizzata viene però limitato dalla circostanza che la prima legge di distribuzione geochimica degli elementi, pur spiegando la parte essenziale delle osservazioni per quanto riguarda la diffusione degli elementi nella litosfera, a sua volta presenta una discordanza sensibile con il comportamento ad esempio di tre elementi, il fosforo, il molibdeno e lo stagno: questi elementi, pur essendo siderofili, risultano arricchiti nella litosfera rispetto alla loro diffusione media nell'universo accessibile alle indagini, più del ferro.

Si potrebbe allora dire che la prima legge di distribuzione geochimica ha carattere «statistico», è che perciò è opportuno accontentarsi di una corrispondenza statistica fra calori di formazione dei composti ed affinità geochimiche rispetto alle fasi corrispondenti ai composti stessi. Per rendere esplicita questa affermazione un po' vaga occorre enunciare tali leggi (sia la prima legge di distribuzione geochimica che la relazione del Brown e del Patterson) in modo probabilistico, cioè tale da porle al riparo dall'essere incompatibili con le eccezioni che si constatano; questo è il meno che si possa fare quando, come nel caso presente, si inquadrano in una legge semplicissima dei fenomeni di straordinaria complicazione per il numero di circostanze chimiche e fisiche che possono influire su di essi.

§ 3. È di importanza sostanziale il fatto che, se si tratta il problema assumendo le affinità geochimiche come attributi, si può porsi soltanto la questione se esse risultano o no indipendenti da altre circostanze osservate; ad esempio è possibile stabilire solo che l'abbondanza degli elementi nella litosfera rispetto alla loro diffusione nell'universo non è indipendente dal loro carattere litofilo, ovvero siderofilo o calcofilo; e viceversa che il carattere geochimico non è indipendente dai calori di formazione a partire dagli elementi dei rispettivi ossidi e solfuri. Tutto ciò risulta assai evidente nel trattamento probabilistico che si deve impiegare in questi casi (tavola di contingenza semplice), ma la limitazione è manifestamente intrinseca al modo in cui si può ragionare di attributi qualitativi.

In altre parole si può dire che nella ricerca delle relazioni fra due ordini di eventi, finché almeno uno di essi è indicato in maniera qualitativa, comunque possano variare i dati sperimentali disponibili non muta la proposizione enunciata («un attributo non è indipendente dall'altro») ma solo il grado di sicurezza nell'affermarla o nel rifiutarla. Ad esempio nel nostro caso, progredendo le osservazioni e la loro discussione, si potrebbe al più decidere che le affinità geochimiche rispetto alle fasi metallica e silicata sono indipendenti dal calore di formazione degli ossidi, contrariamente all'opinione oggi accettata; oppure si può aumentare la nostra fiducia nel fatto che i due attributi non sono indipendenti fra di loro: non si offre altra alternativa. Come conclusione di qualunque discussione, nella quale le affinità geochimiche siano considerate come attributi potrà aversi solo la scelta fra queste due alternative: l'attributo, ad esempio, di litofilo per i diversi elementi si presenta indipendentemente dal fatto che il calore di

formazione del loro ossido sia maggiore o minore di quello del ferro; oppure, al contrario, è più frequente incontrare il carattere della litofilia presso gli elementi nei quali il calore di formazione dell'ossido è maggiore che per il ferro.

Da ciò consegue che allo stato attuale delle nostre conoscenze è estremamente improbabile che la discussione del problema in questi termini porti alcun progresso rispetto a quanto già sappiamo.

Anzitutto è ovvio che sia così se vengono presi in considerazione i casi di elementi singoli, per il carattere statistico delle leggi geochimiche in questione. Ma anche considerando gli elementi nel loro insieme, come è più ragionevole fare, si deve dare per scontato che il carattere litofilo di un elemento M, e l'entalpia della reazione $MO + Fe = M + FeO$, non sono indipendenti; infatti è estremamente improbabile che i dati di cui oggi disponiamo possano modificarsi in maniera così profonda da indurci ad abbandonare l'alternativa finora accettata. D'altronde questa forma di discussione in cui le affinità geochimiche compaiono come attributi qualitativi non offre alternative diverse da quelle viste; essa non offre alcuna possibilità di precisare la natura e la forma della relazione che intercorre, ad esempio, fra le affinità geochimiche degli elementi per le fasi silicata e metallica delle meteoriti, ed i calori di formazione degli ossidi degli elementi. Il mutamento introdotto dal Brown e dal Patterson nei termini della questione è importante per il suo futuro sviluppo, almeno in quanto concerne la geochimica: perchè il fatto di prendere in considerazione i valori della costante di equilibrio per ciascun elemento, e ricercare l'esistenza e la natura del legame fra questi valori ed i valori di altre grandezze, sottrae il problema ad una formulazione che non lascia ormai alcuna possibilità di sostanziali progressi.

In realtà il Brown ed il Patterson volevano, considerando le meteoriti come porzioni di un sistema approssimativamente in equilibrio, stimare la temperatura di questo sistema, quale si viene a definire appunto ammettendo l'ipotesi che l'attuale configurazione del sistema stesso corrisponda ad uno stato di equilibrio termodinamico. Nell'ipotesi dell'equilibrio termodinamico vale in prima approssimazione la relazione:

$$(1) \quad \log K = - \frac{0.43}{RT} \Delta I_0^{(4)}$$

dove K è la costante di equilibrio della reazione: $M + FeO = MO + Fe$ (oppure la costante di ripartizione riferita al ferro tra una fase contenente gli ossidi, come quella silicata, ed una fase contenente i metalli, come il ferro-nichel; purchè si possa prescindere dalla mutua solubilità delle fasi stesse); ΔI_0 è la variazione di entalpia a T_0 , p_0 della stessa reazione (oppure il calore di trasformazione corrispondente al passaggio di una mole del costi-

(4) I logaritmi nella presente Nota sono tutti in base 10.

tuate M a T_0 e p_0 dall'una all'altra fase). T è la temperatura assoluta del sistema in equilibrio termodinamico.

Prendendo in considerazione questa relazione, il valore di $\log K$ è stato sostituito alle denominazioni « litofilo » e « siderofilo » nel problema della dipendenza delle affinità geochimiche per le fasi metallica e silicata dal calore di formazione degli ossidi. Il valore di $\log K$, date certe convenzioni iniziali, è positivo per gli elementi piuttosto litofili che siderofili, e negativo per quelli piuttosto siderofili che litofili. Il solo fatto di tale sostituzione ha importanza per la geochimica perchè cambia i termini del problema, che erano rimasti immutati da V. M. Goldschmidt in poi: non è più implicito a priori nella questione posta, infatti, che si debba parlare solo di non indipendenza tra affinità geochimiche per i silicati e il ferronichel, e calore di formazione degli ossidi, ma si può prendere in considerazione qualunque relazione tra $\log K$ e ΔI_0 . Il mutamento sarebbe illusorio se le osservazioni non mostrassero che la conoscenza del valore di $\log K$ contiene informazioni maggiori della conoscenza del solo segno di $\log K$ (equivalente all'alternativa semplice tra « litofilo » e « siderofilo »). Infatti la sostituzione dei valori numerici di $\log K$ in luogo del carattere geochimico elimina la limitazione della questione al problema dell'indipendenza o meno dai calori di formazione degli ossidi, in quanto essa è una limitazione « a priori » delle risposte possibili; non la deve escludere dalle stesse conclusioni possibili, perchè in questo caso si commetterebbe di nuovo l'errore di pregiudicare a priori su una proposizione di natura empirica. Infatti se le osservazioni non ci forniscono una prova ragionevole dell'esistenza di una relazione di tipo definito, come potrebbe essere la (1), tra $\log K$ e ΔI_0 , non si può dire che esse contengano altro che l'informazione che $\log K$ e ΔI_0 non sono indipendenti. In questo caso (che era il caso reale al tempo della formulazione del Goldschmidt) la considerazione di $\log K$ in luogo delle affinità geochimiche come attributi rappresenterebbe una possibilità di progresso soltanto astratta, che intanto creerebbe complicazioni di linguaggio. La prova dell'esistenza di una relazione di tipo definito è dunque un aspetto importante del problema, ma non segue immediatamente dal risultato di una semplice prova di indipendenza.

Il Brown ed il Patterson non si sono preoccupati di cercare con cura speciale una prova ragionevole di esistenza di una relazione definita tra $\log K$ e ΔI_0 ; ciononostante hanno ritenuto che la semplice relazione (1) non fosse sufficientemente conforme ai risultati sperimentali conosciuti. Più precisamente il Brown ed il Patterson pensarono che, probabilmente a causa dell'effetto della pressione, il diagramma ($\log K$, ΔI_0) che meglio si attagliava ai dati fosse una curva ad S anzichè la retta rappresentata dalla (1).

Nella Nota che seguirà a questa verrà dimostrato che invece gli stessi dati riportati dal Brown e dal Patterson, non solo portano a constatare l'esistenza di uno stretto legame fra calore di formazione degli ossidi e costante di ripartizione tra le fasi metallica e silicata, ma non permet-

tono di rifiutare ragionevolmente la relazione lineare a favore di una relazione più complessa. Sebbene il Brown ed il Patterson non avessero presente la questione puramente geochimica sulla convenienza di denotare l'affinità geochimica con il valore di $\log K$ piuttosto che con gli attributi classici, con la relativa questione di esistenza per una relazione fra $\log K$ e ΔI_o , pure la curva da essi tracciata implica l'intuizione dell'esistenza di una legge definita, con le sue conseguenze. L'inesattezza della interpolazione indica nello stesso tempo che la dispersione dei punti sul piano $(\log K, \Delta I_o)$ era tale che codesta intuizione poteva difficilmente essere accettata come elemento di prova. L'uso di un procedimento razionale anziché intuitivo non solo altera un poco la forma della curva interpolata, ma cambia la linea logica dell'argomentazione, poichè in esso la prova di esistenza che interessa per il problema strettamente geochimico ha una parte di primo piano. Un'osservazione analoga vale per le argomentazioni sull'origine delle meteoriti, che costituiscono il solo oggetto di discussione per il Brown ed il Patterson: considerato il significato fisico dell'esistenza di una relazione (in particolare lineare) oltre al valore stimato per T cambia anche il ruolo di certe proposizioni nel ragionamento. Tutto ciò verrà discusso in una terza Nota, insieme al risultato dell'esame di ulteriori dati sugli equilibri metallo-scoria.

Nella seconda Nota verrà dimostrato che una relazione del tipo della (1) deve ritenersi ragionevolmente da accettare, ove ci si basi sugli stessi dati riportati dal Brown e dal Patterson. Questi sono essenzialmente, per quanto riguarda il valore di $\log K$, i dati classici sulle meteoriti a ferronichel e sulle meteoriti litoidi dei Noddack e del Goldschmidt, di cui alcuni corretti dagli Autori stessi. I dati per quattro punti supplementari non compresi nel calcolo e da me riportati sul diagramma $(\log K, \Delta I_o)$ a conferma della relazione scelta, sono stati presi allo stesso modo dai Noddack per quanto riguarda il valore di $\log K$, mentre i valori dei calori di formazione degli ossidi sono quelli riportati dal Pascal, o da questi calcolati. Il coefficiente di proporzionalità fra $\log K$ e ΔI_o , accettato di conseguenza, differisce nettamente da quello proposto dal Brown e dal Patterson.

La prova dell'esistenza della relazione lineare conferma che l'adozione del valore di $\log K$ in luogo dei caratteri geochimici per denotare l'affinità geochimica, almeno per le fasi silicata e metallica, corrisponde ad un reale aumento della quantità di informazioni sul comportamento geochimico esprimibili mediante i calori di formazione degli ossidi.

La legge accettata riguarda uno solo dei due rapporti di ripartizione necessari per definire la distribuzione fra tre fasi, e quindi il carattere geochimico; una relazione analoga, anche se non necessariamente lineare, dovrebbe perciò venir stabilita per la ripartizione metallo-solfuri. La discussione di questa possibilità viene rimandata ad altra occasione, perchè richiede un approfondimento assai maggiore della critica al materiale sperimentale disponibile; per la presente discussione ha già valore la conferma sperimentale dell'esistenza di una relazione definita tra $\log K$ e ΔI_o nel caso degli ossidi.

tanto più se lineare, poichè, salvo certe osservazioni sul significato del $\log K$ come è stato calcolato, la linearità di tale relazione è indicativa delle condizioni di « equilibrio » che occorrono a giustificare, se non altro, la corrispondenza tra rapporti di ripartizione ed « affinità ».

§ 4. Una conclusione, o meglio un secondo ordine di conseguenze, che possono trarsi dall'accettazione della legge del Brown e del Patterson, e che riguardano sempre la geochimica, consiste nell'accenno ad una nuova correlazione della classificazione geochimica degli elementi con le altre proprietà degli elementi stessi.

Infatti si è stabilito un legame tra distribuzione geochimica e proprietà termochimiche che può essere considerato di natura causale. Le proprietà termochimiche dal canto loro cominciano ad apparirci collegate ad altre proprietà fondamentali degli elementi (Pauling ⁽⁵⁾): « ... Noi siamo perciò riusciti a portare nel campo della termochimica inorganica, nel quale a prima vista si può scoprire poco ordine, un certo grado di sistematizzazione. È possibile calcolare valori approssimativi dei calori di formazione usando i valori di x ... » (dove x è l'elettronegatività). Per brevità, quanto a maggiori dettagli sul calcolo e sul significato di x si rimanda al trattato citato. Pochi richiami bastano per prospettare come la relazione ora vista permetta di collegare fra loro e con la classificazione geochimica quelle proprietà che erano state volta a volta ed indipendentemente prese in considerazione come interpretazione generale del carattere geochimico. L'elettronegatività è in semplice rapporto di proporzionalità con la media tra il potenziale di ionizzazione e l'affinità elettronica. L'elettronegatività può rappresentare inoltre i possibili tipi di combinazione fra gli elementi: infatti la differenza di elettronegatività fra due elementi serve a prevedere in quale proporzione l'energia del legame chimico formatosi è dovuta ad un legame ionico o ad un legame di scambio.

Si presenta così una possibilità, che i fatti dovranno confermare: la stessa scala delle elettronegatività fornisce una previsione dei calori di formazione non solo degli ossidi, ma anche dei solfuri; essa perciò ha la possibilità di offrire *da sola* un quadro unitario della distribuzione fra tre fasi, e perciò del carattere geochimico degli elementi. Inoltre il significato causale dei legami reciproci fra affinità geochimica, calori di formazione ed elettronegatività, permette di considerare quest'ultima come tramite per una visione d'insieme delle connessioni tra distribuzione geochimica ed altre proprietà degli elementi.

(5) L. PAULING, *The nature of the chemical bond*, Ithaca, N.Y., 1948.

Biologia. — *Variazioni dell'attività fosfatasica alcalina durante lo sviluppo di Rana esculenta* (*). Nota (**) di LEO RAUNICH, presentata dal Socio G. COTRONEI.

I lavori di Moog⁽¹⁾ sull'embrione di pollo, e quelli di Brachet⁽²⁾, Moyson⁽³⁾ e Krugelis⁽⁴⁾ sugli anfibî hanno messo in evidenza interessanti dati sopra la distribuzione dell'attività fosfatasica nelle varie regioni dell'embrione durante il suo sviluppo, rivelata per mezzo della tecnica istochimica di Gomori.

Per quanto concerne invece le variazioni quantitative dell'attività fosfatasica durante lo sviluppo embrionale, i dati di cui attualmente disponiamo sono ancora molto scarsi; si deve ricordare il lavoro di Gustafson e Hasselberg⁽⁵⁾ sul Riccio di mare, e in particolare quello accurato e preciso di Krugelis⁽⁶⁾, che ha studiato, oltre alle variazioni quantitative della fosfatasi alcalina durante lo sviluppo di *Xenopus laevis* e *Amblystoma mexicanum*, anche alcune proprietà della fosfatasi, come l'influenza del pH, della concentrazione del substrato, della concentrazione dell'enzima, ecc., mediante un nuovo procedimento micro. È risultato che l'attività fosfatasica aumenta rapidamente a partire dallo stadio di neurula durante lo sviluppo di ambedue le specie di Anfibi (studiati fino allo sgusciamiento) e che nella gastrula le regioni animali presentano un'attività fosfatasica assai maggiore di quelle vegetative.

Le presenti ricerche trattano delle variazioni quantitative dell'attività fosfatasica alcalina di uova, embrioni e larve di *Rana esculenta*, nel corso dello sviluppo, con particolare riferimento agli stadi di sviluppo più giovani; si è trattato cioè di vedere se esistono variazioni dell'attività fosfatasica in rapporto a certi periodi morfogenetici caratteristici del primo sviluppo, dalla segmentazione cioè fino alla neurula; Krugelis⁽⁷⁾ ha constatato solo una attività enzimatica assai bassa, senza però riscontrare variazioni rilevabili; la

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata dell'Università di Bologna.

(**) Pervenuta all'Accademia il 12 agosto 1952.

(1) F. MOOG, *Localisation of alkaline and acide phosphatases in the early embryogenesis of the chick*. « Biol. Bull. », 86, 51 (1944).

(2) J. BRACHET, *Localisation de la phosphatase alcaline pendant le développement des batraciens*. « Experientia », 2, 4 (1946).

(3) F. MOYSON, *La phosphatase alcaline au cours du développement chez Rana temporaria et au cours des phénomènes de cicatrization et de régénération*. « Ann. Soc. Roy. Zool. Belg. », 77, 68 (1936).

(4) E. J. KRUGELIS, *Alkaline phosphatase activity in early development of amphibians*. « Biol. Bull. », 93, 215 (1947).

(5) T. GUSTAFSON, I. HASSELBERG, *Alkaline phosphatase activity in developing sea urchin eggs*. « Exper. Cell. Res. », 1, 371 (1950).

(6) E. J. KRUGELIS, *Properties and changes of alkaline phosphatase activity during amphibian development*. « C. R. Lab. Carlsberg », sér. chim., 27, 273 (1950).

(7) E. J. KRUGELIS, vedi nota 6.

stessa A. ha bensì osservato in certi momenti del differenziamento (bottone codale avanzato di 140 ore di *Amblystoma mexicanum* e di 44 ore di *Xenopus*) una deviazione della curva, tuttavia avanza delle riserve sopra la reale sussistenza di tali deviazioni.

TABELLA I.

N.	Stadio	I ^a serie	II ^a serie	III ^a serie	IV ^a serie
1	8 blastomeri	(0,11)	—	—	—
2	32 blastomeri	(2,40)	—	—	—
3	64 blastomeri	1,50	1,43	—	—
4	Morula	1,80	1,66	1,73	(3,86)
5	Blastula incipiente	(1,13)	—	—	—
6	Blastula	0,27	0,53	0,76	—
7	Blastula avanzata	(0,17)	—	—	—
8	Gastrula incipiente	—	1,06	1,16	(1,10)
9	Gastrula avanzata (tappo vitell. grande) . .	2,0	1,73	1,86	—
10	Gastrula verso il termine (tappo vitell. piccolo)	—	—	(2,83)	(3,26)
11	Neurula incipiente	—	0,93	0,73	—
12	Neurula (cercini sollevati)	—	—	(1,76)	(2,59)
13	Neurula avanzata (cercini in chiusura) . .	1,46	1,66	—	—
14	Bottone codale	2,56	—	2,89	—
15	Prime contrazioni musc. (stadio 18 Rugh) .	—	3,86	5,72	(6,19)
16	Battito cardiaco (stadio 19 Rugh)	4,49	5,59	—	(8,12)
17	Larvette natanti con circolazione nella pinna (stadio 22 Rugh)	6,91	7,46	—	—
18	Branchie in ricoprimento (stadio 23 Rugh) .	13,46	15,05	17,25	—
19	Girino differenziato	25,67	—	28,57	—
20	Girino differenziato (un giorno dopo rispetto al precedente)	34,16	—	44,49	—

I numeri fra parentesi si riferiscono a determinazioni eseguite su stadi di una sola serie, quindi non confermati da determinazioni analoghe sulle altre serie; di essi pertanto non è tenuto conto nei grafici, in cui la curva è calcolata in base ai valori medi delle prime tre serie. La IV^a serie contiene i valori di determinazioni su un lotto di embrioni, le cui dimensioni erano però sensibilmente superiori a quelli delle altre tre serie; pur notandosi anche in questa serie una variazione dei valori molto simile a quella delle prime tre serie, per i valori sensibilmente superiori delle determinazioni e per la scarsità del numero di determinazioni non si è tenuto conto neppure di questa serie nel grafico.

Per il fine proposto, sono state sottoposte al controllo solo le uova provenienti da una unica deposizione: il lotto prescelto veniva allevato in cristallizzatori di vetro con acqua corrente, e a determinati intervalli di tempo (in riferimento agli stadi di sviluppo raggiunti) venivano prelevati 20 embrioni, liberati degli involucri e saggianti per l'attività fosfatasica.

La tecnica usata è stata la seguente: rapida omogeneizzazione delle uova o embrioni o girini in omogeneizzatore di vetro, aggiunta di 10 cc. di acqua distillata e centrifugazione per 10 minuti; al supernatante limpido, trasferito in un palloncino, si aggiungono acqua distillata fino a portare a cc. 24, indi 9 cc. di tampone al veronal e 7 cc. di soluzione substrato (0,1 M di glicerofosfato di Na); digestione a 37° per 4 ore, arresto della digestione immergendo i palloncini in acqua ghiacciata, precipitazione con acido tricloroacetico 10 % e determinazione del P secondo Fiske e Subbarow contro una soluzione in bianco (tutti i reattivi meno l'estratto di embrioni) col colorimetro fotoelettrico Klett Summerson.

Dispongo di 4 serie di determinazioni, ciascuna riferentesi a vari stadi di sviluppo di uno stesso lotto di uova di *Rana esculenta*, a partire dai primi stadi della segmentazione fino allo stadio di girino. La prima e seconda serie comprendono determinazioni eseguite su gruppi di 20 uova o girini ciascuno, private degli involucri compresa la membrana vitellina; nella terza serie, pure a gruppi di 20 uova, gli stadi più giovani (segmentazione, blastula, gastrula e neurula incipiente) furono liberati solo degli involucri gelatinosi esterni, lasciando intatta la membrana vitellina. Nella quarta serie fu determinata l'attività fosfatasica di gruppi di 50 uova o embrioni; quest'ultima serie di determinazioni si arresta poco dopo la neurula, perchè i valori del P ottenuti in seguito erano superiori al limite di sensibilità del colorimetro.

I valori riscontrati sono riportati nella tabella I, riferiti agli stadi singoli di sviluppo; non ho tenuto conto, nella tabella, del tempo di sviluppo in ore, perchè le quattro serie sono state eseguite in epoche diverse, con temperature ambientali variabili, per cui ciascuna presenta un ritmo proprio di sviluppo; mi è sembrato più consigliabile, pertanto, raccogliere i dati, per il confronto, in una unica tabella, riferendoli agli stadi di sviluppo raggiunti. Nella fig. 1 sono riportati i valori delle 4 serie dalla segmentazione a girino; dato che la IV serie comprende poche determinazioni eseguite su un lotto di embrioni di *Rana esculenta* di dimensioni più grandi delle altre tre, pur notandosi anche in queste serie variazioni simili a quelle delle altre, non si è tenuto conto, nella curva dei valori medi, di questa serie, come pure di quei valori delle prime tre serie, riferentesi a una sola determinazione per stadio (numeri fra parentesi nella tabella I, segni con circoletti tratteggiati nei grafici). La curva cioè è ricavata dalle medie di almeno due valori delle prime tre serie separatamente per ciascun stadio. Nelle ascisse i numeri corrispondono agli stadi di sviluppo della tabella I, senza riguardo al tempo, trattandosi di 4 serie indipendenti eseguite in epoche diverse, e quindi con un ritmo di sviluppo diverso; nelle ordinate sono riportati i μg di P liberati per embrione. Nella fig. 2 è riportato l'andamento della curva della fig. 1, in scala maggiore, dallo stadio 3 allo stadio 15.

La curva della fig. 1 dimostra che l'attività fosfatasica alcalina risulta di valori molto modesti negli stadi embrionali giovani, cioè segmentazione, blastula, gastrula e neurula, mentre in seguito, cioè dalla fine della neurulazione in avanti, subiscono un forte incremento, che permane fino agli stadi di girino già differenziato; non dispongo di ulteriori determinazioni a partire da questi ultimi stadi, per cui non posso dire se a partire da un determinato

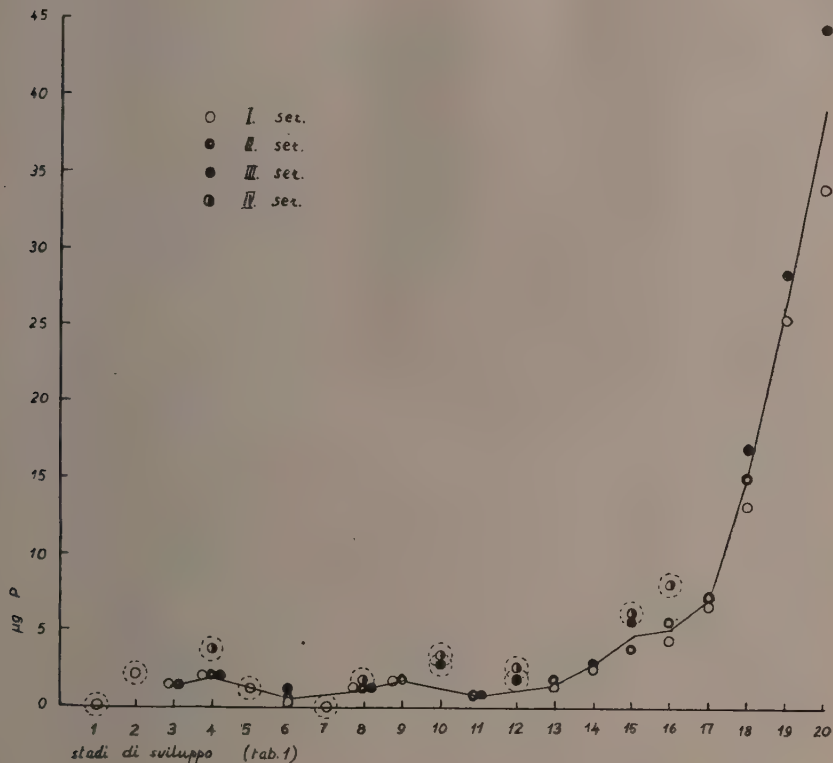


Fig. 1.

momento i valori restino stazionari; sono in corso ricerche in questo senso, come pure sopra le eventuali variazioni durante la metamorfosi.

Nel complesso, quindi, i risultati ottenuti si accordano bene con quelli precedenti di Krugelis⁽⁸⁾ su *Amblystoma* e *Xenopus*.

Più interessante è la curva della fig. 2, che dimostra un aumento dell'attività fosfatasica durante la segmentazione, una notevole riduzione durante la blastulazione, un nuovo incremento durante la gastrulazione e una successiva riduzione alla fine della gastrulazione e durante la neurulazione; dalla

(8) E. J. KRUGELIS, loc. cit.

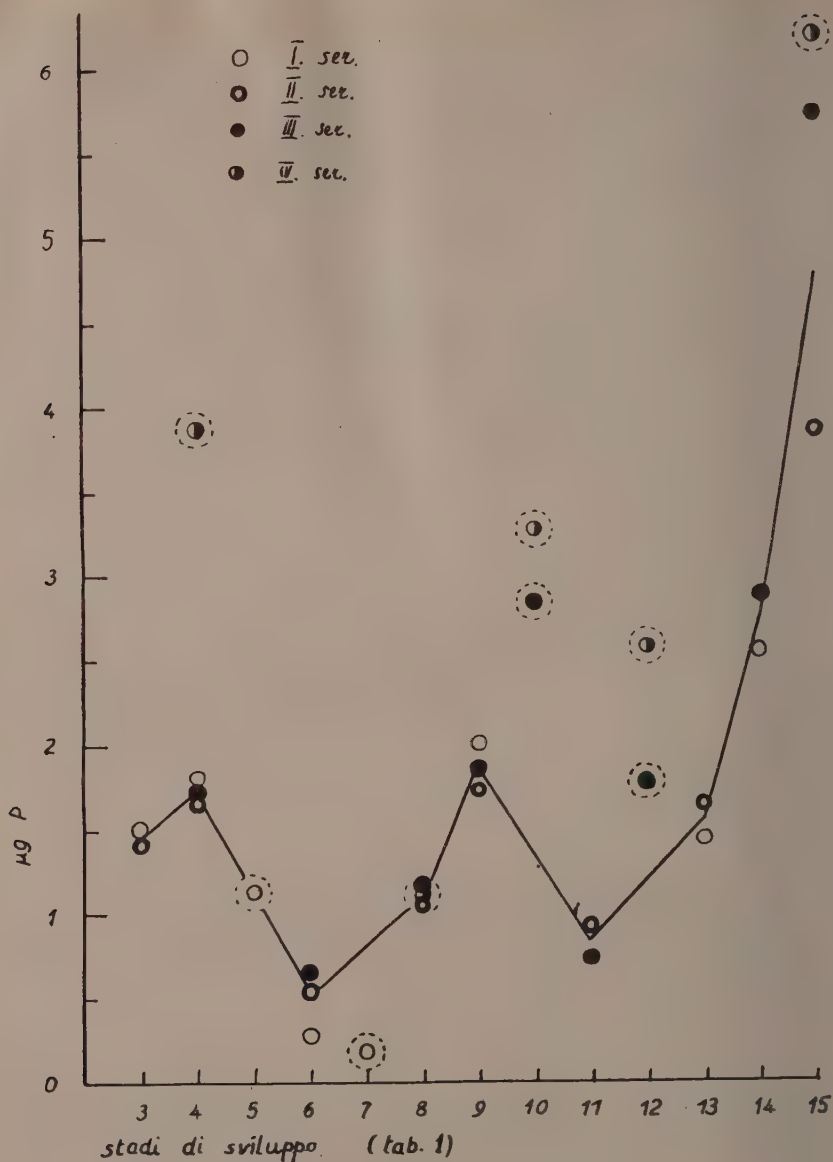


Fig. 2.

fine della neurulazione in avanti notiamo un imponente aumento dell'attività fosfataseica, rappresentato alla fig. 1.

Ritengo che la coincidenza di valori massimi e minimi nella tabella I, ricavate ciascuna in base a determinazioni su quattro serie indipendenti, si possa difficilmente ascrivere al caso, e sarei pertanto dell'avviso di attribuire ad essi

un valore concreto. Esisterebbero cioè due periodi di alta attività fosfatasica (alta in senso relativo) durante la segmentazione e la gastrulazione, e due periodi di bassa attività, in coincidenza della blastulazione e della neurulazione. Per il momento non dispongo di dati sufficienti per dare una adeguata interpretazione di questi risultati. È interessante comunque notare che Gustafson e Hasselberg⁽⁹⁾, studiando l'attività fosfatasica durante lo sviluppo del Riccio di mare, hanno osservato un rapido aumento di questa dopo la comparsa delle cellule della mesenchima primario, e Ghiretti⁽¹⁰⁾ ha osservato un aumento dell'attività fosfatasica durante il periodo della determinazione del blastema rigenerativo in *Triton*.

Biologia. — *Effetti del digiuno sul sistema nervoso ed in particolare sul neurone di Mauthner di Anfibi Anuri*^(*). Nota di GIORGIO M. BAFFONI, presentata^(**) dal Socio G. COTRONEI.

In precedenti ricerche su speciali neuroni, definiti da Stefanelli⁽¹⁾ «a ciclo larvale» (cellule di Mauthner di Anfibi Anuri), ho osservato (Baffoni e Catte⁽²⁾) che il loro processo fisiologico di involuzione è caratterizzato dall'atrofia cellulare e da un particolare quadro cromatolisico (cromatolisi periferica); il fenomeno è stato riscontrato anche quando l'involuzione viene anticipata ed accelerata (in seguito a somministrazione di estratti tiroidei - Baffoni e Catte⁽³⁾). Atrofia ed aspetti di incipiente cromatolisi periferica, inoltre, sono stati da me descritti nel neurone mauthneriano dopo il taglio dell'assone, ma in assenza di fenomeni rigenerativi (larve di Anfibi Anuri - Baffoni⁽⁴⁾).

Ho ritenuto di un certo interesse eseguire esperienze di inanizione su larve di Anfibi Anuri allo scopo di osservare se il tessuto nervoso, ed in particolare il neurone di Mauthner, reagiscano al digiuno dell'organismo, e di individuare gli eventuali rapporti tra le modificazioni descritte e quelle causate dal digiuno nel neurone.

In proposito ricordo che, per quanto numerose ricerche ponderali e macroscopiche abbiano dimostrato che il tessuto nervoso è poco interessato al digiuno (Harms 1909, Morgulis 1911, Jackson 1915, Stewart 1918, Guastalla

(9) GUSTAFSON e HASSELBERG, loc. cit.

(10) F. GHIRETTI, *On the activity of acid- and alkaline phosphatase during Tail Regeneration in Triturus cristatus* » (Laur.). « *Experientia* », 6, 98 (1950).

(*) Ricerca eseguita nel Laboratorio di Istologia ed Embriologia della Facoltà di Scienze dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta dell'8 novembre 1952.

(1) AL. STEFANELLI, « *Rend. Acc. Naz. Lincei* » (VIII), 10^o, p. 159 (1951).

(2) G. M. BAFFONI e G. CATTE, « *Rivista di Biologia* », 43^o, p. 373 (1951).

(3) G. M. BAFFONI e G. CATTE, « *Rend. Acc. Naz. Lincei* » (VIII), 9^o, p. 282 (1950).

(4) G. M. BAFFONI, « *Rend. Acc. Naz. Lincei* » (VIII), 12^o, p. 189 (1952).

e Rigoletti 1935, ecc.⁽⁵⁾), le osservazioni microscopiche non sono molto concordi.

Gli studi sull' inanizione fisiologica (in animali ibernanti) hanno riscontrato nessun effetto nel peso del sistema nervoso (Donaldson 1911, Ott 1924) e lievi alterazioni negli elementi cellulari: oltre a modificazioni della struttura colloidale del neuroplasma (Legge 1899, Tello 1903, Cajal 1904, Donaggio 1906, Dustin 1906, Gurewitsch 1908, Zalla 1910, ecc.), in certi casi non è stato notato alcun effetto (Levi 1898, Zalla 1910, Sallwood e Rogus 1914, Rassmussen e Myers 1916), in altri invece, è stata osservata una diminuzione di sostanza basofila (Levi 1898, Legge 1899, Baroncini e Beretta 1900, Marinesco 1905, Zalla 1910, ecc.).

Ancor più incostanti sono i risultati delle esperienze di inanizione sperimentale (in animali tenuti a digiuno). A parte le osservazioni dei primi ricercatori, riferite ad aspetti degenerativi del neuroplasma (steatosi: Parrot 1868, Filipi 1885; vacuolizzazione: Mankowschi 1882, Rosenbach 1883; degenerazione granulosa Ochotin 1886, Popow 1888; degenerazione ialina⁽⁶⁾, ecc.), col migliorare delle tecniche istologiche e col progredire delle cognizioni i risultati non sono divenuti più uniformi. Secondo Marchand e Vurpas⁽⁷⁾ le modificazioni del neurone di un animale a digiuno consistono: in un primo tempo nella diminuzione della sostanza basofila e, in un secondo tempo, nell'atrofia del neurone (pirenoforo, nucleo e nucleolo - Downerowitsch 1892, Barrow 1898) e nella cromatolisi (Manchowschi 1882, Placzek 1899, Statkewitsch 1894, Mourre 1904, Gurewitsch 1908, ecc.). Però, benché l'atrofia cellulare sia stata osservata da numerosi ricercatori (Coen 1900, Peri 1902, Myers 1917, ecc.) essa è stata negata da altri (Monti 1895, Ganfini 1897, Martinotti e Tirelli 1900); così pure le modificazioni cromatolistiche sono state negate da alcuni (Jacobsen 1897, Martinotti e Tirelli 1900) o sono state interpretate diversamente: mentre infatti Schäffer (1897) descrive cromatolisi perinucleare, la maggior parte degli Autori parlano di cromatolisi diffusa e Lugaro e Chiozzi (1897), invece, anche di cromatolisi periferica. Tutte queste disparità di vedute possono essere imputate alle diverse modalità delle esperienze (diversità degli animali in esperimento, dei centri nervosi presi in esame, della durata del trattamento, della tecnica istologica impiegata, ecc.); ma purtroppo, non essendo sempre possibile individuarle, il quadro delle nostre cognizioni in proposito non è molto chiaro. Risulta comunque che negli animali a digiuno (sia fisiologico che sperimentale) gli effetti diversificano con l'affinità zoologica, gli animali eterotermi risultando più resistenti al trattamento che gli omeotermi (Levi, Riva, Zalla⁽⁸⁾); e inoltre

(5) Ved. Bibl. in: C. M. JACKSON, *The effects of Inanition and Malnutrition upon Growth and Structure* (London 1925), e S. MORGULIS, *Fasting und Undernutrition* (New York 1923).

(6) Ved.: A. PERI, « Arch. Ital. de Biol. », 18°, p. 193 (1893).

(7) L. MARCHAND e C. VURPAS, « C. R. Soc. Biol. », 58°, p. 296 (1901).

(8) G. LEVI, « Riv. Patol. nerv. ment. », 3°, p. 443 (1898); E. RIVA, « Arch. Ital. de Biol. », 46°, p. 437 (1905); M. ZALLA, « Riv. Patol. nerv. ment. », 15°, p. 211 (1910).

che i vari centri nervosi di uno stesso animale (Daddi 1889, Ganfini 1897, Lugaro e Chiozzi 1897, Barrow 1898, Puglisi e Allegra 1900, Donaldson e Nagasaka 1918, Ferraro e Roizin 1941⁽⁹⁾) e gli stessi elementi di un centro nervoso (Luria⁽¹⁰⁾) reagiscono diversamente.

Perciò ho ritenuto interessante eseguire lo studio sugli effetti dell'inanizione totale e prolungata su larve di Anfibi Anuri (animali eterotermi) e di fermare la mia attenzione su un singolo e tipico elemento nervoso, qual'è il neurone di Mauthner che, date le sue peculiarità, è risultato il materiale più appropriato per la soluzione di numerosi problemi di neurologia, come lo dimostrano i risultati che da anni si stanno ottenendo nel nostro Laboratorio da Stefanelli e collaboratori⁽¹¹⁾.

Da uova di una stessa femmina di *Hyla arborea Savignyi*, ho separato quattro lotti di embrioni, allevandone pochi per ogni lotto (15 individui) in grossi cristallizzatori onde evitare i fenomeni di affollamento; due lotti sono stati tenuti a digiuno e due copiosamente nutriti (culture di fitoflagellati, di alghe e polvere di tuorlo d'uovo sodo); tutti i lotti sono stati mantenuti nelle stesse condizioni ambientali (temperatura, luce, quantità del mezzo, ecc.); l'acqua è stata rinnovata ogni due giorni e filtrata in candela per i lotti a digiuno. Per l'allestimento dei preparati istologici ho utilizzato gli animali di due lotti (uno a digiuno ed uno di controllo) in cui non ho riscontrato alcun decesso; essi sono stati sacrificati dopo venti giorni dalla deposizione, poiché a tal periodo in altri lotti si sono manifestate le più profonde modificazioni del digiuno. Di ogni lotto 10 animali sono stati fissati in Bouin e le sezioni, tagliate in serie trasversali (10 μ di spessore), sono state trattate secondo il metodo di Bodian o colorate con ematossilina ferrica; gli altri 5 animali, invece, sono stati fissati in Helly e le sezioni seriali di (6 μ), colorate secondo il metodo di Nissl al bleu di toluidina. Tempi di fissazione, di inclusione, di colorazione e di differenziamento degli animali a digiuno e dei controlli sono stati eguali.

Tutti i girini a digiuno al momento della fissazione (a 20 giorni di sviluppo) hanno lo stesso aspetto; essi si presentano molto dissimili rispetto agli animali alimentati: questi misurano in media 14,5 mm. di lunghezza (5,5 mm. di corpo e 9 mm. di coda) e mm. 3,5 di lunghezza e di altezza, mentre quelli a digiuno sono più corti (mm. 10 ca.: mm. 3,25 di corpo e mm. 6,5 di coda), ma specialmente più stretti (mm. 1,7) e più bassi (mm. 1,6). Il corpo degli animali a digiuno è più pigmentato ed angoloso; in capo è relativamente sviluppato; gli occhi sono più piccoli e sembrano spostati indietro: in effetti si tratta della marcata riduzione degli organi addominali rispetto al resto del corpo: infatti mentre il volume totale medio degli animali

(9) Ved.: E. LUGARO e L. CHIOZZI, «Riv. Patol. nerv. ment.», 2^o, p. 394 (1897); C. GANFINI, «Monit. Zool. Ital.», 8^o, p. 221 (1897); A. FERRARO e L. ROIZIN, «Journ. Neuropath. experim. Neurol.», 1^o, p. 81 (1941).

(10) S. LURIA, «Zeitschr. Zellforsch. mikr. Anat.», 22^o, p. 724 (1935).

(11) Ved.: AL. STEFANELLI, «Mem. Acc. Naz. Lincei» (VIII), 1^o, p. 27 (1947); «La Ricerca Scientifica», 20^o, p. 609 (1950); «Quart. Rev. Biol.», 26^o, p. 17 (1951).

alimentati è pari a 40 mm^3 e quello degli animali a digiuno a $6,2 \text{ mm}^3$, in questi il volume della porzione addominale è il 5 % dei controlli, quello della porzione cefalica è il 25 % e quello della coda è il 40 %.

Il sistema nervoso degli animali a digiuno non è molto atrofizzato: la lunghezza dell'encefalo (lobi olfattori-calamo) è solo il 70 % di quella dei controlli. Per quanto i rapporti avuti dalle misurazioni di vari segmenti dell'encefalo (porzione pre- e cordale; parte olfattoria, diencefalo-mesencefalica, metencefalo-rombencefalica) degli animali a digiuno non siano risultate sensibilmente diverse da quelle degli animali alimentati, le strutture delle vescicole encefaliche e di quelle sensoriali (olfattorie, ottiche ed otiche) si presentano meno differenziate negli animali digiuni e rassomigliano a quelle di larve più giovani (di 14 giorni di sviluppo); a tal proposito ricordo che il trattamento cui sono stati sottoposti gli animali nei miei esperimenti, è iniziato molto presto, al termine del riassorbimento del tuorlo (dopo 7-8 giorni di sviluppo), quando la morfogenesi è ancora in piena attività, ed è noto che il digiuno in animali giovani provoca ritardi (o arresti) di sviluppo in diversi organi (Aron 1917, Stewart 1918, Davidson 1919, Jackson 1932, Luria 1935, Guastalla e Rigolletti 1935, ecc. ⁽³⁾); le mie osservazioni, pertanto, dimostrano che il digiuno provoca ritardi (o arresti) di sviluppo anche nel sistema nervoso centrale di larve di Anfibi. Altre modificazioni, inoltre, che non possono essere interpretate come arresti di sviluppo, le ho osservate nelle varie parti dell'encefalo: accenno alla conformazione dei ventricoli cerebrali degli animali a digiuno, che è alta e stretta, sia nei confronti di quella degli animali alimentati di pari età (20 giorni) che di pari dimensioni (di 7 giorni di sviluppo), ed all'aspetto delle vescicole, in cui ho notato una marcata riduzione della sostanza bianca. La struttura del rombencefalo risulta simile a quella precedentemente descritta negli animali trattati con ormone tiroideo (Baffoni e Catte ⁽²⁾); ad un più attento esame, però, tale similitudine risulta dovuta a *disarmonie* di natura diversa; negli animali trattati con ormone esse sono provocate dall'anticipazione dei fenomeni involutivi ed evolutivi dei centri rispettivamente della vita acquatica e della vita terrestre, in quelli a digiuno, invece, dall'asincronia dei ritardi di sviluppo e dei fenomeni involutivi dei vari centri e della sostanza bianca: nei girini tenuti a digiuno, infatti, i centri della linea laterale non sono atrofizzati, né si presentano differenziati quelli propri della vita terrestre. Negli animali digiuni *disarmonie* ancor più evidenti, inoltre, sono state riscontrate nel midollo spinale, in cui la sostanza grigia è distribuita difformemente dai controlli (di pari età o dimensioni) e dagli animali trattati con tiroide: in sezione essa è relativamente atrofizzata dorsalmente, ma rimane molto sviluppata anteriormente (figg. 1 e 2), specie in corrispondenza delle radici motorie: ciò avviene perché i neuroni motori delle corna anteriori, rispetto agli altri elementi del midollo spinale, sono poco o punto atrofizzati, essi anzi conservano intatte le loro strutture basofile: l'insensibilità dei neuroni motori al digiuno spiega perché alcuni Autori, sperimentando su di essi, abbiano avuto risultati negativi (Jacobsen 1897, Martinotti e Tirelli 1900) e perché le ricerche fisiologiche sulla motilità

durante l'inanizione sono risultate negative ed i disturbi che le avevano motivate sono stati attribuiti all'involutione della muscolatura (ved. in Keys, Brozek, ecc. ⁽¹²⁾).

La cellula di Mauthner degli animali a digiuno ricorda per il suo aspetto quella di girini di 10-12 giorni di sviluppo; tale rassomiglianza può essere indice di arresto di sviluppo, però il pirenoforo mauthneriano degli animali digiuni è più stretto (14μ di spessore in media) di quello dei girini di 12 giorni (19μ di spessore); ciò dimostra un avvenuto processo involutivo; naturalmente differenze maggiori, e statisticamente significative ($t < P \cdot 0,01$), sono risultate dal confronto tra le dimensioni delle cellule di Mauthner degli animali digiuni ($53 \pm 4,5 \mu$ di lunghezza media e $14 \pm 1,5 \mu$ di spessore) e quelle degli animali alimentati di controllo ($100 \pm 5,8 \mu \times 21,5 \pm 1,8 \mu$); tali differenze, oltre agli effetti propri dell'inanizione, sono dovute alla diversità di mole somatica tra animali alimentati e quelli digiuni; è noto infatti che in animali a pari stadio di sviluppo, ma di taglia diversa, le cellule di Mauthner (esperienze su lotti affollati di Stefanelli ⁽⁵⁾) ed i neuroni in genere (Levi, Terni, Stefanelli, Luria, Olivo, ecc. ⁽¹³⁾) hanno lo stesso grado di differenziamento, ma le loro dimensioni sono funzione della mole somatica dell'organismo.

Il nucleo delle cellule di Mauthner di larve digiune è più piccolo ($11,5 \pm \pm 0,3 \mu$ di diametro in media) sia di quello dei controlli a pari età ($11,2 \pm \pm 1 \mu$ di diametro) che dei controlli di 12 giorni ($13,8 \pm \pm 1,3 \mu$ di diametro); l'atrofia del nucleo però, risulta minore di quella subita dal neuroplasma: il rapporto nucleo-plasmatico, infatti, che negli animali alimentati di 20 giorni è pari a 6 ed in quelli di 12 giorni è 9,5, negli animali digiuni sale a 14; ciò dimostra che nel neurone mauthneriano il nucleo è più insensibile del citoplasma alle variazioni volumetriche; il fenomeno si verifica anche nei processi involutivi da me precedentemente descritti (Baffoni ^(2,3,4)) e nei processi reattivi, durante l'ipertrofia del neurone, nel qual caso esso è attestato dalla diminuzione del rapporto N/P (Baffoni ⁽¹⁴⁾); analoghe osservazioni, inoltre, sono state fatte negli elementi cellulari di altri tessuti in animali a digiuno (Morgulis ⁽¹⁵⁾, D'Ancona ⁽¹⁶⁾, Gambaro ⁽¹⁷⁾, Langerstedt ⁽¹⁸⁾), per cui sembra che il fenomeno abbia un valore generale. Il rapporto tra l'area delle sezioni dei pirenofori mauthneriani e quella del rombencefalo (all'altezza delle cellule di Mauthner) negli animali alimentati risulta pari a $1/23$, in quelli digiuni diminuisce ed è simile a quello degli animali di 12 giorni ($= 1/32$); data la notevole atrofia che il neurone di Mauthner subisce, anche rispetto

(12) A. KEYS, J. BROZEK, O. HENSCHER e H. L. TAYLOR, *The Biology of human Starvation* (Minneapolis 1950).

(13) Ved.: G. LEVI, *Accrescimento e senescenza* (Firenze 1946).

(14) G. M. BAFFONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (VIII), 10^o, p. 319 (1951).

(15) S. MORGULIS, « Arch. Etw.-mech. Organ. », 32^o, p. 169 (1911).

(16) U. D'ANCONA, « Am. Journ. Anat. », 39^o (1927).

(17) P. GAMBARO, « Arch. Ital. Anat. Embriol. », 49^o, p. 327 (1943).

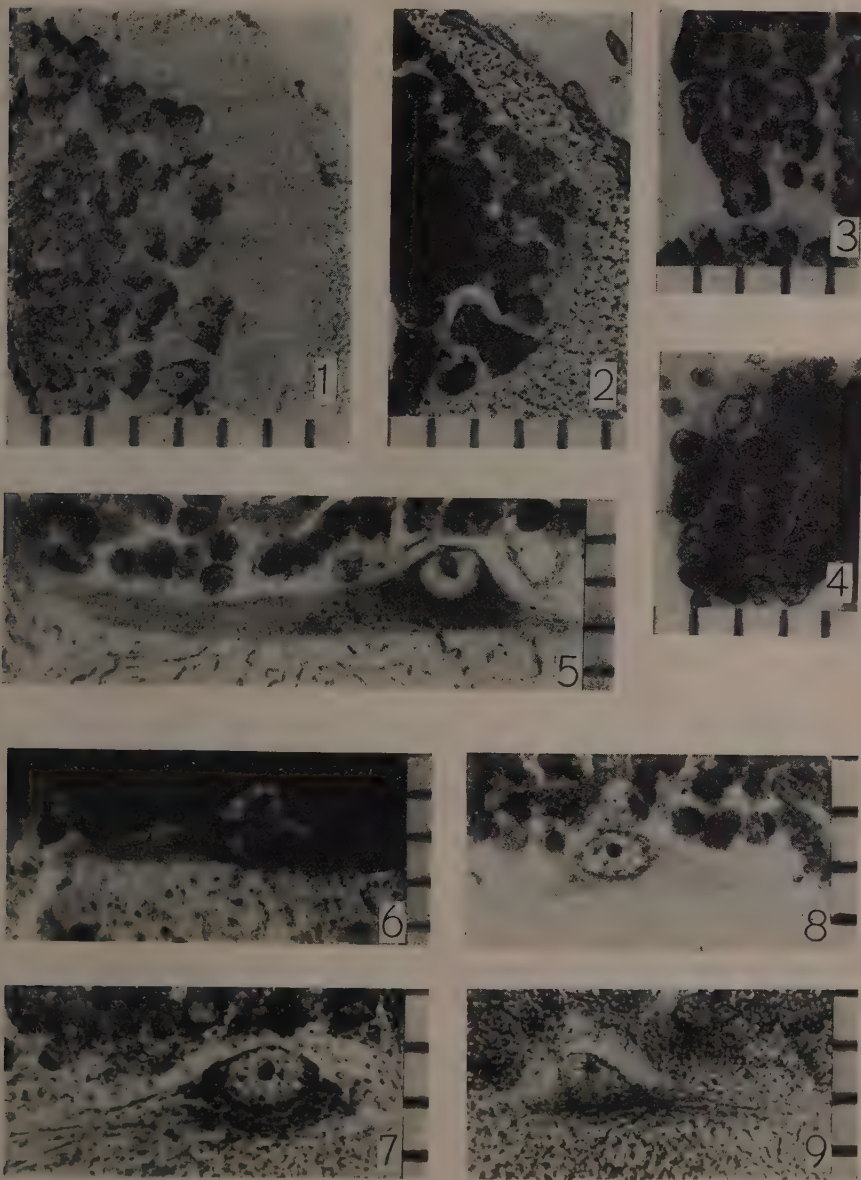
(18) S. LANGERSTEDT, « Acta Anat. », 7^o, Suppl. IX (1949).

ai girini di 12 giorni, tale differenza indica una cospicua riduzione del midollo allungato, e poiché in questo la sostanza grigia appare meglio conservata, la riduzione va riferita a una marcata atrofia della sostanza bianca. La fibra di Mauthner degli animali a digiuno ha un diametro circa la metà di quella degli animali alimentati; al livello del calamo essa misura in questi $6,7 \mu$ ed in quelli 3μ di spessore; e poiché le fibre di Mauthner dei girini di 12 giorni hanno uno spessore maggiore (4μ) che in quelli digiuni, è evidente che in questi anche la fibra di Mauthner ha subito un processo di involuzione vero e proprio.

Il citoplasma delle cellule di Mauthner degli animali digiuni nei preparati trattati col metodo di Bodian è attraversato da neurofibrille più grosse e rade che nei controlli (figg. 5 e 6); nei preparati colorati con la toluidina talora la sostanza basofila manca affatto, ma tal'altra si distinguono alcune zolle di tigroide attorno al nucleo, come avviene al termine della cromatolisi periferica (figg. 7 e 9); anche preparati colorati con ematossilina ferrica hanno offerto simili quadri (fig. 8) così che si può ritenere accertato che il quadro cromatolisisco delle cellule di Mauthner di animali a digiuno è quello della cromatolisi periferica. Nelle cellule di Mauthner di animali digiuni, anche quando la sostanza basofila è completamente scomparsa, non ho riscontrato tracce di pigmento, né vacuoli.

Atrofia e cromatolisi periferica non caratterizzano soltanto il processo involutivo del neurone mauthneriano; ho infatti osservato atrofia e cromatolisi totale in elementi gangliari (figg. 3, 4); atrofia meno accentuata e cromatolisi periferica in elementi giganti del tegmento, in quelli di centri rombencefalici ed in molti neuroni delle corna posteriori del midollo spinale (figg. 1 e 2).

Il nucleo della cellula di Mauthner oltre a ridursi, si presenta meno colorato e più vescicoloso negli animali digiuni che in quelli alimentati; la più appariscente modificazione, però, concerne il nucleolo: negli animali a digiuno esso è molto ridotto (50 % in volume) e molto meno colorato con la toluidina che negli animali alimentati; presso al nucleolo in quelli, a differenza di questi, non appare più traccia del cromocentro. Le modificazioni della sostanza basofila nel citoplasma e nel nucleo delle cellule di Mauthner dei girini digiuni trovano un esatto riscontro con quelle messe in evidenza con metodi specifici nelle cellule epatiche di ratti a digiuno (Langerstedt⁽¹⁸⁾), e come queste vanno perciò riferite al blocco delle sintesi proteiche, provocato dal limitato (o mancato) apporto nutritizio; unica differenza è la maggior durata per mettere in evidenza tali modificazioni: essa è dovuta in parte alla notevole resistenza all'inanizione degli animali eterotermi (Levi, Riva, Zalla), ma specialmente a quella delle cellule nervose; d'altra parte la maggior durata, e quindi la lentezza del fenomeno involutivo, mi ha reso possibile precisare il quadro cromatolisisco nel neurone mauthneriano; se infatti il processo involutivo fosse stato più veloce, la rapida disgregazione delle zolle di tigroide avrebbe simulato quadri di cromatolisi diffusa.



Figg. 1 e 2. - Midollo spinale di larve di *Hyla* di 20 giorni, al livello della prima radice spinale, in animali alimentati (1) ed a digiuno (2) (Bleu di toluidina). - Figg. 3 e 4. - Ganglio cervicale superiore di girini alimentati (3) e digiuni (4) (Emat. ferrica). - Figg. 5 e 6. - Neurofibrillazione in cellule di Mauthner di animali alimentati (5) e digiuni (6) (Metodo di Bodian). - Figg. 7 e 9. - Sostanza basofila di neuroni mauthneriani in animali alimentati (7) ed a digiuno (9) (Metodo di Nissl al bleu di toluidina). - Fig. 8. - Pirenoforo di Mauthner di animali digiuni (Emat. ferrica).

(Ogni intervallo delle scale = 10 μ).

In base ai precedenti che hanno motivato la presente ricerca, si può ritenere accertato che atrofia e cromatolisi periferica caratterizzano i processi involutivi del neurone mauthneriano e di altri neuroni. Atrofia e cromatolisi, però, non presentano in tutti i casi lo stesso decorso: nel neurone mauthneriano di Anfibi Anuri trattati con tiroide sono rapidissime (Baffoni e Catte⁽³⁾), meno rapide durante l'involuzione fisiologica (dopo la normale metamorfosi - Baffoni e Catte⁽²⁾), sono lente in queste esperienze di digiuno ed appena accennate quando l'attività del neurone è compromessa (mancata rigenerazione dell'assone - Baffoni⁽⁴⁾); inoltre nei primi due casi la sostanza basofila scompare relativamente tardi (quando l'atrofia è molto avanzata), negli altri due le sue modificazioni precedono l'ipotrofia cellulare; in quelli il fenomeno va attribuito prevalentemente all'azione di ormoni; in questi, invece, prevalentemente alle modificazioni dell'attività metabolica del neurone.

Sarebbe interessante conoscere se, come sembra, l'atrofia e la cromatolisi periferica siano espressione di fenomeni irreversibili del neurone o fino a quale stadio esse lo siano; ciò sarà dimostrato da esperienze in corso sull'azione di sostanze antitiroidee in animali trattati con tiroxina e sugli effetti della rialimentazione in larve digiune.

In conclusione: larve di Anfibi Anuri tenute dal termine del riassorbimento del vitello a digiuno prolungato e totale, presentano notevoli modificazioni di forma, dovute alla diversa suscettibilità dei vari organi all'inanizione.

Il sistema nervoso centrale degli animali digiuni, per quanto di dimensioni poco ridotte, presenta evidenti disarmonie provocate dall'asincronia dei vari centri nervosi agli arresti di sviluppo ed ai processi involutivi. L'inanizione dell'organismo agisce su uno specifico neurone (cellula di Mauthner) arrestando il suo sviluppo e atrofizzandolo; l'atrofia del neurone (particolarmente evidente nello spessore del pirenoforo e del neurite) si accompagna a un costante quadro cromatolisisico (cromatolisi periferica); il nucleo si atrofizza, ma più tardivamente e lentamente del neuroplasma; notevolmente alterato e ridotto appare invece il nucleolo: ciò e le modificazioni della sostanza basofila denunciano il blocco delle sintesi proteiche nel neurone di animali digiuni. Le disarmonie dell'encefalo e le modificazioni involutive del neurone mauthneriano di animali digiuni sono risultate diverse da quelle riscontrate dopo la metamorfosi normale (involuzione fisiologica) o sperimentale accelerata e che sono provocate dall'azione di ormoni.

Biologia. — *La regione sacrale degli Anfibi Anuri. (Ricerche sperimentali)* ^(*). Nota di TEODORO PERRI, presentata ^(**) dal Socio G. COTRONEI.

In questa Nota, che fa seguito completandola ad una mia precedente ^(*) sullo stesso argomento, mi occupo delle connessioni, negli Anfibi Anuri, tra la regione sacrale e l'ileo, soprattutto del significato morfologico e funzionale del cosiddetto processo trasverso, o processo laterale, della vertebra sacrale, quale risulta da ricerche comparative, ecologiche e sperimentali.

Ho eseguito queste ricerche per vari motivi. Anzitutto vi fui spinto dall'aver avuto, nel corso di esperienze sull'induzione di arti soprannumerari negli Anuri, dei reperti che giudicai di notevole interesse per questo argomento; l'aver ottenuto reperti nuovi mi ha dato l'opportunità di rivedere, da un nuovo punto di vista, l'intero argomento, tanto più che sono non pochi i punti ancora oscuri. Questa regione ha una grandissima importanza comparata, ecologica, funzionale, essendo intimamente legata al modo di locomozione. Negli Anuri l'intera struttura dello scheletro assile e degli arti è profondamente diversa, e vi si accompagnano peculiarità nella muscolatura e nel sistema nervoso, da quella che si ha, ad esempio, negli Urodeli, e ciò è in relazione all'attitudine al salto. Le differenze più salienti consistono nell'aver gli Anuri gli arti posteriori lunghissimi, molto più che gli anteriori, con un autopodio che è il segmento più lungo dell'arto; nel cinto pelvico è caratteristica la notevolissima lunghezza dell'ileo; nella colonna vertebrale vi è di peculiare che la vertebra sacrale è sita nella metà anteriore del tronco. Sono tutte caratteristiche morfologiche che hanno un chiaro significato funzionale; mi limito a ricordare che gli arti posteriori lunghissimi e dotati di robusta muscolatura, permettono un forte slancio che viene trasmesso alla vertebra sacrale (onde la notevole robustezza di questa negli Anuri) che trovasi anteriormente al centro di gravità dell'animale, e così viene impedito che saltando esso cada sbattendo con il dorso. Un altro motivo per il quale ho eseguito questo lavoro è che lo studio attento di una regione della colonna vertebrale facilita l'indagine morfologica, e la valutazione funzionale, degli altri suoi segmenti; e perciò queste ricerche le ho eseguite non solo per sè stesse, ma anche per poi passare ad una revisione morfologica comparata, integrata con le metodiche sperimentali, dell'intero scheletro assile.

Ho anzitutto esaminato numerosi esemplari, larve o in metamorfosi, di *Bufo vulgaris* ⁽²⁾ per rendermi personalmente conto dello sviluppo normale

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata « B. Grassi » della Università di Roma.

(**) Nella seduta dell'8 novembre 1952.

(1) T. PERRI in questi « Rendiconti », ser. VIII, vol. XI, p. 223 (1951).

(2) È per condizioni secondarie che questa specie diviene, specie nella vita adulta, cattiva saltatrice, pur conservando il piano strutturale scheletrico proprio degli Anuri.

della vertebra sacrale. Premetto che la connessione tra la vertebra sacrale e l'ileo avviene mediante quella parte scheletrica che è chiamata indifferentemente processo trasverso o processo laterale, perchè concepito come un semplice accrescimento del processo trasverso esistente anche nelle vertebre precedenti. Lo chiamerò processo laterale, perchè quest'ultima denominazione non implica alcuna interpretazione del suo significato morfologico. Avverto che per chiarezza, anticipando le conclusioni del mio lavoro, distinguo nel processo laterale due parti: chiamo processo trasverso la sua parte basale che, come si vedrà, è la sola parte del processo laterale che effettivamente corrisponda al processo trasverso delle vertebre precedenti; chiamo costa sacrale, e ne dirò in seguito i motivi, la parte rimanente del processo laterale.

L'osservazione morfologica mostra che nella vertebra sacrale si ha dapprima un processo trasverso cartilagineo come o un po' più grande che nelle vertebre precedenti. Successivamente, quando l'ileo è molto vicino alla vertebra sacrale, dalle cellule mesenchimatiche costituenti un grosso cordone cellulare che va dal processo trasverso all'apice dell'ileo, si forma un blastema mesenchimatico che si addossa al processo trasverso. Questo blastema diviene poi gradualmente cartilagineo e si salda con il processo trasverso ⁽³⁾ e si costituisce in tal modo il processo laterale. Insisto sul fatto che in vari casi in metamorfosi si coglie una chiara distinzione tra il processo trasverso e il rimanente del processo laterale.

Queste osservazioni morfologiche inducono a ritenere ma non in maniera conclusiva, data la natura dei procedimenti descrittivi, che vi sia indipendenza tra il processo trasverso e il rimanente del processo laterale, e che non si tratti di un semplice accrescimento del primo. Vedremo in seguito altre ricerche (sperimentali) che documentano tale indipendenza.

Dobbiamo ora considerare i casi di mancanza, completa o incompleta, di un arto in seguito, soprattutto, ad ampia asportazione della zona dell'arto posteriore in embrioni di *Bufo vulgaris*. Tenni in vita gli esemplari sino alla metamorfosi. Ricorderò in seguito l'esperienze di asportazione di un abbozzo di arto larvale eseguite dal Dürken ⁽⁴⁾, dalla Dragomirowa ⁽⁵⁾, dall'Hodler ⁽⁶⁾. Occorre esaminare le conseguenze della mancanza dell'arto rispetto all'emicinto, al processo laterale della vertebra sacrale, alla muscolatura, al sistema nervoso.

La mancanza completa dell'arto libero si è nei miei casi, come già aveva notato il Dürken, accompagnata con la mancanza totale dello scheletro dell'emicinto. Questo fatto rientra nel quadro generale dell'interdi-

(3) Nel processo trasverso delle vertebre precedenti si osserva che vi è spesso al suo apice un piccolo accumulo di cellule mesenchimatiche dello stesso aspetto, a parte le proporzioni, che si è visto per la vertebra sacrale; occorrono ulteriori osservazioni per comprendere il valore morfologico di detti accumuli.

(4) B. DÜRKEN, « Z. wiss. Zool. », vol. 99 (1912).

(5) N. DRAGOMIROWA, « Zool. Jahrb. Abt. allg. Zool. u. Physiol. », vol. 54 (1935).

(6) F. HODLER, « Rev. Suisse de Zool. », vol. 56 (1949).

pendenza tra arto libero ed emicinto, problema non ancora completamente risolto né per gli Urodeli né per gli Anuri. Per questi ultimi, e intendo riferirmi solo a questi perchè svariate esperienze mostrano condizioni differenti tra i due ordini, ricordo che nelle mie ricerche sull'induzione di arti soprannumerari negli Anuri ho potuto osservare che in tutti i punti della somatopleura compresa tra gli arti anteriori ed i posteriori, è possibile indurre simultaneamente sia l'arto libero che il suo emicinto: è un dato che per sè stesso dimostra che lo scheletro dell'arto (ossia dell'arto libero e del suo emicinto) nasce negli Anuri come sistema equipotenziale. Ciò spiega il risultato sopradetto che in mancanza dello scheletro dell'arto libero è mancato pure lo scheletro dell'emicinto.

Alla mancanza completa dello scheletro sia dell'arto che dell'emicinto si accompagna la mancanza del processo laterale della vertebra sacrale. In questi casi si trova, sul lato operato, solo un processo trasverso come nelle vertebre precedenti: è eccezionale sia che manchi anch'esso, sia che si presenti in accrescimento. Quando si è avuto un arto atipico con un emicinto anch'esso atipico, se l'ileo rimane distante dalla vertebra sacrale, allora il processo laterale manca come nei casi precedenti. Se invece l'ileo, nonostante l'atipia dell'emicinto, è in giusta posizione rispetto alla vertebra sacrale, allora il processo laterale può essere o normale o di volume ridotto. Le osservazioni sperimentali del Dürken, della Dragomirowa e dell'Hodler risultano riconfermate.

L'assenza dello scheletro dell'arto e dell'emicinto implica pure la mancanza completa della loro muscolatura intrinseca, com'era stato notato per la prima volta dal Dürken. Questo fatto rientra nel problema dell'origine della muscolatura intrinseca degli arti. Si tende ad ammettere che questa provenga, negli Anfibi, dalla somatopleura e precisamente dallo stesso abbozzo della parte scheletrica dell'arto. Vi sono però osservazioni (particolarmente in casi di trapianto di arti, del Banchi e di altri) che non sono facilmente conciliabili con questo modo di vedere: ecco perchè mi pare che la questione non possa ancora considerarsi soddisfacentemente risolta. Nelle mie ricerche sull'induzione di arti soprannumerari negli Anuri, ho osservato che lo scheletro dell'arto può essere con o senza muscolatura, nei quali ultimi casi non ho avuto ancora reperti sufficientemente chiari per decidere se la loro muscolatura provenga dai muscoli della parete ventro-laterale del tronco, e quindi indirettamente dai miotomi, oppure se provenga da stimolazione diretta della somatopleura. Da notare che nei casi d'induzione di arti soprannumerari non si ha mai lo sviluppo della muscolatura in assenza della parte scheletrica: da questo mi sembra logico dedurre che alla parte scheletrica dell'arto spetti la funzione di stimolo induttivo della parte muscolare, come spero verrà ancora meglio chiarito in successive ricerche. Ricordo infine che nei casi di asportazione di abbozzo di arto in cui si ebbe uno sviluppo deficiente dello scheletro dell'arto e dell'emicinto, vi è stata completa assenza della loro muscolatura intrinseca: sono casi di difficile interpretazione.

La mancanza dell'arto si accompagna pure, sul lato interessato, con chiare deficienze, com'era stato già osservato dal Dürken, dal Detwiler, dal May e da altri, dei gangli dei nervi spinali 8°, 9°, 10°, e nei corrispondenti segmenti del midollo spinale non si notano le grosse cellule motorie del corno ventrale, che si osservano invece sul lato normale.

Dati molto interessanti sul processo laterale della vertebra sacrale, come già dissi nella mia Nota precedente, ho avuto nel corso delle mie ricerche sull'induzione di arti soprannumerari negli Anuri. Infatti in alcuni di questi casi ho osservato che l'ileo si unisce con una cartilagine, con la quale prende rapporti come fa con il processo laterale. Tale cartilagine può avere una di queste due origini: vi è la possibilità che il trapiantato che ha stimolato sulla somatopleura l'induzione di un arto soprannumerario abbia pure stimolato l'induzione di un'altra cartilagine, e che poi l'ileo trovandosi con la sua parte apicale in vicinanza di essa vi abbia stabilito un rapporto ileo-vertebra sacrale: è un'eventualità che non posso escludere nei casi dove questa cartilagine ha forma molto irregolare e ha poi un processo in rapporto con l'ileo. In altri casi la cartilagine che trovo in rapporto con l'ileo ha all'incirca la forma e le dimensioni di un processo laterale. Ritengo che qui trattisi di un processo laterale indotto dall'ileo nel mesenchima ad esso circostante: è questa la seconda origine, che mi pare molto più verosimile. È da notare che in questi casi si è lontani dalla colonna vertebrale del portatore onde essa non può avervi avuto importanza.

È molto interessante un reperto che ho avuto quest'anno in un'esperienza di trapianto embrionale della parte posteriore degli organi assili (somi, ecc.) con un lembo di cute laterale che conteneva bilateralmente l'abbozzo dell'arto, sul fianco di un embrione normale. Da questo trapianto si svilupparono due arti, uno dei quali ha un ileo che si articola con un tipicissimo processo laterale di vertebra sacrale in assenza completa, si noti, di qualsiasi vertebra; inoltre il trapiantato è nella parte ventrale del portatore, e perciò lo scheletro assile di questo non può avervi avuta alcuna importanza. È un caso che dimostra assai chiaramente che il processo laterale della vertebra sacrale è indipendente dalla presenza di qualsiasi vertebra.

Una prima conseguenza (le altre le vedremo tra poco) di tutto questo complesso di ricerche è che il processo laterale (a parte la sua porzione basale che è il processo trasverso) è indipendente dalla vertebra sacrale. Le osservazioni sul suo normale sviluppo avevano fatto sospettare questa indipendenza, e l'esperienze d'induzione di arti soprannumerari e di trapianto di abbozzi di arto ne hanno data la documentazione. Quanto veniva prima asserito, che cioè il processo laterale fosse un semplice accrescimento del processo trasverso, non risulta riconfermato. Inoltre, questa parte scheletrica che pone in connessione la vertebra sacrale con l'ileo, addossandosi al processo trasverso, mi pare debba considerarsi, e per il suo sviluppo e per la sua funzione, una costa sacrale. Il fatto che essa si salda precocemente con il processo trasverso, non può cambiare il suo significato morfologico, e può anche corrispondere al raggiungimento di un più saldo appoggio.

Ritengo perciò che anche negli Anuri esista una coppia di coste sacrali, così come esistono negli Urodeli.

Vediamo ora l'induttore del processo laterale. Il Dürken estirpò l'abbozzo dell'arto posteriore in giovani larve di *Rana fusca* ed osservò, come ho già ricordato, che non si sviluppava il processo laterale: concluse per l'esistenza di una correlazione di sviluppo tra l'ileo e il processo laterale della vertebra sacrale. Hodler eseguì in Anuri (*Rana temporaria* e *Xenopus laevis*) esperienze di asportazione dell'abbozzo dell'arto, ottenendo risultati concordanti; e in esperienze di trapianto dell'abbozzo dell'arto ottenne che l'ileo, quando venne a trovarsi abbastanza vicino alle vertebre del tronco, v'indusse la sacralizzazione unilaterale; concluse per un'azione induttiva biochimica partente dall'ileo. Un posto a parte hanno le ricerche della Dragomirowa, in quanto sperimentò su un Urodelo (*Axolotl*). Negli Urodeli vi sono le coste, e vi è una coppia di coste sacrali; la vertebra sacrale (nell'*Axolotl* generalmente la 17^a) differisce dalle precedenti per avere maggiormente sviluppati sia il processo trasverso che la costa. Queste differenze scompaiono (nelle sue esperienze di asportazione dell'abbozzo dell'arto) sul lato ove manca l'ileo; con esperienze di trapianto ella ottenne la sacralizzazione unilaterale delle vertebre del tronco (fino all'11^a) se vi era vicinanza con l'ileo o con altre parti dell'emicinto o anche con il femore. La Dragomirowa interpretò che l'azione induttiva consisteva nell'aumentare gli abbozzi del processo trasverso e della costa, o determinando maggiore proliferazione del mesenchima o attirando mesenchima dalle parti vicine.

Osservo che pur mettendosi in risalto una identità di condizioni iniziali di sviluppo del processo laterale degli Anuri con il processo trasverso e la costa sacrale degli Urodeli, tuttavia la regione sacrale degli Anuri prende poi uno sviluppo assai maggiore in rapporto alle differenze funzionali.

Anche dalle mie esperienze risulta che la mancanza dell'arto e dell'emicinto fa sì che non si ha più la formazione del processo laterale, nel senso che si ha solo il processo trasverso. Perchè si abbia il processo laterale è indispensabile la presenza dell'ileo in giusta posizione, magari di un frammento di esso: alludo a un caso di asportazione in cui ebbi che dell'ileo si sviluppò un frammento isolato e in connessione con la vertebra sacrale, e poi a distanza vi era il rimanente dell'emicinto, e si ebbe lo sviluppo del processo laterale. Inoltre si è visto, nelle esperienze d'induzione di arti soprannumerari negli Anuri, che si può avere una cartilagine, che ho interpretato come processo laterale, in connessione con l'ileo e distante dalla colonna vertebrale del portatore. Infine, nel sopra ricordato caso di trapianto di abbozzi di arto, ho ottenuto lo sviluppo di un tipicissimo processo laterale in connessione con l'ileo e in assenza di vertebre.

Si può adunque ritenere ben documentato che l'ileo è l'induttore del processo laterale della vertebra sacrale. E poichè si è visto che questo processo laterale è indipendente dalla presenza di qualsiasi vertebra, ne consegue che l'ileo può indurre un processo laterale indipendentemente da qualsiasi vertebra.

La specificità dell'induttore non è rigorosa in quanto risulta dalle esperienze della Dragomirowa che l'azione induttrice può ottenersi anche con altre parti dell'emicinto o con il femore; è opportuno indagare l'azione di altre cartilagini al di fuori di quelle dell'arto.

Veniamo così all'altra questione strettamente connessa con quella dell'induzione, ossia alla competenza del mesenchima a dare un processo laterale in seguito a induzione da parte dell'ileo.

Si è visto che la sacralizzazione può giungere in *Axolotl* all'11^a vertebra (Dragomirowa) e negli Anuri sino alla 6^a (Hodler). Si è parlato di omeosi del Bateson, di omodinamia imitatoria del Fürbringer, ecc., per interpretare la sacralizzazione delle vertebre normalmente non sacrali.

Questa capacità rientra nel concetto vastissimo della competenza, che riguarda tutti i processi dello sviluppo: con il termine « competenza » s'intende infatti il modo di reagire, in senso morfogenetico, di un territorio embrionale o post-embrionale (anche adulto) a uno stimolo. La competenza a formare un dato abbozzo insorge in un determinato stadio. Così la competenza arto-formativa della somatopleura manifesta i suoi primi effetti verso la fine della vita embrionale. La competenza per il processo laterale si manifesta molto più tardi, intorno alla metamorfosi; non risulta ancora se esista anche nell'adulto. Di notevole interesse è la ricerca di quale mesenchima abbia la competenza a formare un processo laterale. Vi sono due possibilità: può questo mesenchima provenire dai somiti oppure dalla somatopleura, e non si hanno ancora dati sufficienti per decidere; inoltre le due possibilità possono coesistere. I miei reperti di arti soprannumerari con un ileo in connessione con una cartilagine che ho interpretato come processo laterale, mostrano che anche il mesenchima proveniente dalla somatopleura può avere la competenza a formarlo. Un altro problema che è proprio della competenza, è di fissare l'estensione del territorio capace di dare un determinato abbozzo. La sacralizzazione è certamente possibile fino alla 6^a vertebra negli Anuri (e all'11^a in *Axolotl*); se tale risultato si estenda pure alle anteriori, è ancora da vedere. Intanto è interessante notare che le vertebre suscettibili di sacralizzazione corrispondono alla parte del tronco la cui somatopleura ha la competenza di dare arti soprannumerari posteriori.

CONCLUSIONI. — 1. Il processo laterale della vertebra sacrale degli Anuri non rappresenta un semplice accrescimento del processo trasverso. È invece una formazione indipendente da quest'ultimo, tanto che l'ileo può indurla in assenza di qualsiasi vertebra.

2. Il processo laterale va morfologicamente considerato come una costa sacrale, che si addossa e precocemente si salda con il processo trasverso della vertebra sacrale.

3. Il processo laterale, essendo dipendente dall'ileo e indipendente da qualsiasi vertebra, va considerato dal punto di vista della morfologia generale, come appartenente all'arto; si ha cioè il complesso: arto libero, emicinto, processo laterale.

Biologia. - *Involuzione sperimentale delle cellule di Mauthner nei Tritoni adulti (« Triton cristatus »)* ^(*). - Nota di ALBERTO STEFANELLI, presentata ^(**) dal Socio G. COTRONEI.

Con le presenti ricerche sulla involuzione sperimentale delle cellule di Mauthner, ritengo di portare una valida dimostrazione della esattezza delle mie conclusioni sul significato funzionale di questi peculiari elementi nervosi degli Ittiopsidi, quali ho potuto desumere dalle ormai numerose osservazioni morfo-ecologiche, comparative e sperimentali, mie e di miei collaboratori.

Pur rinviando per la bibliografia alla mia recente rivista sintetica sull'argomento ⁽¹⁾, ritengo opportuno citare quegli autori che, con i loro concetti, hanno rappresentato la premessa di queste conclusioni.

Già il Fritsch nel 1878 intuisce la relazione delle fibre di Mauthner, allora le sole note, con il movimento della coda, considerandole fibre riflesso-motorie di natura multiassiale. Mayesr (1881) identifica i rapporti di queste fibre con le cellule motorie spinali e considera rapporti di queste con l'acustico. Nel 1888 Goronowitch scopre le cellule di origine, ma Koelliker (1893-96) rigetta i rapporti con l'acustico e considera queste fibre con carattere centripeto! Più curiosa è l'idea di Kingsbury (1896), che cito perché proprio contraria a quanto oggi si può desumere, che non vi siano relazioni tra queste fibre e la vita acquatica perché presenti anche in un *Amblystoma* metamorfosato e vivente fuor d'acqua (vedi Beccari 1907). Errore questo in cui cadrà, come vedremo, anche un ricercatore dei nostri giorni.

Importante è invece, nella storia sul significato funzionale di questi elementi, l'idea di Johnston (1902) che considera una relazione tra le cellule di Mauthner e le cellule giganti di Müller dei Ciclostomi: in un mio lavoro del 1933 ho potuto identificare nei Petromizonti la coppia omologa a quella mauthneriana all'altezza della radice del complesso VIII.

Questi dati ci portano a considerare la natura tegmentale dei neuroni di Mauthner, e quindi il loro valore nella coordinazione motoria, essendo le cellule di Müller dei Ciclostomi tipiche cellule reticolari del tegmento (Mayer, Johnston, Bartelmez, Kulenbeck e Saito omologavano a queste solo le cellule giganti, mentre Tretiakoff, Scilling e Jansen le associavano a molti altri elementi di minori dimensioni). Mie ricerche nelle Anguille, con Camposano (1946), hanno dato una evidente prova di questa omologia tra elementi giganti tegmentali e cellule di Mauthner.

Così giungiamo alle ricerche di Tagliani (1905); di Beccari (1907) e di Bartelmez (1915) da cui appare la natura complessa di questi elementi reticolari specializzati, collegati con varie sinapsi da un lato con l'area vestibolo

(*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Istologia ed Embriologia della Università di Roma con un contributo del C. N. R.

(**) Nella seduta dell'8 novembre 1952.

(1) ALBERTO STEFANELLI, « Quart. Rew. Biol. », 26, pp. 17-34 (1951).

laterale, l'area del V e l'area tegmentale, e dall'altro, mediante il neurite, con le cellule motorie spinali (mediante le caratteristiche sinapsi asso-asoniche di Beccari). Da queste ricerche gli Autori definiscono il valore funzionale dei neuroni di Mauthner nella coordinazione motoria dei movimenti ortotonici del tronco e della coda. Rimando ad un mio lavoro ⁽²⁾ a proposito delle cellule di Mauthner e preauthneriane delle larve di rana, per la precisazione del carattere motorio, di coordinazione e di correlazione di questi elementi.

Ma da molte osservazioni da me compiute, specialmente negli Anfibi, sia adulti che allo stato larvale, in cui i neuroni di Mauthner hanno una costituzione più semplice che nei Teleostei, osservazioni a carattere comparativo, morfo-ecologico e sperimentale, ho potuto concludere che, oltre alla connessione con il vestibolare, mediante un dendrite a decorso periferico, le connessioni di gran lunga dominanti, anatomicamente e fisiologicamente, sono da un lato quelle che la cellula contrae con l'area della linea laterale, mediante il suo più cospicuo dendrite, e dall'altro quelle che il lungo neurite contrae con le cellule motorie spinali della coda. Le collaterali delle fibre di Mauthner degli Urodeli nella regione del tronco sono assai scarse rispetto a quelle della regione codale e fisiologicamente appaiono di valore assai modesto (nei Teleostei di forma tipica è assai difficile fare questa distinzione tra le due regioni, ma è prevalente la regione della coda). Vi è infatti un parallelismo di sviluppo dei neuroni di Mauthner con lo sviluppo anatomico e funzionale della coda, quale organo di propulsione nel nuoto e con lo sviluppo del sistema sensorio della linea laterale. La presumibile relazione dei neuroni di Mauthner con la sensibilità acustica può essere considerata in relazione alle percezioni subsonore, di grande lunghezza d'onda, che sono state attribuite percepibili dalla linea laterale.

Ho così potuto notare come i neuroni di Mauthner non si sviluppano (o degenerino) non solo se entrambi gli estremi della connessione, linea laterale-coda, mancano (o scompaiono come con la metamorfosi negli anfibi anuri), ma come basti lo scarso sviluppo o l'assenza di uno solo dei due apparati perché i neuroni di Mauthner facciano difetto, siano poco sviluppati o degenerino. Come esempi di assenza dei neuroni di Mauthner in queste condizioni ricordo tra i Teleostei il caso descritto da Tagliani dell'*Orthogoriscus mola*, pesce che risulta con linea laterale assai ben sviluppata ma privo di coda, e quello dei pesci di fondo, in cui, pur essendo anatomicamente sviluppata la coda, è poco usata per la natura sedentaria dell'animale. Tagliani non trovò le fibre di Mauthner in alcune specie di fondo (*Blennius*, *Lophius*, *Uranoscopus*), ma un mio allievo, De Angelis (1950) ⁽³⁾, trova in alcuni, tra cui il *Blennius*, privi di fibre di Mauthner, le cellule, però di dimensioni molto ridotte, non superiori di quelle di altre cellule del tegmento.

Tra gli Anfibi ricordo il caso da me studiato nell'Anuro *Xenopus laevis* in cui con la metamorfosi si ha l'atrofia dei neuroni di Mauthner, come negli altri Anuri, pur rimanendo assai sviluppata la linea laterale in relazione alla

(2) ALBERTO STEFANELLI, « Boll. Zool. », 13, pp. 117-124 (1942).

(3) B. DE ANGELIS, « Boll. Pesca Piscic. Idrobiol. », XXVI, f. 2 (1950).

vita esclusivamente acquatica che l'animale conduce anche da adulto. Ricordo il caso del *Geotriton* in cui, invece, c'è la coda, ma è completamente atrofizzata la linea laterale in relazione alla vita esclusivamente terragnola di questo Urodelo (Stefanelli 1949) ⁽⁴⁾. Così ho potuto osservare una maggior grandezza delle cellule di Mauthner nei tritoni catturati durante la primavera, quando sono in acqua per la riproduzione, che in quelli osservati durante il letargo invernale, fuori dell'acqua; ciò parallelamente ad una migrazione in superficie dei bottoni della linea laterale in primavera ed un loro approfondimento e riduzione in inverno. Così è interessante pure il caso delle larve dei Bufonidi in cui manca un vero apparato di Mauthner che può essere messo in rapporto con la brevità della vita larvale (un mese circa; nella Rana le larve possono invece anche svernare) e allo scarso sviluppo della linea laterale (Stefanelli e Zacchei 1950) ⁽⁵⁾.

Anche sperimentalmente appare questa relazione tra apparato di Mauthner, linea laterale e coda. Un'indagine condotta nel mio laboratorio da Baffoni e Catte ⁽⁶⁾ ha messo in luce una rapida involuzione di questi neuroni, assai più rapida che normalmente, provocando una metamorfosi accelerata, trattando larve di *Hyla* con estratti di tiroide fresca. Questi Autori hanno potuto mettere in evidenza come la rapida metamorfosi crei non solo quelle condizioni di disarmonia degli organi, quali sono state illustrate da Cotronei (1913, 1914), ma anche disarmonie più minute nella compagine istologica dell'encefalo per la disarmonica smobilitazione dei sistemi della vita acquatica e il disarmonico differenziamento di quelli della vita terrestre.

I reperti morfo-ecologici ora ricordati mi hanno portato a considerare quale fondamentale funzione dei neuroni di Mauthner il collegamento dei centri vestibolari e laterali, ma specialmente di quelli laterali, con le cellule motorie spinali della coda, per permettere una attività riflessa di movimento di quest'organo nel nuoto, conseguente agli stimoli statici e a quelli percepiti dalla linea laterale. Occorreva tuttavia una prova sperimentale diretta quale si poteva avere distruggendo uno dei due termini della connessione.

Con recenti ricerche Baffoni (1952) ⁽⁷⁾, nel quadro di queste mie indagini, nel saggiare l'effetto dell'attività rigenerativa della fibra sul pireneforo, ha potuto constatare come sia diverso il comportamento delle cellule di Mauthner nelle larve degli Urodeli e in quelle degli Anuri. Infatti, amputando ripetutamente la coda di larve di *Triton* e di *Hyla*, ogni volta che queste erano rigenerate (5-6 volte), mentre le cellule di Mauthner delle larve di tritone si presentavano con ipertrofia reattiva, quelle di raganella presentavano segni di involuzione. L'Autore ha potuto vedere che, mentre nelle codine rigenerate di tritone rigenerava un midollo completo in cui decorrevano le rigenerate fibre di Mauthner, nelle larve di raganella il midollo rigenerava sotto forma

(4) ALBERTO STEFANELLI, « Riv. Biol. », 41, pp. 249-270 (1949).

(5) G. BAFFONI e G. CATTE, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. 8ª, IX, pp. 282-287 (1950).

(6) G. BAFFONI e G. CATTE, « Riv. Biol. », XLIII, pp. 373-397 (1951).

(7) G. BAFFONI, « Rend. Acc. Naz. Linc. », ser. 8ª, XII, pp. 189-194 (1952).

di tubolino endimale senza fibre e cellule nervose differenziate. Ma in queste esperienze di Baffoni la mancata rigenerazione della fibra è indice di una rigenerazione semplificata del midollo delle neocodine interpretabile sia come conseguenza della provvisorietà dell'organo, come alla assai minore attività rigenerativa degli Anuri rispetto agli Urodeli. Pertanto la riduzione delle cellule di Mauthner non rappresenta che una anticipata involuzione di un apparato destinato a sparire con la metamorfosi.

Con le presenti ricerche, su un materiale che non può dare adito ad altre interpretazioni del fenomeno, quale è rappresentato da tritoni adulti in cui sia stata amputata la coda e impedita la rigenerazione delle fibre di Mauthner, dò una chiara dimostrazione come le fibre di Mauthner siano essenzialmente collegate con i centri motori spinali della coda e come abbiano scarso

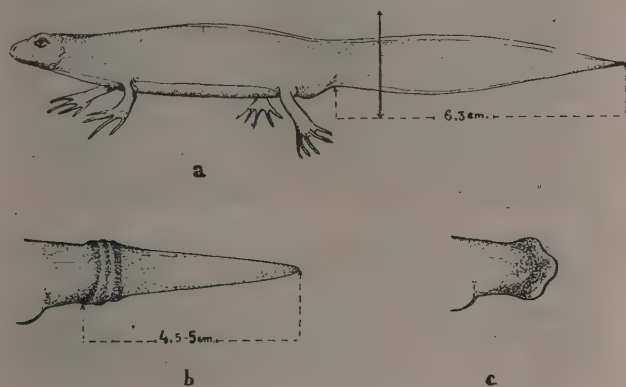


Fig. 1.

a) Sede della amputazione della coda (1 cm dalla apertura cloacale); b) coda rigenerata dopo 168 giorni dalla amputazione; c) aspetto del moncone dopo 168 giorni dalla amputazione e successiva cucitura dei lembi cutanei.

valore funzionale i collegamenti con quelli del tronco (supposti da altri Autori), e porto così un valido contributo al mio concetto del significato funzionale dei neuroni di Mauthner degli Ittiopsidi quali neuroni tipici della natazione con la coda, collegando i centri motori della coda con i centri statici vestibolari e specialmente della linea laterale.

L'esperimento è stato condotto preparando tre lotti di animali (*Triton cristatus* adulti), uno di animali di controllo, uno di 8 animali con la coda semplicemente amputata ed uno di 8 animali con la coda amputata e con i lembi cutanei del moncone cuciti, così da favorire la cicatrizzazione e impedire la rigenerazione dell'organo. Non ho usato il metodo impiegato con successo dalla Locatelli (1925) per non danneggiare il midollo spinale con l'introduzione di guttaperca nello speco vertebrale.

Operati il 25 gennaio, gli animali furono sacrificati il 10 agosto, ossia dopo 168 giorni dalla operazione, quando la coda degli animali del secondo lotto era rigenerata di circa 4,5 cm. Gli animali del terzo lotto non hanno presentata alcuna rigenerazione della coda (fig. 1).

Gli encefali ed i midollini codali furono fissati in liquido di Bouin e le sezioni trasverse furono trattate con protargolo, secondo il metodo di Bodian. Gli animali operati furono allevati dall'allievo interno Mario Pecini che eseguì anche, con ottimo risultato, i preparati.

Il risultato delle esperienze appare chiarissimo: le cellule di Mauthner degli animali che non hanno rigenerata la coda risultano in netta involuzione. Il loro spessore massimo, che nei controlli è di circa $30\ \mu$, raggiunge appena i $10\ \mu$. Non ho preso in considerazione l'asse maggiore della cellula poiché, prolungandosi da un lato con il grosso dendrite laterale e dall'altro con il neurite, non sarebbe stato possibile definire dei limiti precisi. La figura 2 mo-

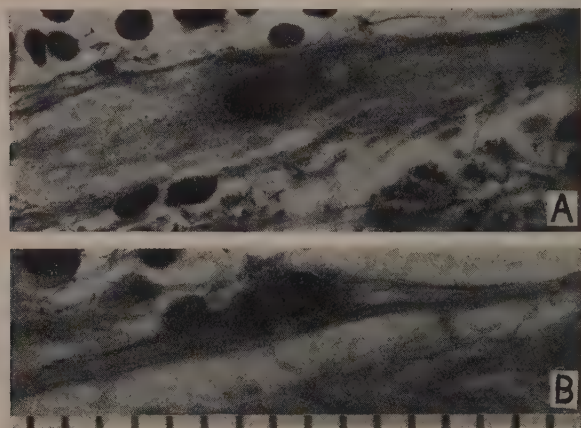


Fig. 2.

- A) Cellula di *Triton cristatus* normale. Metodo al protargolo di Bodian.
 B) Cellula di *Triton cristatus* a cui è stata amputata la coda e ne è stata impedita la rigenerazione 168 giorni dopo l'operazione. Stesso metodo.
 Ogni intervallo della scala al piede delle figure $10\ \mu$.

stra chiaramente il grado di questa atrofia. Sarebbe certamente stato interessante fare le osservazioni dopo un tempo molto maggiore per vedere se si otteneva l'atrofia completa, ma le condizioni di allevamento di questo primo gruppo di ricerche non mi hanno consigliato di prolungare oltre l'esperienza.

Inaspettato è stato invece il risultato delle osservazioni dei tritoni con coda rigenerata. Anche in questi risulta una notevole atrofia della cellula, sebbene in media minore che nel caso precedente (spessore massimo di $15\ \mu$). Ma l'esame istologico ha rivelato che, ancora dopo 168 giorni dall'amputazione, il nuovo midollo non presenta rintracciabili le fibre di Mauthner tra le altre fibre. Rimane pertanto il dubbio che tali fibre o rigenerino più tardivamente o non rigenerino affatto, così che nei tritoni adulti avverrebbe quello che accade nelle larve degli Anuri (*Hyla*, secondo Baffoni, 1952) ⁽⁷⁾. Comunque, anche questa esperienza dimostra che se la fibra di Mauthner non raggiunge il midollo codale, la cellula degenera; e ciò malgrado la fibra percorra tutta la lunghezza del tronco.

Mancano invece completamente quelle condizioni a carattere reattivo che si manifestano nelle cellule motorie a cui venga amputato il neurite (vedi Zannone 1947 e Baffoni 1951⁽⁸⁾), ma ciò non deve sorprendere, in primo luogo perché tale fenomeno avviene in un tempo più prossimo all'intervento, e perché le cellule di Mauthner non sono cellule motorie dirette e possono quindi avere un diverso comportamento: le numerose osservazioni fatte non mi permettono di associarmi alla idea di Leghissa di un percorso periferico delle fibre di Mauthner.

Prima di trarre le conclusioni deducibili da queste mie esperienze, desidero soffermarmi su un lavoro di un certo Tusques apparso nei «C. R. Soc. Biol.» del 1951⁽⁹⁾ vol. CXLV, p. 1556. Le sue affermazioni non meriterebbero in verità alcun commento se non fosse opportuno un chiarimento per chi non è della partita.

Afferma il Tusques che le cellule di Mauthner degli Anfibi Anuri sono insensibili all'azione della tiroxina. E l'Autore spiega questo comportamento col fatto, che, secondo lui, non è vero che le cellule di Mauthner di questi animali si involvano dopo la metamorfosi, poiché ha potuto osservare queste cellule anche in animali già metamorfosati da tempo; così, basandosi su questo fatto, conclude che non è affatto vero che le cellule di Mauthner abbiano relazione con la vita acquatica. L'autore non fa citazioni e non si può sapere se ciò dipenda dalla non conoscenza dei lavori o se consideri i lavori di tanti autorevoli autori assolutamente superati e quindi non degni di menzione. Così non cita affatto gli oltre trenta lavori miei e dei miei collaboratori svolti sull'argomento.

Per quanto riguarda l'insensibilità alla tiroxina ricordo solo che i risultati di Baffoni e Catte (1950) sono stati confermati da Weiss e Rossetti del Laboratorio di Chicago (1951). Essi concludono: «Grafts of rat thyroid and tiroxin-agar implants near the hind brain of tadpoles produce within a few days a burst of mytotic activity in the neural epithelium and marked growth of new cells with the exception of Mauthner's neurons wich atrophy».

Per quanto riguarda la persistenza delle cellule di Mauthner dopo la metamorfosi ricordo come io abbia osservato che l'involuzione, normalmente, non sia immediata, così che è possibile ritrovarle nella rana anche dopo un mese e nello *Xenopus* anche dopo tre mesi. Ma esse presentano sempre evidenti segni di atrofia per le ridotte dimensioni, per l'assenza di neurofibrille (con i metodi argentici) per l'assenza di tigroide e perché il neurite è completamente regredito. È evidente che si tratta nei casi di cellule così osservate di semplice sopravvivenza, senza più alcuna attività funzionale. Ricordo come tale stato possa a volte anche prolungarsi e così già Beccari (1943) ha descritto la presenza della cellula di un sol lato in una giovane rana adulta. Così, molto prima ancora, Kingsbury, ritrovando le cellule di Mauthner in un *Amblystoma* metamorfosato e passato a vita

(8) G. BAFFONI, «Rend. Acc. Naz. Linc.», ser. 8^a, X, pp. 319-325 (1951).

(9) TUSQUES, «C. R. Soc. Biol.», CXLV, p. 1556 (1951).

terrestre giunse, sbagliando, alla stessa conclusione di Tusques. Ma era il 1896!

In conclusione, queste mie ricerche sulla degenerazione sperimentale delle cellule di Mauthner di tritoni adulti, mediante la semplice asportazione della coda e l'amputazione conseguente delle fibre mauthneriane (che successivamente, sia rigenerando la coda, sia impedendo tale rigenerazione, non rigenerano), dimostrano come la presenza di quest'organo della natazione sia essenziale per la funzionalità dell'apparato mauthneriano.

Tenendo conto delle altre mie osservazioni negli Anfibi che dimostrano come il più cospicuo rapporto sia contratto dalla cellula di Mauthner con l'area della linea laterale (mediante il suo più grosso dendrite) e tenendo conto come in Anfibi pur dotati di coda, ma privi della linea laterale, mancano le cellule di Mauthner (*Geotriton*), concludo che la funzione essenziale dell'apparato mauthneriano sta nel collegare i centri della linea laterale con i centri motori della coda. L'attività funzionale di questi peculiari neuroni degli Ittiopsidi può essere così interpretata: eccitati dagli stimoli percepiti dagli organi della linea laterale, integrando questa azione con quella degli stimoli delle altre aree sensoriali (area vestibolare, area del V, ecc.) elaborano un'impulso motorio che, trasmesso ai centri motori della coda, ne coordina il movimento, in via riflessa, adeguatamente agli stimoli laterali percepiti. Tenendo conto delle vibrazioni a lunghezza subsonora e sonora percepite dalla linea laterale, si capisce l'importanza di questo apparato che permette all'animale di correggere per via riflessa il movimento natatorio, in relazione agli ostacoli che incontra e alla posizione che esso assume nell'ambiente liquido.

Biologia. — *Osservazioni sulla vita latente.* — I. *Studio delle dipeptidasi di «Artemia salina»* L.^(*). Nota di ENRICO URBANI, LUCIANO ROGNONE e SALVATORE RUSSO, presentata^(**) dal Socio G. COTRONEI.

Il fenomeno della vita latente, o *vita minima* come lo definì Spallanzani, presentato sia da animali che da vegetali, riveste un interesse sul quale è superfluo insistere per i problemi di Biologia generale ad esso connessi. Negli organismi in anabiosi le proprietà del protoplasma si modificano in modo sorprendente e questi acquistano la possibilità di resistere a condizioni ambientali le più sfavorevoli e ad aggressioni sperimentali le più energetiche (cfr. Needham 1942)⁽¹⁾. Numerosi ricercatori hanno scelto questo tema come oggetto delle loro indagini (cfr. Monterosso 1933⁽²⁾, Montemar-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata «G. B. Grassi» della Università di Roma.

(**) Nella seduta dell'8 novembre 1952.

(1) J. NEEDHAM, *Biochemistry and Morphogenesis*, Cambridge 1942, p. 659.

(2) B. MONTEROSSO, «Arch. Zool. Ital.», 19, 17 (1933).

tini 1935 ⁽³⁾, Tonzig 1938 ⁽⁴⁾) ed uno di noi (Urbani 1946 a) ⁽⁵⁾ si propose di studiare l'assunzione di ossigeno dei germi incistati di *Artemia salina* ⁽⁶⁾ in vita latente e durante il passaggio alla vita attiva. Si vide che durante la vita latente non era possibile dimostrare un consumo di ossigeno ma che questo diveniva evidente e ben misurabile dopo due ore e mezza di idratazione. La stessa indagine fu estesa a semi di *Lupinus albus* (Urbani 1946 b) ⁽⁷⁾ e su questo materiale fu registrato nei semi allo stato secco un consumo di ossigeno estremamente ridotto ⁽⁸⁾ e di un valore tale da rientrare nell'ambito dell'errore sperimentale; anche qui fu notata una attività respiratoria ben misurabile intorno a due, tre ore di idratazione del seme.

Attratti dall'interesse del problema e desiderosi di dare un ulteriore sviluppo alle citate osservazioni abbiamo iniziato uno studio sul tenore in taluni enzimi di organismi in anabiosi ed in questa Nota vengono presentati alcuni dei risultati da noi ottenuti nello studio delle dipeptidasi nelle cisti in vita latente di *Artemia salina*.

*
* * *

Le dipeptidasi sono enzimi proteolitici (esopeptidasi) capaci di attaccare composti di basso peso molecolare quali i dipeptidi liberando gli aminoacidi costitutivi. Senza entrare in merito alla vasta letteratura esistente (Smith 1951) ⁽⁹⁾ (Bourne 1951) ⁽¹⁰⁾ ricorderemo che lo studio di questi enzimi sul livello citologico e citofisiologico si deve soprattutto a Linderstrøm-Lang; Holter e Collaboratori del *Carlsberg Laboratorium*. È stata così studiata la localizzazione della alanilglicina e glicilglicina dipeptidasi nelle radici di semi in germinazione (Linderstrøm-Lang 1928) ⁽¹¹⁾, a livello dei vari elementi cellulari dello stomaco e duodeno di maiale (Linderstrøm-Lang e Holter 1934) ⁽¹²⁾, nelle uova di echinodermi prima e dopo la fecondazione (Linder-

(3) L. MONTEMARTINI, «Lavori Istit. Botan.», Palermo 1935, 6, 150.

(4) S. TONZIG, «Nuovo Giorn. Botan. Ital.», 45, I (1938).

(5) E. URBANI, «Boll. Soc. Ital. Biol. Sperim.», 22, fasc. 5 (1946).

(6) N. FAUTREZ-FIRLEFYN («Arch. de Biol.», 62, 391 (1951) chiama le uova di *Artemia* che cadono in vita latente allo stadio di gastrulazione *germes enkystés et desséchés*. Ade-
rendo a questa definizione noi le chiameremo nel corso del presente lavoro più brevemente «cisti».

(7) E. URBANI, «Boll. Soc. Ital. Biol. Sperim.», 22, fasc. 5 (1946).

(8) *Errata corrige*: nel citato lavoro in luogo di (pag. 2 riga 13) mm³ 0,00200 di O₂ leggi: mm³ 0,00020 di O₂.

(9) E. L. SMITH, in *The Enzymes*, Edited by J. B. Summer and K. Myrbäck, vol. I, Parte 2. Academ. Press Inc., New York 1951.

(10) G. H. BOURNE, *Cytology and Cell Physiology*, 2^a Ediz., Oxford 1951.

(11) K. LINDERSTRØM-LANG, «Z. physiol. Chem.», 173, 32 (1928).

(12) K. LINDERSTRØM-LANG e H. HOLTER, «Z. physiol. Chem.», 226, 173 e 177 (1934).

strøm Lang e Holter 1933)⁽¹³⁾. Recentemente Holter e Løvtrup (1949)⁽¹⁴⁾ hanno condotto un interessante studio sugli enzimi proteolitici in *Chaos chaos* e tra l'altro hanno visto che le dipeptidasi e le proteinasi di ameba sono legate, almeno in parte, a differenti strutture citoplasmatiche. D'altra parte Urbani (1952)⁽¹⁵⁾ che ha studiato dipeptidasi e proteinasi in amebe private del nucleo fino a quattordici giorni dopo l'operazione ha visto che questi enzimi rimangono attivi nel protozoo enucleato ma che vi è un differente comportamento tra dipeptidasi e proteinasi (cfr. J. Brachet 1951⁽¹⁶⁾, J. Brachet, N. Linet e E. Urbani 1952)⁽¹⁷⁾.

Per ciò che riguarda la localizzazione di enzimi in organismi in vita latente ricorderemo le ricerche di Engel e Heins (1947)⁽¹⁸⁾ i quali hanno visto che l'assise proteica dei semi di grano, segale ed orzo è ricca in proteinasi e dipeptidasi e che questi enzimi si conservano nei semi in riposo: soprattutto il tenore in dipeptidasi è elevato in tutti i territori del germe.

* * *

Il materiale da noi impiegato è costituito da germi incistati di *Artemia salina* L. provenienti dalla California e che si trovano in vita latente da almeno un anno. I germi incistati si sviluppano in acqua salata (NaCl 30 gr. in un litro) e alla temperatura di 20, 21°C. presentano una percentuale di schiusura del 50 %-60 %. Le osservazioni riportate nella presente Nota riguardano solamente germi incistati e non nelle varie fasi di sviluppo. I procedimenti impiegati per rivelare l'attività enzimatica sono stati i seguenti: 200 mgr. di cisti sono state polverizzate il più accuratamente possibile ed omogenate con 6-12 ml. di acqua distillata o di tampone fosfato M/15 secondo Sørensen al pH desiderato; l'omogenato è stato filtrato a pressione su filtro di vetro 15 AG 2 Schott. Il filtrato presenta colore giallo chiaro e se l'omogenato è stato fatto in acqua distillata il pH è leggermente acido (6,6-6,8). Per rivelare l'attività enzimatica sono stati impiegati due micrometodi necessitanti di quantità minime della soluzione enzimatica preparata nel modo detto (da 3 a 8 μ l)⁽¹⁹⁾, uno qualitativo per cromatografia su carta da filtro ed uno quantitativo consistente nella titolazione degli ami-

(13) K. LINDERSTRØM-LANG e H. HOLTER, « Z. physiol. Chim. », 215, 167 (1933).

A proposito della scissione enzimatica della leucilglicina, CLEMENTI (« Rend. Accad. Naz. Lincei », 25, 183 (1916) studiò l'azione dipeptidastica del fegato, *in vitro*, di vari Vertebrati e Invertebrati e vide che l'estratto acquoso del fegato di *Gallus domesticus*, *Lacerta ocellata*, *Rana esculenta*, *Gadus morrue* e di *Helix pomatia* ha la proprietà di scindere la d-l-leucilglicina.

(14) H. HOLTER e S. LØVTRUP, « C. R. Lab. Carlsberg, Sez. Chim. », 27, 27 (1949).

(15) E. URBANI, « Arch. Int. Physiol. », 60, 189 (1952).

(16) J. BRACHET, *Le rôle des acides nucléiques dans la vie de la cellule et l'embryon*. Ed. Masson e Desoer 1952.

(17) J. BRACHET, N. LINET e E. URBANI, *Vèmes journées cytoembryol.* Louvain 1952.

(18) CHR. ENGEL e J. HEINS, « Bioch. et Biophys. Acta », 1, 190 (1947).

(19) μ l = mm³.

nogruppi del substrato con HCl alcoolico in ambiente acetónico (Linderstrøm-Lang 1928 ⁽¹¹⁾, Holter e Løvtrup 1949) ⁽¹⁴⁾. Per ambedue i metodi il substrato usato è la dl-Alanil-glicina della S. A. Hoffmann-La Roche alla concentrazione 0,2 M sciolta in NaOH a varie molarità o in tampone fosfato M/15 per raggiungere il pH desiderato.

CROMATOGRAFIA. — La cromatografia su carta da filtro è stata usata per vedere, a titolo orientativo, se nelle cisti di *Artemia* in vita latente fossero

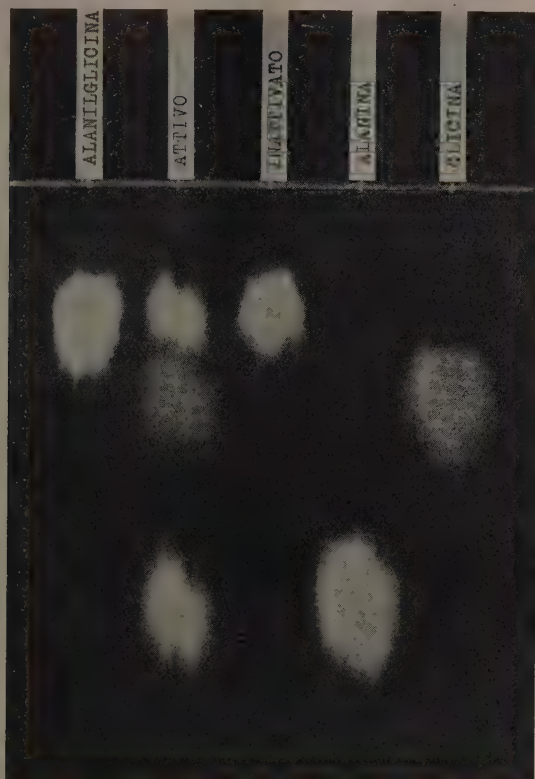


Fig. 1.

presenti degli enzimi dipeptidasici e quali fossero i limiti grossolani di temperatura, pH, e tempo di incubazione per la loro rivelazione. I cromatogrammi sono stati fatti usando carta Wathman n. 4, solvente n-Butanolo (10 parti con una parte di acqua). Cromatografia discendente per 24-48 ore, rivelatore ninidrina al 0,25 %, in butanolo saturato di acqua. La fotografia riportata (fig. 1) è molto dimostrativa. L'omogenato attivo (3,20 μ l), ricavato da cisti in vita latente, ha scisso una parte della alanilglicina in alanina e glicina mentre l'omogenato inattivato (con ebollizione per 20 minuti in fiala saldata) ha perso completamente il suo potere e compare

la macchia di alanilglicina non scissa. Nel cromatogramma si vedono anche le macchie della alanina e della glicina e la loro posizione corrisponde alla posizione dei prodotti di scissione della alanilglicina in presenza di omogenato attivo.

TITRIMETRIA. - Come si è già detto il principio del metodo consiste nella titolazione con HCl alcolico 0,06 N degli aminogruppi del substrato prima e dopo l'azione enzimatica. La titolazione viene eseguita in acetone contenente rosso naftolo quale indicatore del pH (cfr. Salvidio e Bertelli 1951⁽²⁰⁾). In pratica si è proceduto nel modo seguente.

L'omogenato (7-9 μ l) è stato unito con l'alanilglicina (7-9 μ l) e posto ad incubare in bagno termostatico ad una determinata temperatura per un determinato tempo. Il pH voluto è stato raggiunto nel modo indicato appresso. Dopo l'incubazione è stata aggiunta una prima quantità di HCl 0,06 N allo scopo di bloccare la reazione e di rendere possibile una successiva esatta titolazione ed una seconda quantità di acetone contenente rosso naftolo. Il liquido deve assumere una colorazione giallo citrino ed essere perfettamente limpido; quindi è stata fatta la titolazione con HCl 0,06 N fino a viraggio all'aranciato. I bianchi sono stati eseguiti nella stessa maniera, ma usando omogenato inattivato con l'ebollizione oppure titolando al tempo zero,

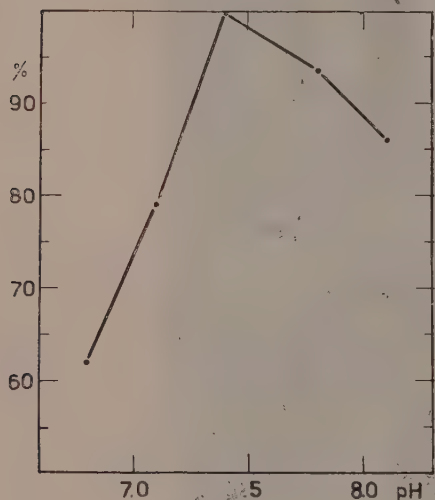


Fig. 2.

ossia appena messi in contatto l'omogenato attivo con l'alanilglicina.

Per l'accuratezza del metodo è indispensabile adoperare delle micropipette a costrizione di grande precisione e una microburetta capace di liberare quantità controllabili di liquido dell'ordine di 0,1 μ l. Reazione enzimatica e titolazione sono state fatte in microtubi di vetro neutro di capacità di circa 300 μ l. Il liquido è stato agitato con un dispositivo elettromagnetico simile a quello usato nel Carlsberg Laboratorium.

Riportiamo qui di seguito i dati relativi ad alcune determinazioni da noi eseguite. Ogni punto dei grafici è la media di tre determinazioni.

ATTIVITÀ IN FUNZIONE DEL PH. - 200 mgr. di cisti (germi incistati) sono state omogenate in 6 ml. di acqua distillata ed il liquido filtrato portato alla neutralità con NaOH N/100 (volume finale 12 ml.). L'alanilglicina è

(20) E. SALVIDIO e G. BERTELLI, « Il progresso medico », 7, 660 (1951).

stata sciolta alla concentrazione di 0,2 M in NaOH alle seguenti molarità e si sono ottenuti i pH indicati:

Alanilglicina	in NaOH	pH
0,2 M	0,010 N	6,8
	0,019 N	7,1
	0,034 N	7,4
	0,061 N	7,8
	0,090 N	8,1

Si sono uniti 7,20 μ l alanilglicina ai vari pH con 7,20 μ l di omogenato ed i tubi sono stati posti ad incubare a 40°C. per un ora e mezza. Bloccata la reazione con 27,10 μ l HCl 0,06 N e titolazione con lo stesso. Nella fig. 2 sono riportati i risultati: in ascisse i pH indicati e in ordinate il per cento di attività enzimatica. L'attività massima è stata ottenuta a pH 7,4 il che vuol dire che il pH optimum dell'enzima è molto vicino a questa cifra: ciò corrisponde a quanto trovato da Holter e Løvtrup sulle amebe. Salvidio⁽²¹⁾ invece ha visto che gli eritroblasti ed i granuloblasti di Mammiferi hanno una attività dipeptidasica con pH optimum a 7,9.

ATTIVITÀ IN FUNZIONE DELLA TEMPERATURA. — 200 mgr. di cisti sono state omogenate in 12 ml. di tampone fosfato M/15 pH 7,4. Sono stati uniti 8,6 μ l alanilglicina con 8,6 μ l omogenato e i tubi posti alle temperature di 6°, 22°, 27°, 40°, 60° C. per un ora e mezza. Bloccata la reazione con 27,10 μ l HCl 0,06 N e titolazione con lo stesso. Nella figura 3 sono riportati i risultati. In ascisse le temperature indicate ed in ordinate il per cento di attività enzimatica. Si vede che il massimo di attività si è avuto con la incubazione a 40°C, il che vuol dire che l'optimum di temperatura per l'enzima è prossimo a questa cifra; ciò in accordo a quanto trovato da Holter e Løvtrup per le dipeptidasi di amebe.

ATTIVITÀ IN FUNZIONE DEL TEMPO DI INCUBAZIONE. — 200 mgr. di cisti sono state omogenate in 6 ml. di tampone fosfato M/15 pH 7,4. Sono stati uniti 7,20 μ l alanilglicina con 7,20 μ l omogenato e posti ad incubare a 40°C in bagno termostatico in vaso Dewar per ridurre al minimo gli sbalzi di temperatura durante i prelievi. I tubi sono stati prelevati a vari intervalli di tempo e la reazione bloccata con 67 μ l. HCl 0,06 N e titolati con lo stesso. È stata fatta una titolazione al *tempo zero* ossia appena mescolato l'omoge-

(21) E. SALVIDIO, Comunicazione personale.

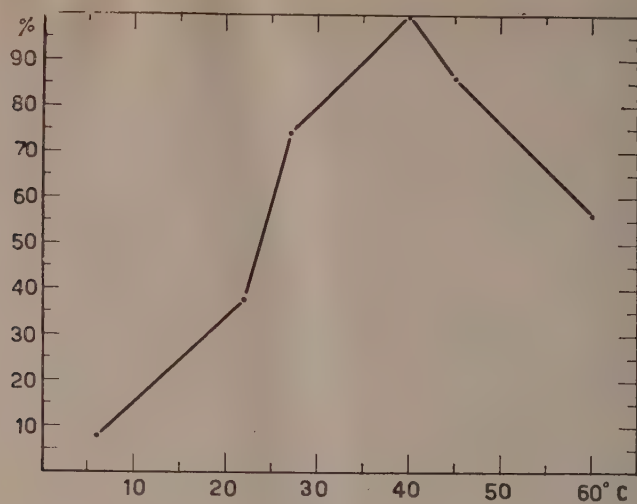


Fig. 3.

nato con l'alanilglicina. Nella fig. 4 sono illustrati i risultati ottenuti: in ascisse le ore di incubazione, in ordinate l'attività enzimatica espressa in μl HCl 0,06 N (differenza di titolo con le titolazioni al tempo zero). Si vede come nei primi tempi della incubazione la scissione della alanilglicina proceda linearmente.

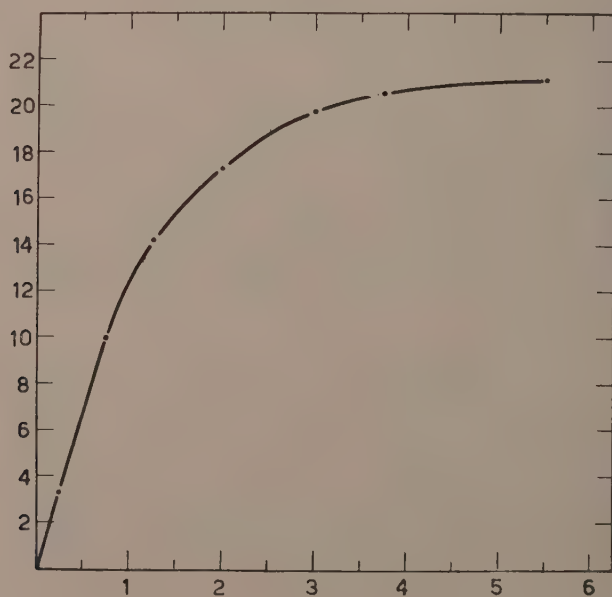


Fig. 4.

ATTIVITÀ IN FUNZIONE DELLA CONCENTRAZIONE ENZIMATICA. - 200 mgr. di cisti sono state omogenate in 12 ml. di tampone fosfato M/15 pH 7,4. La metà dell'omogenato è stato bollito per 30 minuti. L'omogenato non bollito è stato assunto come concentrazione 4, le concentrazioni (gradatamente decrescenti) 3, 2, 1 sono state ottenute mescolando (con grande esattezza con micropipette da 150 μ l a costrizione) nelle varie proporzioni l'omogenato attivo con l'inattivato. Sono stati uniti 8,6 μ l di alanilglicina con 8,6 μ l di omogenato alle varie concentrazioni e i tubi posti ad incu-

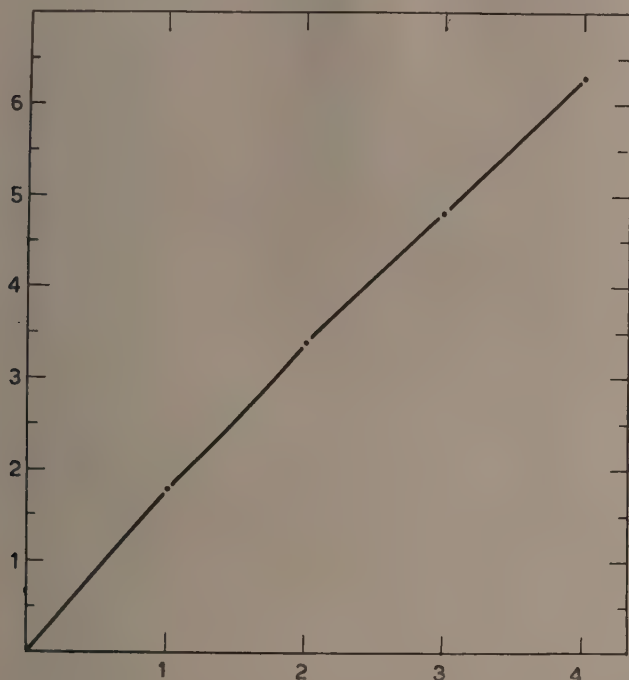


Fig. 5.

bare per un ora e mezza a 40° C. Bloccata la reazione con 27,10 μ l HCl 0,06 N e titolazione con lo stesso.

Nella fig. 5 sono riportati i risultati ottenuti. In ascisse le concentrazioni già dette e in ordinate l'attività enzimatica espressa in μ l di HCl 0,06 N (differenza di titolo con i bianchi fatti con omogenato completamente inattivato con l'ebollizione). Si vede come l'attività enzimatica in funzione della concentrazione dell'enzima abbia un andamento sufficientemente lineare per le concentrazioni usate.

* * *

RIASSUNTO E CONCLUSIONI. - È stata studiata l'alanilglicinadipeptidasi dei germi incistati di *Artemia salina* L. in vita latente. Le cisti sono state

disintegrate meccanicamente e con l'aggiunta di soluzione tampone o di acqua distillata è stato ottenuto un omogenato sul quale si sono eseguiti i dosaggi della attività enzimatica. Per lo scopo si è fatto uso di una tecnica cromatografica e di una tecnica titrimetrica e si è visto che l'omogenato di cisti in vita latente ha la capacità di scindere l'alanilglicina in alanina e glicina. L'omogenato sottoposto alla ebollizione perde questa capacità. Non si tratta di una attività enzimatica che si instaura a seguito di un inizio di sviluppo del germe ma di un enzima che esiste nelle cisti in anabiosi; difatti basta porre in contatto le cisti disintegrate con l'acqua ed il substrato per rivelare una attività enzimatica (in condizioni opportune di temperatura e di pH). L'esame della fig. 4 mostra che già dopo pochi minuti di incubazione vi è una attività ben dosabile con il micrometodo impiegato. Questo risultato estende al mondo animale quanto è stato visto da Engel e Heins su semi vegetali in riposo.

Sono state studiate alcune caratteristiche di azione di questo enzima, cioè l'optimum di temperatura, di pH, la scissione del substrato in funzione del tempo di incubazione ed in funzione della concentrazione dell'enzima. Tutti i risultati ottenuti autorizzano a concludere per la esistenza di una alanilglicinadipeptidasi nel germe in anabiosi. Naturalmente con questo non si esclude, come è nostro convincimento, che con lo sviluppo del germe intervenga, con modalità che restano da precisare, un aumento della attività enzimatica. Lo studio eseguito indica che l'enzima deve essere legato al protoplasma idratato in modo tale da non venire inattivato dalle molteplici avverse condizioni che le cisti stesse possono subire senza perdere il potere di sviluppo.

Lo studio di altri enzimi condotto su questo e su altri materiali con criterio comparativo si prospetta interessante per le conclusioni che si potranno trarre sulla morfologia chimica degli organismi in anabiosi.

CONGRESSI

Convegni Internazionali. — *Relazione*^(*) *sull'XI Convegno Volta (14-19 settembre 1952)* del Socio **GIORGIO ABETTI**.

TEMA: Problemi della Fisica Solare.

Quattro giorni a Roma presso l'Accademia dei Lincei e due a Firenze presso l'Osservatorio di Arcetri.

Invitati stranieri: Menzel dell'Harvard College, Schwarzschild di Princeton, Ellison di Edimburgo, Redman, v. Klüber e Ryle di Cambridge (Ingh.), Mr. e M.me d'Azambuja di Parigi, ten Bruggencate di Gottinga, Grottrian di Potsdam, Kiepenheuer di Friburgo, Unsöld di Kiel, Brück di Dublino, Waldmeier di Zurigo, Minnaert e Houtgast di Utrecht, Lindblad, Öhman,

(*) Svolta nella seduta dell'8 novembre 1952.

Alfvén di Stoccolma, Edlén di Lund, i Soci astronomi dell'Accademia e gli astronomi italiani che si occupano di questi problemi e parecchi uditori.

Il tema generale fu diviso in otto sottotemi, corrispondenti alle otto sedute del Convegno, precisamente:

Atmosfera solare, Fotosfera e Cromosfera, Protuberanze, Corona, Elettrodinamica solare, Campi magnetici solari, Radio-emissioni solari, Nuovi metodi per lo studio del sole.

Dopo la seduta inaugurale, che ebbe luogo nella Sala delle Prospettive alla Farnesina con l'intervento dei nostri Presidente e Vice Presidente, nei giorni seguenti ebbero luogo le varie sedute nelle quali vennero presentati i più recenti lavori per ogni argomento con seguito di interessanti ed animate discussioni.

Non è possibile di farne un breve riassunto; accennerò soltanto a tre argomenti che, dirò così, sono più attuali e nuovi.

Si è molto investigato e fantasticato sulle forze che agiscono nelle *violente eruzioni solari* che si manifestano al bordo con le protuberanze. La cinematografia si è dimostrata come un potente mezzo di investigazione e così anche i moti della materia – in gran parte idrogeno – eruttata dal sole, si possono meglio comprendere. È evidente la presenza di potenti forze elettromagnetiche che agiscono sulla materia quando questa, dopo essere uscita violentemente dal sole si trova sospesa a grande altezza nella sua atmosfera.

La presenza dei *campi magnetici* particolari di grande intensità e quello più generale di piccola intensità su tutto il sole, forma appunto argomento di osservazioni, esperienze, ipotesi numerose. Sono stati riferiti esperimenti interessanti fatti in Svezia sul *comportamento dei liquidi ad alta conduttività come il mercurio ed il sodio liquido immersi in un campo magnetico*. Da Monte Wilson sono stati comunicati i recenti risultati di un nuovo metodo che permette di rilevare rapidamente i campi magnetici *transitori e più o meno permanenti* sulla superficie visibile del sole.

Altro tema di grande attualità è quello delle *radio-emissioni solari*. Già da alcuni anni esse vengono seguite e studiate in diverse lunghezze d'onda con potenti radio-telescopi per scoprire come e da quali regioni del sole vengano emesse. Si è scoperto che il sole è *molto più grande* di quello che appare ai nostri occhi. In diverse lunghezze d'onda il suo diametro aumenta di due o tre volte ed il suo disco appare di forma ellittica. Si pensa ovviamente che ciò sia dovuto alla presenza della materia coronale. *Condensazioni nella materia coronale* provano che esse sono correlate con le radio-trasmissioni.

Nella seduta di chiusura fu proiettata una *cinematografia* illustrante i nuovi grandiosi impianti per seguire la *meteorologia solare*, istituiti sotto gli auspicci della Marina ed Aviazione degli Stati Uniti sul Picco Sacramento nel Nuovo Messico.

Per unanime consenso dei convenuti l'XI Convegno Volta, per la cui organizzazione va data viva lode agli Uffici dell'Accademia, oltre che per il suo immediato interesse scientifico è stato *ispiratore di nuove idee e nuove ricerche* nei sempre misteriosi fenomeni presentati dal sole.

Congressi Internazionali. — *Relazione* (*) *sul Congresso internazionale di Scienze Antropologiche ed Etnologiche a Vienna* del Socio SERGIO SERGI. —

Il Socio Sergi, che ha rappresentato l'Accademia al IV Congresso Internazionale di Scienze Antropologiche ed Etnologiche a Vienna (1-8 settembre), comunica che il Congresso è stato una solenne affermazione del grande sviluppo raggiunto oggi dalle *Scienze dell'uomo*. Straordinario fu il numero dei partecipanti, più di 700, ed eccezionale il numero dei paesi da essi rappresentato. Come non mai prima di ora intervennero oltre gli Europei gli studiosi di ogni altro continente, tra cui da segnalare i rappresentanti dei nuovi stati indipendenti, grandi e piccoli, sorti dalle antiche colonie. La loro presenza ed il loro contributo fattivo in tutte le sezioni del Congresso sono stati la più grande dimostrazione della importanza non solo dottrinale ma anche pratica che viene riconosciuta agli studi volti ad approfondire le indagini sugli attributi somato-psichici dell'umanità. Quale sia stata l'estensione dei problemi trattati che hanno considerato l'uomo senza limiti nello spazio e nel tempo è rispecchiato dagli argomenti discussi nelle sezioni che furono così divise: Antropologia generale. Antropologia speciale. Paleantropologia. Antropologia biologica. Storia e metodo della etnologia. Sociologia. Scienza delle religioni e mitologia. Arte, musica, danza. Piante coltivate e domesticazione. L'etnologia e la scuola. Archeologia preistorica dell'Europa e paleoetnologia dell'Eurasia. Demografia. Psicologia. Linguistica. Il Congresso fu presieduto dal venerando prof. W. Schmidt (Friburgo) coadiuvato dal vicepresidente prof. Heine-Geldern (Vienna) e dai segretari generali prof. W. Koppers per l'etnologia e prof. J. Weningen, per l'antropologia ambedue dell'Università di Vienna. Vicepresidenti furono nominati K. P. Chattopadhyay (India, Calcutta), W. Fenton (Stati Uniti, Washington), G. Lindblom (Svezia, Stoccolma), Masao Oka (Giappone, Tokyo), S. Sergi (Italia, Roma), H. V. Vallois (Francia, Parigi).

Venti italiani antropologi ed etnologi presenziarono i lavori delle varie sezioni e la maggior parte di essi vi parteciparono con comunicazioni originali.

L'assemblea del Congresso ha nominato il prof. S. Sergi membro del Comitato provvisorio direttivo della *Union Internationale des Sciences anthropologiques et ethnologiques*. Il Comitato ha il compito di procedere alla organizzazione definitiva della suddetta *Union* a norma degli Statuti definitivamente approvati dal Congresso. L'Union, affiliata al Conseil International de la philosophie et des sciences humaines ed al Conseil International des Unions Scientifiques, ha lo scopo di promuovere la cooperazione internazionale nel dominio delle scienze dell'uomo e di organizzare ricerche su base internazionale. Il prossimo congresso sarà tenuto nel 1956 a Filadelfia.

(*) Svolta nella seduta dell'8 novembre 1952.

Congressi Internazionali. — *Relazione*^(*) *sull'VIII Congresso internazionale di Meccanica teorica ed applicata* del Socio ANTONIO SIGNORINI.

L'ottavo Congresso internazionale di Meccanica teorica ed applicata ha avuto luogo in Istanbul dal 20 al 28 agosto 1952, sotto il patrocinio del Comitato internazionale per i Congressi di Meccanica applicata. Il Congresso ha avuto un pieno successo sia per l'ottima sua organizzazione, sia per l'imponente mole di lavori scientifici che in esso è stata presentata (circa 350 lavori).

I lavori del Congresso si sono svolti secondo una ripartizione in cinque sezioni; sono anche state tenute alcune conferenze generali a sezioni riunite. Nella sezione I sono stati esposti i lavori di *elasticità* e di *plasticità*; nella sezione II quelli relativi alla *meccanica dei fluidi*; nella sezione III quelli sulla *meccanica dei solidi*; nella sezione IV quelli di *meccanica statistica* e *termodinamica*; infine la sezione V è stata dedicata alla *fisica matematica* ed ai *metodi di calcolo*. A causa del gran numero di lavori presentati, le due prime sezioni sono state suddivise in due sottosezioni IA, IB, IIA, IIB. Nel programma di ogni sezione figuravano delle *conferenze di sezione* della durata di 45 minuti e le *comunicazioni* per ciascuna delle quali erano concessi 20 minuti.

Il Consiglio Nazionale delle Ricerche era rappresentato dai proff. Signorini Antonio, che rappresentava anche la nostra Accademia e Ghizzetti Aldo dell'Università di Roma, Grioli Giuseppe dell'Università di Padova e Fichera Gaetano dell'Università di Trieste. I proff. Ghizzetti e Fichera erano anche rappresentanti dell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

Nel pomeriggio del 21 agosto si sono iniziati i lavori. La sezione II è stata inaugurata da una conferenza del prof. Signorini, dal titolo «*Quelques recherches récentes de dynamique des solides*», con la quale sono stati messi in evidenza i nuovi importanti contributi che recentemente il prof. Signorini ed il prof. Grioli hanno saputo apportare in un campo di studi, che poteva sembrare quasi esaurito. La comunicazione del prof. Signorini interrotta, per esigenze d'orario, il giorno 21 è stata ripetuta per unanime desiderio dei congressisti, il giorno 26.

Nel pomeriggio del 21 agosto ha avuto anche luogo, nella sezione IA, la comunicazione del prof. Grioli, dal titolo «*Sull'equilibrio dei corpi elastici*», che ha pure riportato un grande successo e destato vivo interesse.

Il giorno 25 agosto, il prof. Fichera ha tenuto, nella sezione IA una comunicazione dal titolo «*On the elastic torsion of hollow prisms*». Anche

(*) Svolta nella seduta dell'8 novembre 1952.

questo notevolissimo lavoro del Fichera ha molto interessato gli ascoltatori, soprattutto gli stranieri.

Il 27 agosto il prof. Ghizzetti ha tenuto, nella sezione V, una conferenza dal titolo « *Sur une méthode pour le calcul des valeurs propres et des fonctions propres, et sur son application à l'équation de Schrödinger* ». Egli ha illustrato un metodo di calcolo degli autovalori dovuto al prof. Picone, mettendo in evidenza la sua potenza e la sua estrema generalità e mostrando un'applicazione fatta recentemente dal Ghizzetti presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo. La conferenza ha avuto pieno successo; numerosi scienziati francesi e tedeschi hanno successivamente interpellato il prof. Ghizzetti per avere ulteriori notizie ed indicazioni sulla pubblicazione del lavoro.

Infine, il 28 agosto, il prof. Ghizzetti ha ancora tenuto, nella stessa sezione V, una comunicazione dal titolo « *Sur l'interpolation à plusieurs dimensions* », esponendo le brillanti idee generali del prof. Picone sulla interpolazione, accennando a tutte le possibili applicazioni che se ne possono trarre ed illustrando particolarmente una di esse.

Il Socio Signorini è stato nominato membro del Comitato internazionale per i Congressi di Meccanica Applicata.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente saluta tutti i Soci e comunica che hanno ringraziato per la nomina i Soci Nazionali: prof. Enrico Persico e prof. G. C. Pupilli; i Soci Corrispondenti: prof. Pietro Caloi, prof. Luigi Crocco, prof. Luigi Solaini e il Socio Straniero prof. E. Fauré Fremiet.

Il Presidente comunica poi che sono deceduti: in data 19 giugno 1952, il Socio Nazionale prof. Virgilio Ducceschi della Categoria V, Sezione Fisiologia, Professore di Fisiologia all'Università di Padova; in data 17 agosto 1952, il Socio Corrispondente prof. Laureto Tieri della Categoria III, Sezione Fisica, Professore di Fisica sperimentale dell'Università di Firenze; in data 7 ottobre 1952, il Socio Corrispondente prof. Luigi Volta della Categoria II, Sezione Astronomia, Direttore del Centro di Fisica Stellare del Consiglio Nazionale delle Ricerche a Merate.

Il Presidente invia un reverente saluto di omaggio alla memoria degli insigni Colleghi scomparsi e annunzia che essi saranno commemorati nelle prossime sedute dell'Accademia.

Per quanto concerne la commemorazione del prof. Volta, il Presidente comunica che i Colleghi Astronomi hanno manifestato il desiderio che il predetto Professore sia commemorato dal Socio Carnera. Rivolge quindi preghiera ai Colleghi della Categoria III e V perché anch'essi vogliano fare proposte per la commemorazione dei Soci Ducceschi e Tieri.

Il Socio Armellini, riferendosi a quanto comunicato dal Presidente circa la commemorazione del prof. Volta, fa presente di non essere stato

interpellato al riguardo dai Colleghi Astronomi e osserva che, pur non facendo questione di persona, sembrerebbe opportuno attenersi alla prassi accademica secondo la quale i Soci defunti vengano commemorati dai loro successori nelle cattedre. Nella fattispecie pertanto l'incarico dovrebbe essere conferito al Collega Zagar.

Il Socio G. Levi non può associarsi a quanto ha detto il Collega Armellini perché, per quanto riguarda la prassi accademica, gli oratori incaricati della commemorazione di Colleghi scomparsi sono in genere designati direttamente dalla Presidenza, senza interpellare la Classe.

Anche il Socio Cassinis non può associarsi a quanto ha detto il Collega Armellini perché non gli risulta che in una commemorazione accademica debba essere tenuto in particolare conto la qualità di successore del defunto nella cattedra che egli copri o, comunque, in una carica non accademica.

Il Socio Zagar desidera dichiarare che la scelta del Collega Carnera gli sembra ottima perché nessuno meglio di lui, che fu legato al compianto prof. Volta da vincoli profondi di collaborazione e di amicizia, potrebbe degnamente rievocarne la figura e l'opera.

Il Presidente si riserva di decidere al riguardo.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente presenta il fascicolo 1-2 (luglio-agosto 1952) dei « Rendiconti » ed esprime la sua certezza che la pubblicazione possa conservare quel regolare ritmo mensile che il Senatore Castelnuovo aveva ottenuto.

Il Presidente comunica che nella *Gazzetta Ufficiale* n. 193 del 21 agosto 1952 è pubblicata la legge 31 luglio 1952, n. 1078 che contiene nuove disposizioni per il conferimento di premi ministeriali di L. 250.000 a Prèsi, Direttori, Professori degli Istituti e Scuole d'Istruzione Media, Classica, Scientifica, Magistrale, Tecnica e Artistica. Secondo tale legge il Ministero della Pubblica Istruzione è autorizzato a bandire annualmente un concorso per i migliori lavori su argomenti delle materie comprese in uno dei seguenti due gruppi:

I gruppo: a) scienze filosofiche; b) scienze giuridiche, economiche e sociali; c) scienze storiche e ausiliarie della storia; d) scienze filologiche, critica letteraria ed artistica;

II gruppo: e) scienze matematiche; f) scienze fisiche; g) scienze chimiche; h) scienze naturali.

Il primo anno i concorsi saranno banditi per le quattro materie del primo gruppo; il secondo anno per le quattro materie del secondo gruppo; e così via alternativamente.

Alcuni Soci osservano che le nuove disposizioni hanno ridotto il numero dei premi e che inoltre non è prevista la possibilità che i premi stessi siano

conferiti, come era concesso dalle precedenti disposizioni, agli assistenti universitari.

Il Presidente risponde che la legge è oggetto di attento studio da parte della Presidenza.

Il Socio Dore, che ha rappresentato l'Università di Bologna e l'Accademia alle feste centenarie dell'Università di Quebec, riferisce sulla missione compiuta.

PLICHI SUGGELLATI

Il Presidente presenta i seguenti plichi suggellati:

1 plico dell'arch. Gaetano Vinaccia, pervenuto all'Accademia in data 11 settembre 1952, contenente, come dichiarato con lettera a firma dell'autore, una Memoria su studi ed esperienze di cemento armato;

1 plico del dott. Florio De Angeli, pervenuto all'Accademia il 12 settembre 1952, contenente, come da annotazione sulla busta, la descrizione di un nuovo microscopio elettromagnetico;

1 plico del sig. Francesco Parisi, pervenuto all'Accademia in data 16 settembre 1952, contenente, come dichiarato con lettera a firma dell'autore, Note su problemi di cosmogonia, con la clausola che in caso di decesso del presentatore detto plico dovrà essere consegnato, a richiesta, all'ing. Ugo Livi o al sig. Domenico Caponi;

1 plico del sig. Giuseppe Pio, pervenuto all'Accademia in data 13 ottobre 1952, contenente, come da annotazione sulla busta, nuove formule matematiche;

1 plico dei signori Adolfo Baldini e Leo Gino Baldini, pervenuto all'Accademia il 19 settembre 1952, contenente, come da annotazione sulla busta, la descrizione sommaria di un disco volante;

1 plico dei sigg. Gino Baldini e Adolfo Baldini, pervenuto all'Accademia il 29 settembre 1952, contenente, come da annotazione sulla busta, la descrizione di un disco volante;

1 plico del sig. Achille Cornacchia, pervenuto all'Accademia in data 29 ottobre 1952, senza nessuna annotazione;

1 plico del sig. Aurelio Romeo, presentato in data odierna dal Socio Guido Bargellini e contenente, come da annotazione sulla busta, un lavoro di chimica organica.

La Classe, constatata l'integrità dei sigilli, delibera che i plichi sopra citati siano conservati nell'archivio accademico a disposizione degli interessati.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio U. Amaldi offre in omaggio la nuova edizione della II parte del volume II delle «Lezioni di meccanica razionale» del compianto prof. Tullio Levi Civita e dello stesso prof. Amaldi e manifesta il suo com-

piacimento di vedere ultimata con il citato volume che tratta della dinamica dei sistemi con un numero finito di gradi di libertà, un'opera che ha voluto essere ed è un atto d'omaggio alla memoria dell'illustre Consocio Levi Civita.

Il Socio Fabiani offre in omaggio la parte I di una monografia da lui diretta e pubblicata nei Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei XL dal titolo « Paleontologia di Sahabi (Cirenaica) », contenente tre Memorie di Carlo Petrocchi, Geremia d'Erasmo e A. M. Maccagno rispettivamente dal titolo « Notizie generali sul giacimento fossilifero di Sahabi - Storia degli scavi - Risultati »; « I pesci di Sahabi » e « I Coccodrilli di Sahabi », e illustra l'importanza delle ricerche eseguite in Cirenaica dal prof. Petrocchi che scoperse numerosi fossili e descrisse una parte dei resti di Proboscidi, in prevalenza nuovi, fra i quali occupa un posto eminente un Proboscide di grande statura, denominato « *Stegotetrabelodon Syrticus* », nuovo anche come genere.

Lo studio del materiale del prof. Petrocchi venne ripreso dopo la guerra, dal compianto Socio Giuseppe Checchia Rispoli, il quale fu incaricato dal Ministero dell'A. O. di promuoverne l'ulteriore svolgimento, distribuendo i fossili dei diversi gruppi agli studiosi che avesse ritenuto meglio indicati. Dopo la morte del predetto Professore tale compito è passato al suo successore, lo stesso prof. Fabiani.

Il citato Socio presenta poi il volume II dei « Contributi di scienze geologiche, con particolare riguardo all'Italia Centrale, Meridionale e alla Sicilia » e un quaderno di divulgazione scientifica dal titolo « I Parchi Nazionali ».

Il Socio Boaga offre in omaggio il volume IX dell'« Archivio Internazionale di Fotogrammetria » che contiene, in tre fascicoli, il resoconto del V Congresso e della corrispondente Esposizione Internazionale, che hanno avuto luogo in Roma nell'anno 1938.

Il Segretario accademico presenta le opere inviate in omaggio, mettendo in particolare evidenza una pubblicazione dell'Università di Pisa in memoria del compianto Socio Leonida Tonelli, un volume di Amilcare Fantoli, edito a cura dell'Ufficio Studi del Ministero dell'Africa Italiana dal titolo « Le piogge della Libia con particolare riguardo alle zone di avvaloramento », un volume di Armando Frumento sulle « Imprese lombarde nella storia della Siderurgia Italiana (Il contributo dei Falck) », una pubblicazione dal titolo « Archiv der internationalen Freien Akademie (der I Kongress der internationalen Freien Akademie Bad Munster am Stein 1950) », il volume « Convegno sulle difese del suolo e le sistemazioni fluviali e montane » del Consiglio Nazionale delle Ricerche, uno studio dal titolo « Lichens of the State of Washington » di Grace E. Howard, una pubblicazione su « La Specola Vaticana » di G. Stein S. I. e G. Junkes S. I. e un trattato dal titolo « Remington's Practice of Pharmacy » di E. Fullerton Cook e di Eric W. Martin.

Il Presidente, dopo aver ringraziato i Colleghi che hanno offerto e presentato opere in omaggio all'Accademia, presenta un volume di Guido Ucelli, pubblicato per celebrare i 90 anni di vita della Società di Costruzioni Mec-

caniche RIVA. Il volume è pervenuto all'Accademia per il tramite del Collega Monneret de Villard nipote dell'ing. Ugo Monneret de Villard, uno dei fondatori della predetta Società.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione negli Atti i Soci: Carobbi, Segre, Vardabasso (che riferisce contemporaneamente sul XIX Congresso Internazionale di Algeri di Geologia), Cotronei, Picone, Semerano, Rolla, Cambi, Armellini, U. Amaldi, Signorini e Crocco.

Il Socio Colonnetti presenta una Memoria di Merlino F/S. dal titolo: «Contributo allo studio della lastra circolare su suolo elastico».

Il Socio Semerano presenta una Memoria di L. Riccoboni, P. Papoff e M. Biancani dal titolo: «La validità dell'equazione di Ilkovic e il controllo del responso galvanometrico in polarografia».

Per l'esame di dette Memorie verrà nominata una Commissione.

Il Segretario Accademico dà lettura delle Note inviate alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

CACCIOPOLI R. - Fondamenti per una teoria generale delle funzioni pseudo-analitiche di una variabile complessa. Nota II.

CROCCO G. A. - Costanti di evoluzione nei Dirigibili e nei Missili.

RUSSO A. - Carattere femminile dei tessuti somatici e loro indipendenza in relazione all'origine dei tumori.

VARDABASSO S. - Analogie geologiche fra la Sardegna e l'Africa Minore.

ARUFFO G. - Sul differenziale generalizzato delle forme differenziali esterne (pres. dal Corrisp. B. SEGRE).

CORBELLINI A. e LANZA P. - Coulombometria di sostanze gassose (pres. dal Corrisp. G. SEMERANO).

FERRO R. - Sulle leghe dell'Uranio col Bismuto (pres. dal Socio L. ROLLA).

GIANNUZZI M. A. - Relazione tra l'umidità atmosferica assoluta ed il coefficiente di trasmissione della radiazione solare, secondo le misure eseguite all'Osservatorio di Roma dal 1935 al 1950 (pres. dal Socio G. ARMELLINI).

LANZA P. e CORBELLINI A. - Sulla determinazione di n nell'elettrolisi polarografica accompagnata da processi secondari (pres. dal Corrisp. G. SEMERANO).

PUCCI C. - Maggiorazione della soluzione di un problema al contorno, di tipo misto, relativo a una equazione a derivate parziali, lineare, del secondo ordine (pres. dal Socio M. PICONE).

TRUSDELL C. - La velocità massima nel moto di Gromeka-Beltrami (pres. dal Socio M. PICONE).

Il Socio Bompiani informa l'Accademia che l'Unione Matematica Internazionale è entrata a far parte, dal 1° ottobre 1952, del Consiglio Internazionale delle Unioni Scientifiche (ICSU) quale Unione generale, cioè con tre voti nelle Assemblee dell'ICSU. I nuovi membri della Presidenza dell'ICSU

eletti durante l'Assemblea generale tenuta ad Amsterdam (1-3 ottobre 1952) sono: B. Lindblad (Presidente), H. Solberg (Vice-Presidente), E. Herbays (Vice-Presidente), W. Albert Noyes Jr. (Tesoriere), A. V. Hill (Segretario generale).

Il Presidente, prima di chiudere la seduta, informa i Colleghi che domani avrà luogo alla Farnesina l'inaugurazione della Mostra dei modelli delle macchine di Leonardo da Vinci che sono stati realizzati e cortesemente concessi da una grande industria americana, la I.B.M., che ha voluto così onorare il genio di Leonardo e, nel presentare detti modelli in Europa, ha voluto che questa presentazione avvenisse per la prima volta per il tramite della nostra Accademia.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta dell'8 novembre 1952

- ABEILLE Mario. — *Tavole sintetiche di logaritmi a sei decimali*. Roma, Pinnarò, 1951. Pp. 35, in-16°.
- A l f o n s Leon. *Gedenkschrift*. Wien, «Allgemeine Bau-Zeitung», 1952. Pp. 100, in-4°, con figg.
- AMALDI Ugo. — Vedi: LEVI-CIVITA Tullio e AMALDI Ugo.
- Archivio internazionale di fotogrammetria. Organo della Società internazionale di fotogrammetria. Vol. IX, fasc. I. Redazione del prof. dr. ing. Gino Cassinis. Roma, 1941-47.
- AUTENRIETH (v.) Johann Heinrich Ferdinand. — Vedi: STÜBLER E.
- BAGGIOLINI Raimondo. — *Nuovi orizzonti nella fisica atomica e nella chimica*. Lugano, «Giornale del Popolo», 1952. Pp. 88, in-8°, con figg.
- BAILEY V. A. — Vedi: *Resonance in gyro-interaction of radio waves*.
- BERTOLOTTI Mario. — Vedi: UNIVERSITÀ di NAPOLI.
- CAMPEDELLI Luigi. — *Guido Castelnuovo*. Estr. da «Bollettino della Unione Matematica Italiana», s. 3ª, a. VII, 1952, n. 2.
- CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE. — *Contributi di scienze geologiche con particolare riguardo all'Italia Centrale, Meridionale e alla Sicilia*. Vol. II. Presentazione di Ramiro Fabiani. Roma, 1952. Pp. 138, in-8° (Suppl. a «La Ricerca Scientifica», a. XXII, 1952).
- CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE. — *Convegno sulla difesa del suolo e le sistemazioni fluviali e montane*. Milano, 16-19 aprile 1952 (2ª giornata della scienza indetta dal C.N.R. in occasione della 30ª Fiera di Milano). Roma, 1952. Pp. XXIX-316, in-8°, con figg. (Suppl. a «La Ricerca Scientifica», a. XXII, 1952, n. 4).
- COOK E. Fullerton and MARTIN Eric W. — *Remington's Practice of Pharmacy*. 9ª ed. Easton Pa., the Mack Publishing Company, 1948. Pp. XII-1511, in-4°.
- CUTOLO M. — *Su di un nuovo fenomeno di interazione fra onde ed elettroni liberi sottoposti al campo magnetico terrestre*. Estr. da «Il Nuovo Cimento», vol. IX, n. 8.
- DEMBOWSKI Jan. — *L'organizzazione della scienza polacca*. Roma, Associazione culturale italo-polacca, 1952. Pp. 59, in-8°.
- FABIANI Ramiro. — *I «Parchi Nazionali» meraviglie della natura*. Brescia, Soc. Ed. «La Scuola», 1952. Pp. 56, in-8°, con figg. (Scienza e lavoro. Quaderni di divulgazione scientifica).
- FABIANI Ramiro. — Vedi: CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE.
- Vedi: *Paleontologia di Sahabi (Cirenaica)*.
- FANTOLI Amilcare. — *Le piogge della Libia con particolare riguardo alle zone di annaffiamento*. Roma, Ufficio Studi del Ministero Africa Italiana, 1952. Pp. 529, in-8°, con tavv.

- FEDUCHY MARINO Enrique. — Vedi: MARCILLA ARRAZOLA Juan y FEDUCHY MARINO Enrique, etc.
- FRUMENTO Armando. — *Imprese lombarde nella storia della siderurgia italiana. Il contributo dei Falck*. Vol. I: 1833-1913. Milano, 1952. Pp. 274, in-8°.
- GIOVENCO Onofrio. — *Qualche sorso d'acqua può troncane l'eccesso di pertosse nei bambini d'età superiore ai due anni*. Genova, A. Lunghi, 1932. Pp. 16, in-8°.
- HIDALGO FERNANDEZ-CANO Luis. — Vedi: MARCILLA ARRAZOLA Juan y HIDALGO FERNANDEZ-CANO Luis.
- HOWARD Grace F. — *Lichens of the State of Washington*. Seattle, University of Washington, 1950. Pp. IX-191, in-8°.
- ISTITUTO CENTRALE DI STATISTICA. — *Classificazioni delle malattie e cause di morte deliberate dalla VI Conferenza internazionale per la revisione delle nomenclature nosologiche*. Roma, Tip. F. Failli, 1952. Pp. 274, in-8°.
- JARRETT A. H. — *Production of a High Resolving Power by means of Multilayer Coatings*. Estr. da «Nature», vol. CLXIX, 1952.
- JUNKES Giuseppe. — Vedi: STEIN Giovanni e JUNKES Giuseppe.
- KIVIOJA L. — Vedi: NISKANEN E. and KIVIOJA L.
- KLÜBER (von) H. — *Beobachtungen der Sonnenfinsternis vom 25 Februar 1952 im Sudan*. Estr. da «Die Naturwissenschaften», a. XXXIX, 1952, fasc. 9.
- DER KONGRESS (I) DER INTERNATIONALEN FREIEN AKADEMIE BAD MÜNSTER AM STEIN 1950. — *Vorträge und Referate*. Bad Kreuznach, 1951. Pp. 315, in-8°.
- LANDECKER K. — Vedi: *Resonance in gyro-interaction of radio waves*.
- LASORSA Giovanni. — *Aspetti demografici economici sociali e approvvigionamento idrico della Puglia*. Bari, Ente Autonomo per l'Acquedotto Pugliese, 1952. Pp. VII-189, in-8°, con tavv.
- LEON Alfons. — Vedi: *Alfons Leon. Gedenkschrift*.
- LEVI-CIVITA Tullio e AMALDI Ugo. — *Lezioni di meccanica razionale*. Vol. II: *Dinamica dei sistemi con un numero finito di gradi di libertà*. Parte seconda. Nuova ed. Bologna, Zanichelli, 1952. Pp. IX-671, in-8°.
- MARCILLA ARRAZOLA Juan y FEDUCHY MARINO Enrique, etc. — *Condiciones óptimas de proliferación de la Torulopsis utilis - Var. magna de Thaysen - Sobre prehidrolizados de carozo de maíz (Mazorcas desgranadas)*. Estr. da «Microbiología Española», vol. III, n. 3-4.
- MARCILLA ARRAZOLA Juan y HIDALGO FERNANDEZ-CANO Luis. — *Posibilidad de fabricar levaduras prensadas sobre prehidrolizados de residuos agrícolas*. Estr. da «Microbiología Española», vol. III, n. 2.
- MARTIN Eric W. — Vedi: COOK Fullerton and MARTIN Eric W.
- MORANDI Luigi. — *L'industria chimica italiana nel 1951*. Estr. da «La Chimica e l'Industria», a. XXXIV, 1952.
- NISKANEN E. and KIVIOJA L. — *Topographic-isostatic World Maps of the Effect of the Hayford Zones 10 to 1 for the Airy-Heiskanen and Pratt-Hayford systems*. Estr. da «Annales Academiae Scientiarum Fennicae», S. A, III, Geologica-Geographica, 28.
- Paleontologia di Sahabi (Cirenaica)*. — Monografia sotto la direzione dell'Accademico Ramiro Fabiani. Ramiro FABIANI: Introduzione generale. Parte I. Roma, Accad. Naz. dei XL, 1951. Pp. 117, in-4°, con tavv. (Estr. dai «Rend. dell'Acc. Naz. dei XL», s. IV, vol. III).
- PIERACCINI Gaetano. — *La natalità mondiale umana e la natura equilibratrice*. Roma, Istituto di Medicina Sociale, 1952. Pp. 70, in-8° (Collana di studi sui problemi medico-sociali, 16).
- Resonance in gyro-interaction of radio waves* by prof. V. A. Bailey, R. A. Smith, K. Landecker, ecc. Estr. da «Nature», vol. CLXIX, 1952.
- RUSSO Achille. — *Identità di fenomeni sessuali nei Metazoi ed in un Protozoo (Cryptochilum echini Mps)*. Estr. da «Atti della Accademia Gioenia di Scienze Naturali in Catania», s. 6ª, vol. VIII, 1951-52.
- SMITH R. A. — Vedi: *Resonance in gyro-interaction of radio waves*.
- STEIN Giovanni e JUNKES Giuseppe. — *La Specola Vaticana nel passato e nel presente*. Città del Vaticano, Specola Vaticana, 1952. Pp. 67, in-8°, con tavv.
- STÜBLER E. — *Johann Heinrich Ferdinand v. Autenrieth. 1772-1835*. Stuttgart, August Schröder, 1948. Pp. 128, in-8°, con tavv.

- TONELLI Leonida. — Vedi: UNIVERSITÀ DI PISA.
- TRAVASSOS Haroldo. — «*Characidium ja-puhybensis*» n. sp. (*Actinopterygii, Osteocephali*). Estr. da «*Rev. Brasil Biol.*», 9 (2), 1949.
- *Estudo da região opercular de três espécies de Paradontinae Eigenmann, 1910 (Actinopterygii-Cypriniformes)*. Estr. da «*Boletim do Museu Nacional*», Zoologia, n. s., 1951, n. 103.
- *Estudo de alguns ossos da região oromandibular de três espécies de Paradontinae Eigenmann, 1910 (Actinopterygii-Cypriniformes)*. Estr. da «*Boletim do Museu Nacional*», Zoologia, n. s., 1952, n. 108.
- *Sobre a dentição de Leporinus striatus Kner, 1859 (Actinopterygii, Characidae)*. Estr. da «*Rev. Brasil. Biol.*», 11 (2), 1951.
- *Sobre a presença de dentes pterigoidianos em «Characidium» Reinhardt, 1866 (Actinopterygii, Osteocephali)*. Estr. da «*Rev. Brasil. Biol.*», 9 (3), 1949.
- *Sobre o subgênero Iobertina Pellegrin, 1909, com uma nova subfamília (Actinopterygii, Cypriniformes)*. Estr. da «*Boletim do Museu Nacional*», Zoologia, n. s., 1952, n. 109.
- UCELLI Guido. — *La «Riva», 1861-1951* Milano, Alfieri e Lacroix, 1951. Pp. 145, in-4.
- UNIVERSITÀ DI NAPOLI. — Mario Beriolotti. Napoli, 1951. Pp. 80, in-8°, con tavv.
- UNIVERSITÀ DI PISA. — Leonida Tonelli. In memoriam. Pisa, Arti Graf. Tornar, 1952. Pp. IV-193, in-8°.
- UNIVERSITAS BELGICA. — *Inventaire des Ressources Scientifiques Belges. I: Sciences générales de l'homme. IV: Sciences médicales, biomédicales, pharmaceutiques et appliquées*. Bruxelles, 1949 e 1950. Voll. 2, in-8°.
- VAGLIASINDI Carmelo. — *L'Etna durante il periodo glaciale e la formazione della Valle del Bove*. Studio geomorfologico. Catania, Tip. Coniglione & Giuffrida, 1949. Pp. 79, in-4°, con tavv. (Istituto Geopaleontologico-Università Catania. Memorie, s. 2ª, n. 1).
- *I fenomeni geologici ciclici*. Appendice alla Memoria: «Nuova teoria sull'avvento del Glaciale, etc. Catania 1951». Randazzo, Tip. F. Gemmellaro, 1952. Pp. 7, in-4°.
- *Nuova teoria sull'avvento del Periodo Glaciale. Nuove prove delle Pliocenicità dell'Etna e chiarimenti sul Glaciale Etneo*. Catania, Tip. Coniglione & Giuffrida, 1951. Pp. 60, in-4°.
- ZOCCOLA Alfonso. — *Os Prodígios do Éter. A gravitação universal è um «mito»*. S. Paulo, 1952. Pp. 155, in-8°.

D. DE BLASI e U. AMALDI.

Se δ è il raggio del massimo cerchio contenuto in D , sussiste la disuguaglianza

$$(10) \quad \alpha < k\delta\lambda$$

dove k dipende soltanto dall'ordine di connessione di D ⁽¹⁶⁾.

Il dominio D si può supporre anche multivalente, cioè involucro di un campo riemanniano B . I cerchi da considerare saranno allora in generale multivalenti ossia a più fogli (intorni circolari su D). Ma li si potranno sostituire (modificando nella (10) la costante k) con cerchi semplici cioè univalenti, come si dimostra mediante semplici considerazioni topologiche (formola di Hurwitz ⁽¹⁷⁾). Dunque l'enunciato precedente sussiste per campi multivalenti e cerchi univalenti.

Chiamiamo una disuguaglianza della forma $\alpha < K\lambda$, con K fisso, disuguaglianza isoperimetrica condizionata, in quanto valida soltanto in particolari famiglie di campi ⁽¹⁸⁾; il tipo più semplice è ovviamente quello delle famiglie di campi *equilimitati*.

10. Torniamo alla funzione pseudo-analitica $w(z)$, assegnata nel campo A limitato o illimitato; definito il comportamento di $w(z)$ all'infinito come per le funzioni analitiche, cioè mediante riduzione al finito, si potranno anche considerare campi contenenti il punto ∞ .

Rifacendoci alle notazioni del n. 6, consideriamo l'area $F(r)$ della immagine del cerchio $C(r)$ di centro z_0 e raggio r , e poniamo

$$f(\rho) = \sqrt{\frac{dF}{d\rho}} = \left[\int_{\gamma(\rho)} J ds \right]^{1/2}.$$

Ammettiamo che la disuguaglianza isoperimetrica condizionata sia verificata nel campo riemanniano B immagine di A , per un dato valore del coefficiente K ; risulterà

$$F(r) = \int_{C(r)} J dx dy = \int_0^r f^2(\rho) d\rho \leq K \int_{\gamma(r)} \Phi ds \leq \frac{K}{\sqrt{\mu}} \int_{\gamma(r)} \sqrt{J} ds \leq K \sqrt{\frac{2\pi r}{\mu}} f(r),$$

e pertanto (per quasi tutti i valori di r)

$$(11) \quad K \sqrt{\frac{2\pi r}{\mu}} f(r) - \int_0^r f^2(\rho) d\rho > 0,$$

(16) Per un dominio semplicemente connesso si potrebbe prendere $k = 1$.

(17) $C = nc + w$, dove c è la caratteristica di una superficie s e C quello di una superficie ricoprente S ad n fogli su s , col numero di diramazione w . Per un cerchio s si ha $c = -1$; a noi interessa poi sostanzialmente il caso che anche $C = -1$, il dominio D essendo semplicemente connesso: allora $n = w + 1$. Si potrebbe prendere in tal caso $k = 1/2$.

(18) Disuguaglianze di questo e di tipi più generali (per esempio $\alpha < k\lambda^{2-\varepsilon}$) sono state considerate sopra tutto nello studio dei tipi conformi delle riemanniane semplicemente connesse. Ved. i lavori citati in (1): AHLFORS, n. 25; LAVRENTIEFF, § 4. Cfr. anche PFLUGER, 1^a nota citata.

donde, applicando il lemma del n. 8,

$$(12) \quad F(r) < \frac{2\pi K^2}{\mu} \frac{1}{\log R/r},$$

$R > r$ essendo il raggio di un cerchio concentrico a $C(r)$ e contenuto in $A^{(9)}$; donde in particolare il risultato invocato nel n. 7.

Questa disuguaglianza e la (8) (n. 6) forniscono una limitazione per l'oscillazione $\omega(C_0)$ di $w(z)$ nel cerchio $C_0 = C(r_0)$; ponendo per esempio $r = \sqrt{R r_0}$ si trova

$$(13) \quad \omega(C_0) < \frac{2\pi K}{\mu} \frac{1}{\log R/r_0}.$$

Conseguenza immediata (per $R \rightarrow \infty$) è che *una funzione pseudo-analitica non costante non può essere limitata in tutto il piano* (teorema di Liouville per le funzioni analitiche).

Dai risultati del n. 6 segue poi il teorema:

Il coefficiente K di una disuguaglianza isoperimetrica condizionata in B determina un modulo di continuità (holderiana con l'esponente μ) internamente ad $A^{(20)}$.

Sappiamo inoltre (n. 7) che il limite di una successione uniformemente convergente di funzioni della classe C_μ appartiene anch'essa a questa classe; di qui la proposizione seguente:

Entro una classe C_μ , funzioni per le quali una medesima disuguaglianza isoperimetrica condizionata sia verificata nei relativi campi riemanniani costituiscono una famiglia normale (cioè compatta).

Naturalmente in quest'enunciato, analogamente a quanto si suol fare nella teoria delle famiglie normali di funzioni analitiche, è inclusa fra le funzioni la costante ∞ .

Applicando poi il lemma geometrico del numero precedente, giungiamo al seguente criterio di normalità (di Bloch nella teoria delle funzioni analitiche):

Una famiglia di funzioni della classe C_μ è normale quando i campi riemanniani relativi a queste non contengono cerchi semplici (univalenti) i cui raggi eccedano un limite fisso.

11. Dal lemma del n. 8 si deduce un altro risultato fondamentale, relativo ai punti singolari isolati di una funzione pseudo-analitica; sono questi i punti in cui viene a mancare la continuità per la funzione, pseudo-analitica in tutto un intorno.

Dimostreremo che *una funzione pseudo-analitica non può conservarsi limitata nell'intorno di un punto singolare isolato.*

È lecito supporre che si tratti del punto ∞ ; $w(z)$ sarà quindi pseudo-analitica per $|z| > r_0$. Ammesso che si conservi limitata, nel relativo

(19) Per un procedimento analogo ma meno preciso, cfr. AHLFORS, loc. cit. (1), n. 24.

(20) Supposto limitato o ridotto tale; oppure direttamente sulla sfera complessa.

Se δ è il raggio del massimo cerchio contenuto in D , sussiste la disuguaglianza

$$(10) \quad \alpha < k\delta\lambda$$

dove k dipende soltanto dall'ordine di connessione di D ⁽¹⁶⁾.

Il dominio D si può supporre anche *multivalente*, cioè involucro di un campo riemanniano B . I cerchi da considerare saranno allora in generale multivalenti ossia a più fogli (intorni circolari su D). Ma li si potranno sostituire (modificando nella (10) la costante k) con cerchi semplici cioè univalenti, come si dimostra mediante semplici considerazioni topologiche (formola di Hurwitz ⁽¹⁷⁾). Dunque l'enunciato precedente sussiste per *campi multivalenti e cerchi univalenti*.

Chiamiamo una disuguaglianza della forma $\alpha < K\lambda$, con K fisso, *disuguaglianza isoperimetrica condizionata*, in quanto valida soltanto in particolari famiglie di campi ⁽¹⁸⁾; il tipo più semplice è ovviamente quello delle famiglie di campi *equilimitati*.

10. Torniamo alla funzione pseudo-analitica $w(z)$, assegnata nel campo A limitato o illimitato; definito il comportamento di $w(z)$ all'infinito come per le funzioni analitiche, cioè mediante riduzione al finito, si potranno anche considerare campi contenenti il punto ∞ .

Rifacendoci alle notazioni del n. 6, consideriamo l'area $F(r)$ della immagine del cerchio $C(r)$ di centro z_0 e raggio r , e poniamo

$$f(\rho) = \sqrt{\frac{dF}{d\rho}} = \left[\int_{\gamma(\rho)} J ds \right]^{1/2}.$$

Ammettiamo che la disuguaglianza isoperimetrica condizionata sia verificata nel campo riemanniano B immagine di A , per un dato valore del coefficiente K ; risulterà

$$F(r) = \int_{C(r)} J dx dy = \int_0^r f^2(\rho) d\rho \leq K \int_{\gamma(r)} \Phi ds \leq \frac{K}{\sqrt{\mu}} \int_{\gamma(r)} \sqrt{J} ds \leq K \sqrt{\frac{2\pi r}{\mu}} f(r),$$

e pertanto (per quasi tutti i valori di r)

$$(11) \quad K \sqrt{\frac{2\pi r}{\mu}} f(r) - \int_0^r f^2(\rho) d\rho > 0,$$

(16) Per un dominio semplicemente connesso si potrebbe prendere $k = 1$.

(17) $C = nc + w$, dove c è la caratteristica di una superficie s e C quello di una superficie ricoprente S ad n fogli su s , col numero di diramazione w . Per un cerchio s si ha $c = -1$; a noi interessa poi sostanzialmente il caso che anche $C = -1$, il dominio D essendo semplicemente connesso: allora $n = w + 1$. Si potrebbe prendere in tal caso $k = 1/2$.

(18) Disuguaglianze di questo e di tipi più generali (per esempio $\alpha < k\lambda^{2-\varepsilon}$) sono state considerate sopra tutto nello studio dei *tipi conformi* delle riemanniane semplicemente connesse. Ved. i lavori citati in (1): AHLFORS, n. 25; LAVRENTIEFF, § 4. Cfr. anche PFLUGER, 1^a nota citata.

donde, applicando il lemma del n. 8,

$$(12) \quad F(r) < \frac{2\pi K^2}{\mu} \frac{1}{\log R/r},$$

$R > r$ essendo il raggio di un cerchio concentrico a $C(r)$ e contenuto in $A^{(19)}$; donde in particolare il risultato invocato nel n. 7.

Questa disuguaglianza e la (8) (n. 6) forniscono una limitazione per l'oscillazione $\omega(C_0)$ di $w(z)$ nel cerchio $C_0 = C(r_0)$; ponendo per esempio $r = \sqrt{Rr_0}$ si trova

$$(13) \quad \omega(C_0) < \frac{2\pi K}{\mu} \frac{1}{\log R/r_0}.$$

Conseguenza immediata (per $R \rightarrow \infty$) è che una funzione pseudo-analitica non costante non può essere limitata in tutto il piano (teorema di Liouville per le funzioni analitiche).

Dai risultati del n. 6 segue poi il teorema:

Il coefficiente K di una disuguaglianza isoperimetrica condizionata in B determina un modulo di continuità (holderiana con l'esponente μ) internamente ad $A^{(20)}$.

Sappiamo inoltre (n. 7) che il limite di una successione uniformemente convergente di funzioni della classe C_μ appartiene anch'essa a questa classe; di qui la proposizione seguente:

Entro una classe C_μ , funzioni per le quali una medesima disuguaglianza isoperimetrica condizionata sia verificata nei relativi campi riemanniani costituiscono una famiglia normale (cioè compatta).

Naturalmente in quest'enunciato, analogamente a quanto si suol fare nella teoria delle famiglie normali di funzioni analitiche, è inclusa fra le funzioni la costante ∞ .

Applicando poi il lemma geometrico del numero precedente, giungiamo al seguente criterio di normalità (di Bloch nella teoria delle funzioni analitiche):

Una famiglia di funzioni della classe C_μ è normale quando i campi riemanniani relativi a queste non contengono cerchi semplici (univalenti) i cui raggi eccedano un limite fisso.

11. Dal lemma del n. 8 si deduce un altro risultato fondamentale, relativo ai punti singolari isolati di una funzione pseudo-analitica; sono questi i punti in cui viene a mancare la continuità per la funzione, pseudo-analitica in tutto un intorno.

Dimostreremo che una funzione pseudo-analitica non può conservarsi limitata nell'intorno di un punto singolare isolato.

È lecito supporre che si tratti del punto ∞ ; $w(z)$ sarà quindi pseudo-analitica per $|z| > r_0$. Ammesso che si conservi limitata, nel relativo

(19) Per un procedimento analogo ma meno preciso, cfr. AHLFORS, loc. cit. (1), n. 24.

(20) Supposto limitato o ridotto tale; oppure direttamente sulla sfera complessa.

campo riemanniano B varrà la disuguaglianza isoperimetrica condizionata. Consideriamo allora una corona circolare $\Gamma(r)$ con centro nell'origine e raggi $r_0, r > r_0$; e indichiamo con $G(r)$ l'area $\int_{\Gamma(r)} dx dy$ della sua immagine. Maggiorando $G(r)$ come dianzi $F(r)$, otteniamo in luogo della (11) la disuguaglianza

$$K \left| \sqrt{\frac{2\pi r}{\mu}} f(r) - \int_{r_0}^r f^2(\rho) d\rho + c > 0, \right.$$

dove c indica la lunghezza dell'immagine (scelta rettificabile) di $\gamma(r_0)$; ne consegue, come per la (12),

$$G(r) < \frac{2\pi K^2}{\mu} \frac{1}{\log R/r} + c.$$

La disuguaglianza analoga alla (8), per $G(r)$, si scrive

$$G(r) > \frac{2\mu}{\pi} \log \frac{r}{r_0} \tau^2(r)$$

dove $\tau(r)$ indica la minore fra le oscillazioni di $w(z)$ su $\gamma(r_0)$ e $\gamma(r)$; col procedimento che ci ha condotti alla (13), ponendo $r = \sqrt{Rr_0}$, otteniamo allora

$$\tau^2(r) < \frac{4\pi^2 K^2}{\mu^2} \frac{1}{\log^2 R/r} + \frac{\pi}{\mu} \frac{c}{\log R/r},$$

dove $\lim_{r \rightarrow \infty} \tau(r) = 0$. Ne segue che $w(z)$ è continua nel punto ∞ , che non può pertanto essere singolare.

Si vede anzi di più, la disuguaglianza isoperimetrica condizionata essendo applicabile, in virtù del nostro lemma geometrico, sempre che siano limitabili i raggi dei cerchi semplici contenuti in B : *Se una funzione pseudo-analitica presenta all'infinito una singolarità isolata, il relativo campo riemanniano contiene cerchi semplici di raggio arbitrariamente grande* (teorema di Valiron per le funzioni analitiche).

12. Dalla condizione di normalità data nel n. 10 segue immediatamente il criterio dell'equilimitatezza:

Una famiglia di funzioni equilimate della classe C_μ è normale ⁽²¹⁾.

Anche il criterio dei valori eccettuati si estende subito, ricorrendo, come per le funzioni analitiche, alla *trasformazione di Bloch*.

Consideriamo una funzione pseudo-analitica che non assuma in A due valori; è lecito ammettere che questi siano 0 e 1, e basta limitarsi al caso

(21) Se ne deduce subito una estensione parziale e « qualitativa » del lemma di Schwarz: *Se $|w(z)| < 1$ in A , $|w(z)| \leq \theta(D) < 1$ nel dominio D interno ad A , θ non dipendendo che da D .* Per risultati particolari più precisi, ved. PFLUGER, 1^a nota citata; HERSCH e PFLUGER, loc. cit. (1).

che A sia semplicemente connesso. La detta trasformazione consiste nel passaggio alla funzione

$$\zeta(z) = \log \left[\sqrt{\frac{1}{2\pi i} \log w} + \sqrt{\frac{1}{2\pi i} \log w - 1} \right],$$

suscettibile di determinazione monodroma in A .

$\zeta(z)$ non assumendo nessuno dei valori

$$\pm \log(\sqrt{m} + \sqrt{m-1}) + i \frac{n\pi}{2} \quad (m, n \text{ interi}; m > 0)$$

il relativo campo riemanniano B non contiene per esempio cerchi di raggio 1, e si applica il nostro lemma geometrico ⁽²²⁾; per la funzione $\zeta(z)$ si può dunque assegnare un modulo di continuità.

Ripassiamo ora alla funzione data,

$$w = -e^{\frac{\pi i}{2}(e^{2\zeta} + e^{-2\zeta})};$$

una conseguenza pressoché immediata è l'estensione alle funzioni pseudo-analitiche del teorema di Schottky. A sia il cerchio $|z| < R$, nel cui centro sia assegnato il valore $w(0) = w_0$ della funzione $w(z)$ non assumente in A i valori 0 e 1; il corrispondente valore $\zeta_0 = \zeta(0)$ sia fissato per esempio scegliendo nella espressione di ζ le determinazioni principali. Si limiteranno $|\zeta_0|$ e l'oscillazione di $\zeta(z)$ nel cerchio $|z| \leq r < R$ in funzione di $|w_0|$ e di r , mediante la (13); e se ne trarrà una corrispondente limitazione per $|w|$. Possiamo quindi enunciare il teorema:

Se una funzione pseudo-analitica non assume due assegnati valori in un cerchio di raggio R , la si può limitare entro ogni cerchio concentrico di raggio $r < R$, in funzione crescente di r e del modulo del suo valore nel centro.

Per $\mu = 1$ si ottiene il teorema di Schottky, precisato anzi secondo Landau (perché di $|w_0|$ non occorre sostanzialmente che un limite superiore ⁽²³⁾).

Considerando infinite funzioni che presentino tutte gli stessi due valori eccettuati si ottiene il criterio previsto:

Una famiglia di funzioni della classe C_μ tutte non assumenti due dati valori è normale.

A questo punto è chiaro come si estenda alle funzioni pseudo-analitiche il teorema generale di Picard: basta ripetere letteralmente, a partire dal criterio stabilito e dal risultato del numero precedente sui punti singolari isolati, la ben nota dimostrazione di P. Montel ⁽²⁴⁾. In forma geometrica, eliminando col riferimento alla sfera complessa la distinzione tra finito e infinito, il teorema si enuncia come segue:

Un'immagine pseudo-conforme dell'intorno di un punto, questo escluso, se non è anch'essa l'intorno di un punto, ricopre tutta la sfera, due punti al più eccettuati.

(22) Si potrà porre $K = \pi/4$ nella disequaglianza isoperimetrica condizionata.

(23) Ved. LANDAU, *Ergebnisse der Funktionentheorie* (Springer, Berlin, 1929), p. 103.

(24) *Leçons sur les familles normales* (« Coll. Borel », Paris 1927), n. 42.

Abbiamo qui un'estensione « qualitativa » del teorema di Picard, ed insieme una dimostrazione « elementare » che ne mette in evidenza il semplice contenuto geometrico ⁽²⁵⁾.

13. Ci proponiamo ora di estendere i teoremi di Bloch e di Landau. Occorrerà trasformarne gli enunciati, poiché la derivate ivi considerate (in modulo) mancano alle funzioni pseudo-analitiche: le surrogheremo con i rapporti $|\Delta w|/|\Delta z|^\mu$, *rapporti incrementali hölderiani con l'esponente* μ .

Abbiamo indicato con $H(C_0) = H(z_0, r_0)$ il rapporto $F(r_0)/r_0^{2\mu}$ per il cerchio $C_0 \equiv C(z_0, r_0)$; denoteremo l'estremo superiore di

$$\frac{|w(z) - w(z_0)|}{|z - z_0|^\mu}$$

in C_0 con $h(C_0) = h(z_0, r_0)$, e lo diremo un *coefficiente* ⁽²⁶⁾ *hölderiano relativo all'esponente* μ , nel punto z_0 . Come abbiamo dedotto dalla (8) nel n. 6, $h(C_0)$ si conserva limitato (per r_0 sufficientemente piccolo) in ogni porzione (limitata) interna di A ; precisamente, $h(C_0)$ è limitabile proporzionalmente a $\sqrt{H(C_0)}$, essendo C_0 un cerchio di raggio $r' > r_0$, per esempio $2r_0$.

Combinando fra loro le disuguaglianze (9) e (12) (supposta verificata la disuguaglianza isoperimetrica condizionata per un certo valore del coefficiente K), si ottiene

$$(14) \quad r^{2\mu} \log \frac{R}{r} H(C_0) < \frac{2\pi K^2}{\mu} \quad (R > r > r_0).$$

Indichiamo con $\lambda(R, r_0)$ il massimo di $r^{2\mu} \log \frac{R}{r}$ al variare di r nell'intervallo (r_0, R) ; ponendo

$$\lambda(R, r_0) = R^{2\mu} \lambda\left(1, \frac{r_0}{R}\right) = R^{2\mu} \lambda\left(\frac{r_0}{R}\right),$$

dalla (14) si trae

$$(15) \quad \lambda\left(\frac{r_0}{R}\right) R^{2\mu} H(C_0) < \frac{2\pi K^2}{\mu}.$$

Questa disuguaglianza fondamentale può trasformarsi introducendovi $h(C_0)$ in luogo di $H(C_0)$; scrivendola per esempio per $r' = \frac{R+r_0}{2}$ e tenendo presente la (8), si ottiene

$$(16) \quad \sqrt{\log \frac{R+r_0}{2r_0} \lambda\left(\frac{R+r_0}{2R}\right)} R^\mu h(C_0) < \frac{\pi K}{\mu}.$$

(25) Estensioni del teorema generale di Picard a funzioni pseudo-analitiche non sono ancora state considerate, almeno ch'io sappia, che per ricondurle al teorema stesso per funzioni analitiche; mascherandone così l'intima natura, affatto indipendente dalle proprietà specialissime di queste funzioni; cfr. LAVRENTIEFF, loc. cit. (1), § 3. Invece il contenuto essenzialmente topologico del primo teorema di Picard (sulle funzioni intere) è stato rivelato dalle citate ricerche di Ahlfors.

(26) Nel senso di coefficiente di dilatazione lineare massimo.

14. I teoremi cercati si deducono facilmente dalla (15) o dalla (16). Dati invero R, r_0 , e $H(C_0)$ o $h(C_0)$, risulta inferiormente limitato K e quindi anche, in forza del lemma geometrico, il raggio δ del massimo cerchio semplice contenuto in $C(z_0, R)$; più precisamente, limitato proporzionalmente a $\sqrt{H(C_0)}$ o $h(C_0)$. In forma geometrica:

Un'immagine pseudo-conforme di un cerchio C di dato raggio contiene un cerchio semplice, il cui raggio dipende da un coefficiente hölderiano di dilatazione (lineare o superficiale) nel centro di C (nonché dal raggio del relativo cerchio C_0).

La limitazione ottenuta per δ diventa insignificante quando $r_0 \rightarrow R$, perché $\lambda(1) = 0$; e generalmente anche, se $\mu < 1$, per $r_0 \rightarrow 0$, in quanto $\lim_{r_0 \rightarrow 0} H(z_0, r_0) = 0$

quasi ovunque⁽²⁷⁾. Ma se $\mu = 1$, $w(z)$ è analitica, $\lim_{r_0 \rightarrow 0} H(C_0) = \pi \left| \frac{dw}{dz} \right|^2$, e si conserva una limitazione effettiva sempre che $\frac{dw}{dz} \neq 0$: si ritrova così il teorema di Bloch.

Quanto al teorema di Landau, non v'è che da applicare la (15) o la (16) alla trasformata di Bloch $\zeta(z)$ (numero precedente), per limitare superiormente R , poiché $\lim_{R \rightarrow \infty} \lambda(R, r_0) = \infty$. Questa limitazione si effettua dapprima

per il tramite di un coefficiente hölderiano H' o h' relativo alla funzione $\zeta(z)$: in ciò consiste una formulazione grezza, per dir così, del nostro teorema⁽²⁸⁾; dal quale però già si deduce, se $\mu = 1$, quello di Landau per $r_0 \rightarrow 0$.

Ma supponiamo assegnati per $w(z)$ un coefficiente hölderiano $h(C_0)$ ed il valore $w_0 = w(0)$, e fissiamo $\zeta(0)$ per esempio attraverso le determinazioni principali: è chiaro allora che si potrà limitare inferiormente il rapporto incrementale $\left| \frac{\zeta(z) - \zeta(0)}{w(z) - w(0)} \right|$ in C_0 , quindi $h'(C_0)$ mediante $h(C_0)$; infine si limiterà superiormente R . Geometricamente il risultato si enuncia come segue:

Se un'immagine pseudo-conforme di un cerchio C include un punto dato, come immagine del centro, e ne esclude due altri, il raggio di C risulta limitato in funzione (decrecente) di un coefficiente hölderiano di dilatazione lineare nel centro (nonché in dipendenza del raggio del relativo cerchio C_0).

La limitazione diventa insignificante (cioè il limite superiore ottenuto tende a ∞) quando $h(C_0) \rightarrow 0$.

15. Consideriamo ora il caso particolare di funzioni $w(z)$, cioè di campi riemanniani B , *univalenti*: daremo un'estensione del teorema di Koebe (*Verzerrungssatz*).

Premettiamo un'osservazione: la (8) del n. 6 si può stabilire, esclusione fatta per l'ultimo membro, anche se $C(r)$ non appartiene interamente ad

(27) In punti speciali può essere finito e non nullo il limite del rapporto $\left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right|^\mu$. Questa circostanza si presenta in certi risultati di Pfluger (ved. lavori citati in (1)).

(28) È in questa forma che si trova enunciato nelle mie Note dei « Comptes Rendus », dove peraltro mi sono limitato a considerare coefficienti hölderiani superficiali.

A, indicando allora $C(r)$ e $\gamma(r)$ le porzioni del cerchio e della circonferenza che cadono in A. Supponiamo poi che B sia un cerchio semplice: una modificazione quasi ovvia dell'ultimo membro conduce alla disuguaglianza

$$(17) \quad F(r) > \frac{\mu}{2\pi} \log \frac{r}{r_0} \omega^2(\Gamma_0),$$

dove Γ_0 denota, tra la porzione C_0 di A e la complementare, quella cui spetta l'oscillazione ω minore ⁽²⁹⁾.

Ciò posto, sia A il cerchio $|z| < 1$, e si consideri in A una funzione univalente $w(z)$, con $w(0) = 0$: le funzioni fra loro inverse $w(z)$ e $z(w)$ definiscono le trasformazioni T e T^{-1} , di A in B e di B in A, in cui le origini si corrispondono.

Sia dato un coefficiente hölderiano superficiale H_0 per $w(z)$, cioè per T, relativo all'origine ed al cerchio di raggio δ ; ne risulta una limitazione inferiore per il diametro $2d$ di B, poiché, in forza della (9), l'area dell'immagine del cerchio di raggio $\rho > \delta$ è $\geq H_0 \rho^{2\mu}$. Fissato comunque w_0 in B, e applicando la (17) alla funzione $z(w)$, si ottiene $\pi > \mu/2\pi \log r/r_0 \omega^2(\Gamma_0)$, dove ora r e r_0 si riferiscono al piano w , C_0 e Γ_0 a B, ω a $z(w)$. Potendo r raggiungere almeno il valore d , si ha $\omega(\Gamma_0) \rightarrow 0$ per $r_0 \rightarrow 0$: se dunque r_0 è sufficientemente piccolo Γ_0 coincide con C_0 . Altrettanto dicasi poi se è dato per $w(z)$ un coefficiente hölderiano $h_0 = h(0, \delta)$ in quanto da questo si deduce una limitazione inferiore per $H(0, \delta')$, con $\delta' > \delta$ (n. 13).

Ne segue che $\omega(C_0) \rightarrow 0$ per $r_0 \rightarrow 0$, uniformemente in tutto B (e non soltanto internamente). Giungiamo così al seguente risultato:

Una limitazione inferiore per un coefficiente hölderiano H_0 o h_0 relativo a $w(z)$ implica per $z(w)$ un modulo di continuità in tutto B; pertanto l'immagine w di un qualunque punto z di A è centro di un cerchio contenuto in B, il cui raggio dipende da $|z|$ ⁽³⁰⁾.

Se ne deduce subito che sussistono limitazioni superiori per i coefficienti hölderiani H' , h' relativi a $z(w)$, cioè a T^{-1} ; precisamente si ha

$$h'(w(z), r') < p(|z|) h_0^{-\mu}, \quad H'(w(z), r') < P(|z|) H_0^{-\mu},$$

dove nella prima disuguaglianza r' va supposto inferiore ad un'aliquota fissa, per esempio alla metà, della distanza di $w(z)$ dalla frontiera di B; p dipende allora, al pari di P , soltanto da $|z|$.

Abbiamo supposto per semplicità di esposizione che A fosse un cerchio, e che H_0, h_0 fossero assegnati nel centro. Ma è chiaro intanto che sostituito questo con un altro punto z_0 del cerchio, le disuguaglianze precedenti continuano a sussistere, $p(|z|)$ e $P(|z|)$ risultando limitati superiormente in funzione di $|z_0|$. Donde il teorema:

(29) Più precisamente, se Γ_0 non è connesso, $\omega(\Gamma_0)$ è la somma delle oscillazioni sui vari componenti connessi.

(30) Le stesse conseguenze si traggono dall'ipotesi (equivalente) che a due punti assegnati in A corrispondano due punti a distanza inferiormente limitata.

I coefficienti hölderiani h, H e h', H' , relativi alle funzioni $w(z)$ e $z(w)$ verificano le disequaglianze

$$h^{\mu}(z_1, r) h'(w(z_2), r') < q(t) \quad ; \quad H^{\mu}(z_1, r) H'(w(z_2), r') < Q(t),$$

dove z_1 e z_2 sono due punti qualunque del cerchio $|z| \leq t$.

Se $\mu = 1$, per $r \rightarrow 0$ e $r' \rightarrow 0$ si ottiene il teorema di Koebe, h riducendosi a dw/dz e h' a dz/dw .

A può d'altronde essere un campo limitato qualunque: le disequaglianze precedenti sussistono allora per ogni dominio D interno ad A , dipendendo q e Q esclusivamente da D . Per dimostrarlo, basta osservare che la (17) si può stabilire anche nel caso generale che B sia univalente e a contorno regolare, cambiando soltanto il coefficiente $\mu/2\pi$ in altro convenientemente piccolo.

Geometria. — *Sulle coordinate di Grassmann.* Nota^(*) del Socio ENRICO BOMPIANI.

I. OGGETTO DELLA RICERCA. — Le coordinate di Grassmann di uno spazio subordinato in uno spazio proiettivo hanno sollevato di recente l'attenzione critica in merito ad affermazioni correnti sul loro uso.

Com'è notissimo tali coordinate sono (omogenee e) *sovrabbondanti*, cioè soddisfano ad un insieme di relazioni quadratiche di cui le più semplici, a tre termini, sono estensioni di quella esistente fra le coordinate di Plücker di una retta in S_3 .

Si era sempre affermato che queste relazioni a tre termini sono anche sufficienti, insieme all'alternanza di quelle coordinate (e all'esistenza di una di esse non nulla), a definirle.

B. Segre ha osservato che ciò può non essere⁽¹⁾.

P. Buzano ha rilevato⁽²⁾ che le condizioni date da E. D'Ovidio per l'incidenza di due spazi in uno spazio di dimensione assegnata *non* sono sufficienti ed ha dato un sistema di condizioni sufficienti però in numero molto superiore a quello occorrente noto.

Si tratta di questioni fondamentali (e che ora interessano anche l'algebra delle forme differenziali esterne) e che pertanto conviene chiarire fino in fondo. Perciò ho voluto occuparmene⁽³⁾. Il risultato è che le relazioni a

(*) Presentata nella seduta del 13 dicembre 1952.

(1) B. SEGRE, *Lezioni di Geometria moderna*, vol. I (ed. Zanichelli), p. 137 (1948).

(2) P. BUZANO, *Condizioni di incidenza per due iperspazi subordinati di uno stesso iperspazio*, « Atti Acc. Scienze di Torino », vol. 71, pp. 196-204 (1935-36).

(3) Osservazioni circa le condizioni d'incidenza per due spazi subordinati di uno stesso iperspazio, ibidem, vol. 72, pp. 431-440 (1936-37).

(3) Spero di servirmi dei risultati qui stabiliti per lo studio dei complessi di spazi. Poichè ai complessi di rette in S_4 è dedicato uno dei primi lavori del mio Maestro Guido Castelnuovo, dedico questa Nota alla Sua memoria.

tre termini sono effettivamente sufficienti se si aggiunge che le coordinate da esse non determinate devono essere nulle; e che si possono scrivere le condizioni d'incidenza, necessarie e sufficienti, nel numero esatto, in funzione delle coordinate dei due spazi.

2. LE COORDINATE DI GRASSMANN. - In uno spazio proiettivo S_n descritto dal punto $x \equiv \{x^0 \dots x^n\} \equiv \{x^i\}$, $i = 0, \dots, n$, s'individuì uno S_k ($k < n$) dandone i punti linearmente indipendenti x_α^i , $\alpha = 0, \dots, k$; la matrice

$$(x_\alpha^i) \quad \begin{matrix} i = 0, \dots, n \\ \alpha = 0, \dots, k \end{matrix}$$

ha rango $k + 1$. Le coordinate di Grassmann di S_k sono i determinanti formati con le coordinate di apici i_0, i_1, \dots, i_k , fra loro diversi e compresi fra 0 ed n , dei $k + 1$ punti, e s'indicano con $p^{i_0 \dots i_k}$. È notorio che esse non possono essere tutte nulle (dato che il rango è $k + 1$) e che costituiscono un sistema alternante; e così pure ch'esse soddisfano a relazioni quadratiche a tre termini

$$(2.I) \quad p^{j_1 \dots j_k i} p^{j_1 \dots j_{k-1} h l} + p^{j_1 \dots j_k h} p^{j_1 \dots j_{k-1} l i} + p^{j_1 \dots j_k l} p^{j_1 \dots j_{k-1} i h} = 0$$

ove tutti gli apici sono scelti tra 0 ed n .

Poichè una almeno delle p^{\dots} è $\neq 0$ (ed esse sono omogenee) supponiamo $p^{0 \dots k} = 1$.

Avremo bisogno di distinguere tre specie di apici; useremo perciò una lettera greca per un indice fra 0 e k ; una latina minuscola per un apice fra $k + 1$ ed n ; una lettera latina maiuscola per un apice fra 0 ed n ; cioè

$$\alpha, \beta, \gamma, \rho, \sigma, \dots = 0, \dots, k$$

$$i, h, g, l, j, \dots = k + 1, \dots, n$$

$$I, H, G, L, J, \dots = 0, \dots, n.$$

Se nel gruppo fissato $0 \dots k$ togliamo uno o più numeri indicheremo il risultato con $(0 \dots k/\alpha)$, $(0 \dots k/\alpha\beta)$ ecc.

È noto che le

$$x_\alpha^i = p^{(0 \dots k/\alpha) I}$$

sono coordinate di un punto di S_k e che al variare di α si hanno $k + 1$ punti indipendenti.

Poichè si è fatto $p^{0 \dots k} = 1$, sono le $p^{(0 \dots k/\alpha) i}$, in numero di $(k + 1)(n - k)$, che determinano S_k .

Risultano perciò determinate, dalle $p^{(0 \dots k/\alpha) i}$ (che diremo coordinate del primo gruppo) tutte le rimanenti coordinate.

Esaminiamo per esempio le coordinate del secondo gruppo cioè $p^{(0 \dots k/\alpha\beta) RS}$. Se R o S appartengono all'intervallo $0 \dots k$ si hanno coordinate del primo gruppo, già note perchè date. Le uniche coordinate nuove da calcolare sono le $p^{(0 \dots k/\alpha\beta) rs}$.

Questa (a parte eventualmente il segno) è

$$(2.2) \quad \begin{vmatrix} p^{(0 \dots k|q)r} & p^{(0 \dots k|\sigma)r} \\ p^{(0 \dots k|q)s} & p^{(0 \dots k|\sigma)s} \end{vmatrix}.$$

Analogamente una coordinata del *terzo gruppo* $p^{(0 \dots k|q\sigma\tau)rst}$ è già nota (cioè appartiene ad uno dei gruppi precedenti) se non è una $p^{(0 \dots k|q\sigma\tau)rst}$; e questa si calcola col determinante

$$(2.3) \quad \begin{vmatrix} p^{(0 \dots k|q)r} & p^{(0 \dots k|\sigma)r} & p^{(0 \dots k|\tau)r} \\ p^{(0 \dots k|q)s} & p^{(0 \dots k|\sigma)s} & p^{(0 \dots k|\tau)s} \\ p^{(0 \dots k|q)t} & p^{(0 \dots k|\sigma)t} & p^{(0 \dots k|\tau)t} \end{vmatrix}.$$

Ed è chiaro come si proceda per le coordinate dei gruppi rimanenti (ottenute sopprimendo altri indici greci).

3. SUFFICIENZA DELLE RELAZIONI A TRE TERMINI.₁₁ — Vogliamo far vedere che tutte le coordinate si possono ricavare dalle relazioni a tre termini (che ora vanno lette con apici latini maiuscoli) in funzione di quelle del primo gruppo.

Poniamo $J_1 \dots J_{k-1} = (0 \dots k|\alpha\beta)$ e riscriviamo le 2.1

$$p^{(0 \dots k|\alpha\beta)JI} p^{(0 \dots k|\alpha\beta)HL} + p^{(0 \dots k|\alpha\beta)JH} p^{(0 \dots k|\alpha\beta)LI} + p^{(0 \dots k|\alpha\beta)JL} p^{(0 \dots k|\alpha\beta)IH} = 0.$$

Se si fa per esempio $J = \alpha$, $I = \beta$ il primo fattore del primo addendo vale ± 1 e il secondo è del secondo gruppo se $H = h$, $L = l$; tutte le p^{\dots} che seguono sono del primo gruppo, quindi note. L'espressione di $p^{(0 \dots k|\alpha\beta)hl}$ che così si ottiene non differisce (se si tiene conto dei segni e dell'alternanza delle p^{\dots}) da quella fornita da un determinante analogo a (2.2).

Passiamo a calcolare le coordinate del terzo gruppo. Utilizziamo perciò la relazione a tre termini

$$p^{(0 \dots k|\alpha\beta\gamma)GJI} p^{(0 \dots k|\alpha\beta\gamma)GHL} + \dots = 0$$

(i termini non scritti si ottengono da quello scritto ruotando IHL).

Per $J = \alpha$, $I = \beta$, $G = g$, $H = h$, $L = l$ si ha

$$(3.1) \quad p^{(0 \dots k|\gamma)g} p^{(0 \dots k|\alpha\beta\gamma)ghl} + \dots = 0$$

ove i termini non scritti contengono soltanto p^{\dots} del secondo gruppo (poichè in essi figurano α, β).

L'ultima relazione determina $p^{(0 \dots k|\alpha\beta\gamma)ghl}$ se il suo coefficiente non è nullo (e in tal caso si verifica facilmente che la sua espressione coincide con quella in forma di determinante). Poichè si può scambiare γ con α e β , e g con h , l l'unico caso in cui le relazioni a tre termini non determinano $p^{(0 \dots k|\alpha\beta\gamma)ghl}$ si ha quando sia

$$p^{(0 \dots k|q)r} = 0$$

per $\rho = \alpha, \beta, \gamma$ e $r = g, h, l$.

Ma in questo caso basta guardare al determinante (2.2) per convincersi che

$$(3.2) \quad p^{(0 \dots k | q\sigma)rs} = 0$$

se $\rho, \sigma \subset \alpha, \beta, \gamma$ e $r o s \subset g, h, l$, quindi la (3.1) diviene una identità. Inoltre dal determinante (2.3) appare che è pure

$$(3.3) \quad p^{(0 \dots k | q\sigma\tau)rst} = 0$$

se $\rho, \sigma, \tau \equiv \alpha, \beta, \gamma$ e $r o s o t \subset g, h, l$; ovvero $\rho o \sigma o \tau \subset \alpha, \beta, \gamma$ e $r, s, t \equiv g, h, l$.

In particolare è certamente

$$(3.4) \quad p^{(0 \dots k | \alpha\beta\gamma)ghl} = 0.$$

Dunque:

Se le relazioni a tre termini non determinano una p^{\dots} del terzo gruppo quelle in cui essa compare divengono identità e la p^{\dots} in esame è nulla.

Passiamo ora a considerare le coordinate del quarto gruppo $p^{(0 \dots k | \alpha\beta\gamma\delta)gmhl}$. Partiamo dalla relazione a tre termini

$$p^{(0 \dots k | \alpha\beta\gamma\delta)GMJI} p^{(0 \dots k | \alpha\beta\gamma\delta)GMHL} + \dots = 0$$

ove i termini non scritti si ottengono rotando IHL. Si ponga $J = \alpha$, $I = \beta$, $G = g$, $M = m$, $H = h$, $L = l$.

Nel termine scritto il primo fattore è del secondo gruppo e il secondo del quarto; negli altri termini ciascuna p^{\dots} è del terzo gruppo, quindi già calcolata. Ne segue che la relazione precedente determina la p^{\dots} del quarto gruppo se non è $p^{(0 \dots k | \gamma\delta)gm} = 0$.

Poichè si possono scambiare fra loro $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ e g, m, h, l risulta che non si può determinare $p^{(0 \dots k | \alpha\beta\gamma\delta)gmhl}$ se e solo se

$$(3.5) \quad p^{(0 \dots k | q\sigma)rs} = 0$$

per $\rho, \sigma \subset \alpha, \beta, \gamma, \delta$ ed $r, s \subset g, m, l, h$.

Ma la p^{\dots} a primo membro della (3.5) è un minore del determinante (2.3); quindi risulta pure

$$p^{(0 \dots k | q\sigma\tau)rst} = 0$$

se due degli indici greci sono scelti fra $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ e i tre indici latini sono scelti fra g, m, l, h o viceversa ρ, σ, τ sono scelti fra $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ e due degli indici r, s, t fra g, m, l, h . Ciò intanto prova che le relazioni in cui figura la p^{\dots} da determinare del quarto gruppo con coefficiente nullo si riducono ad identità.

Inoltre se si pensa al determinante del 4° ordine (analogo a 2.3) che dà $p^{(0 \dots k | q\sigma\tau\zeta)rstq}$ si vede che

$$p^{(0 \dots k | q\sigma\tau\zeta)rstq} = 0$$

se due degli indici greci sono presi fra $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ e quelli latini coincidono con g, m, l, h ovvero due latini sono presi fra questi ultimi e quelli greci coincidenti con $\rho, \sigma, \tau, \zeta$. In particolare è $p^{(0 \dots k | \alpha\beta\gamma\delta)gmhl} = 0$.

È ormai chiaro come si proceda. Le relazioni a tre termini determinano

$$p^{(0 \dots k/a_1 \dots a_e) h_1 \dots h_e}, \quad 3 \leq e \leq k$$

a meno che sia

$$p^{(0 \dots k/q_1 \dots q_{e-2}) r_1 \dots r_{e-2}} = 0$$

per

$$\rho_1 \dots \rho_{e-2} \subset \alpha_1 \dots \alpha_e \quad \text{e} \quad r_1 \dots r_{e-2} \subset h_1 \dots h_e.$$

In tal caso si ha pure

$$p^{(0 \dots k/q_1 \dots q_{e-1}) r_1 \dots r_{e-1}} = 0.$$

per

$$\rho_1 \dots \rho_{e-2} \subset \alpha_1 \dots \alpha_e \quad \text{e} \quad r_1 \dots r_{e-1} \subset h_1 \dots h_e$$

ovvero

$$\rho_1 \dots \rho_{e-1} \subset \alpha_1 \dots \alpha_e \quad \text{e} \quad r_1 \dots r_{e-2} \subset h_1 \dots h_e.$$

E si ha pure

$$p^{(0 \dots k, q_1 \dots q_e) r_1 \dots r_e} = 0$$

per

$$\rho_1 \dots \rho_{e-2} \subset \alpha_1 \dots \alpha_e \quad \text{e} \quad r_1 \dots r_e \equiv h_1 \dots h_e$$

ovvero

$$\rho_1 \dots \rho_e \equiv \alpha_1 \dots \alpha_e \quad \text{e} \quad r_1 \dots r_{e-2} \subset h_1 \dots h_e$$

e in particolare

$$p^{(0 \dots k/a_1 \dots a_e) h_1 \dots h_e} = 0.$$

Se si tiene conto soltanto di quest'ultimo fatto si ha:

Le relazioni a tre termini fra le p^{\dots} e il loro carattere di alternanza sono sufficienti a determinarle quando ne sia data una $p^{0 \dots k} \neq 0$ e siano date inoltre le $p^{(0 \dots k/a) h}$ con $0 \leq \alpha \leq k$ e $k+1 \leq h \leq n$, a patto di porre uguale a zero una p^{\dots} che non risulti determinata dalle relazioni stesse.

4. CONDIZIONI D'INCIDENZA ASSEGNATA FRA SPAZI SUBORDINATI. — Vogliamo esprimere le condizioni di appartenenza di uno spazio S_k , di coordinate p^{\dots} , ad uno spazio S_h di coordinate q^{\dots} . Gli indici latini minuscoli, se non si avverte il contrario, s'intendono variabili fra 0 ed n .

L'appartenenza di un punto $x \{x^i\}$ ad S_h si esprime notoriamente con condizioni del tipo

$$(4.I) \quad x^i q^{j_0 \dots j_h} - x^{j_0} q^{ij_1 \dots j_h} + x^{j_1} q^{ij_0 j_2 \dots j_h} - \dots = 0,$$

e basta scrivere $n-h$ di queste condizioni fissando per esempio $j_0 \dots j_h$ in modo che $q^{j_0 \dots j_h} \neq 0$ e facendo percorrere ad i gli $n-h$ valori rimanenti fra 0 ed n .

Convieni, per brevità, introdurre una notazione.

Si ha

$$\begin{aligned} -x^{j_0} q^{ij_1 \dots j_h} &= (-1)^{h+1} x^{j_0} q^{j_1 \dots j_h i} \\ x^{j_1} q^{ij_0 j_2 \dots j_h} &= x^{j_1} q^{j_2 \dots j_h i j_0} \\ -x^{j_2} q^{ij_0 j_1 j_3 \dots j_h} &= (-1)^{h+1} x^{j_2} q^{j_3 \dots j_h i j_0 j_1} \\ &\dots \end{aligned}$$

Le disposizioni degli apici nei secondi membri si ottengono tutte *rotando* quella iniziale $i j_0 \dots j_h$; se h è dispari tutti gli addendi della (4.1), presi gli apici come indicati nei secondi membri, vengono col loro segno, se h è pari bisogna prenderli con segni alternati.

Scriviamo perciò

$$x^{\{i} q^{j_0 \dots j_h\}} = 0$$

per indicare a primo membro la somma di tutti gli addendi che si ottengono rotando gli apici in $\{ \}$ presi tutti con lo stesso segno se il numero degli apici è *dispari* e invece con segni *alterni* se quel numero è *pari* ⁽⁴⁾.

Supponiamo ora che fra le coordinate di S_k sia $p^{\alpha \dots k} \neq 0$ e sia di nuovo $\alpha = 0, \dots, k$. Scriviamo pure per brevità

$$p_\alpha^i = p^{(0 \dots k | \alpha) i}.$$

Poichè $x_\alpha \{ p_\alpha^i \}$ è un punto di S_k le condizioni di appartenenza di S_h ad S_h sono

$$p_\alpha^{\{i} q^{j_0 \dots j_h\}} = 0, \quad \alpha = 0, \dots, k$$

con $p^{\alpha \dots k} \neq 0, q^{j_0 \dots j_h} \neq 0$ con $j_0 \dots j_h$ fissati, $i \neq j_0, \dots, j_h$.

Queste condizioni sono esattamente $(n - h)(k + 1)$.

Esprimiamo la condizione affinchè l'intersezione di S_h e di S_k sia un S_t .

Un punto di S_k ha coordinate del tipo $\lambda^\alpha p_\alpha^i$; esso appartiene ad S_h se e solo se

$$\lambda^\alpha p_\alpha^{\{i} q^{j_0 \dots j_h\}} = 0.$$

La condizione necessaria e sufficiente affinchè S_h, S_k si seghino in S_t è che la matrice

$$(p_\alpha^{\{i} q^{j_0 \dots j_h\}}) \quad \begin{matrix} \alpha = 0, \dots, k \\ i \neq j_0 \dots j_h \text{ fissati} \end{matrix}$$

abbia rango $k - t$.

Queste sono esattamente $(n - h - k + t)(t + 1)$ condizioni indipendenti.

Procuriamoci infine le coordinate dello spazio congiungente S_h, S_k (qualunque sia la loro intersezione).

Se essi sono indipendenti le coordinate dello spazio congiungente sono

$$r^{j_0 \dots i_k j_0 \dots j_h} = p^{[i_0 \dots i_k} q^{j_0 \dots j_h]}.$$

Se la loro intersezione è un S_t si prendano, in $S_k, k - t$ punti indipendenti fra loro e da S_t ; come tali si possono prendere i punti, certo esistenti $\{p_{\alpha_s}^i\}$ con $s = 1, \dots, k - t$ per i quali

$$p_{\alpha_s}^{\{i} q^{j_0 \dots j_h\}} \neq 0.$$

(4) Il simbolo ora introdotto $\{ \}$ è simile a quelli adottati (e ormai universalmente usati) da J. A. SCHOUTEN di *mescolamento* o *simmetrizzazione* () e di *alternazione* []. Il simbolo $\{ \}$ potrebbe dirsi di *circolazione*.

Si ponga

$$\begin{vmatrix} p_{\alpha_1}^{i_1} & \dots & p_{\alpha_k-t}^{i_k-t} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{\alpha_1}^{i_k-t} & \dots & p_{\alpha_k-t}^{i_k-t} \end{vmatrix} = p^{i_1 \dots i_k - t}.$$

Le coordinate dello spazio congiungente sono

$$r^{i_1 \dots i_k - t, j_0 \dots j_h} = p^{[i_1 \dots i_k - t, j_0 \dots j_h]}$$

e queste risolvono il problema.

Geometria aritmetica. — *Sui corpi risolvienti delle equazioni algebriche.* Nota ^(*) del Corrisp. BENIAMINO SEGRE.

1. Assegnato un qualunque corpo numerico commutativo, R , diremo — secondo l'uso — che una varietà algebrica appartiene ad R od è razionale rispetto ad R s'essa può venir definita mediante una o più equazioni algebriche con coefficienti in R . Talora, per brevità, il riferimento ad R verrà sottinteso, chiamando dunque «razionale» ogni varietà siffatta. Con ciò, il problema fondamentale della *geometria aritmetica* può venir enunciato come la determinazione e lo studio delle sottovarietà razionali di una data varietà razionale Γ , e viene ad identificarsi con quello posto dall'*analisi diofantea* nel caso particolare in cui R sia il campo razionale e ci si restringa a sottovarietà di Γ ridotte ad un sol punto. Qualora, R essendo qualsiasi, si abbia un gruppo A di n punti di Γ appartenente ad R , è chiaro che ciascun punto di A appartiene ad un'estensione algebrica di R di grado non superiore ad n , la quale potrà quindi dirsi un *corpo risolvente* del sistema di equazioni algebriche che definisce Γ .

Ebbi già ripetutamente occasione di mostrare quale valido ausilio la geometria algebrica possa prestare nello studio di questioni di geometria aritmetica ⁽¹⁾. Qui svolgerò alcune considerazioni in tale ordine d'idee, relative al caso dei gruppi di punti su di una curva algebrica di genere qualunque, giungendo a conclusioni comprendenti — per i primi valori del genere — classici risultati aritmetici di Hilbert e Hurwitz ⁽²⁾ e di Poincaré ⁽³⁾,

(*) Presentata all'Accademia il 13 dicembre 1952.

(1) Per un'esposizione d'assieme e per ampie indicazioni bibliografiche sull'argomento, cfr. B. SEGRE, *Arithmetical questions on algebraic varieties*, «The Athlone Press», London, 1951.

(2) D. HILBERT — A. HURWITZ, *Ueber die diophantischen Gleichungen vom Geschlecht Null*, «Acta Math.», 14, 217-224 (1891).

(3) H. POINCARÉ, *Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques*, «Journ. de Math.» (5), 7, 161-233 (1901).

ed altri recentissimi di Nagell ⁽⁴⁾. Così, fra l'altro, risalterà in giusta luce l'importanza dei gruppi di p punti nello studio delle curve di genere $p > 0$ dal punto di vista aritmetico. La totalità di tali gruppi, e le corrispondenze univoche della totalità medesima in sé, furono già studiate dal Castelnuovo dal punto di vista geometrico ⁽⁵⁾; e mi è caro dedicare la presente Nota alla memoria del compianto Maestro, nel giorno in cui Egli viene solennemente commemorato all'Accademia.

2. In tutto il presente lavoro denoteremo con Γ una curva algebrica irriducibile definita in uno spazio proiettivo di dimensione $r \geq 2$, la quale appartenga ad un corpo R di caratteristica zero, ed indicheremo con $p (\geq 0)$ il genere di Γ . Un gruppo A di n «punti» di Γ è razionale ($n, 1$) se, e soltanto se, ogni funzione simmetrica delle coordinate non omogenee dei suoi punti appartiene ad R . Va rilevato che un punto di A può doversi contare in A più volte, e che — secondo quanto si usa fare in geometria algebrica — «punto» di Γ è un punto considerato come origine di un ramo di Γ , sicché un punto multiplo di Γ risulta la sovrapposizione di tanti «punti» quanti sono i rami di Γ aventi l'origine in esso ⁽⁶⁾.

Con le suddette convenzioni, la nozione di gruppo razionale di punti di Γ risulta invariante di fronte alle trasformazioni birazionali di Γ che appartengono ad R . Fra queste, se $r \geq 3$, vi è per esempio la proiezione di Γ da un generico S_{r-3} razionale dell' S_r ambiente su di un piano razionale, il che permette di sostituire a Γ una curva piana nello studio di varie questioni di geometria aritmetica.

(4) T. NAGELL, *Sur la résolubilité des équations diophantiennes cubiques à deux inconnues dans un domaine relativement algébrique*, «Nova Acta R. Soc. Sc. Upsaliensis» (4), 13, N. 3 (1942); *Un théorème arithmétique sur les coniques*, «Arkiv för Mat.», 2, 247-250 (1952); *Remarques sur les corps résolvants des coniques, cubiques et quartiques*, «Arkiv för Mat.», 2, 379-384 (1952).

(5) G. CASTELNUOVO, *Le corrispondenze univoche tra gruppi di p punti sopra una curva di genere p* , «Rend. Ist. Lomb.» (2), 25 (1893), o *Memorie scelte*, pp. 79-94; *Sulle funzioni abeliane*, «Rend. Acc. Lincei» (5), 30 (1921), o *Memorie scelte*, pp. 529-549.

(6) Così, ad esempio, un nodo P di Γ definisce una coppia di «punti» di Γ , la quale è razionale allora e soltanto allora che P abbia coordinate razionali. Ciò non significa però che ciascuno dei punti della coppia sia in tal caso razionale, all'uopo essendo necessario e sufficiente che ciascuna delle tangenti di Γ in P risulti razionale. L'opportunità di tali convenzioni, oltre che da quanto richiamato nel testo, vien anche chiarita dalle seguenti considerazioni.

Si deve al Mordell la congettura che ogni curva di genere $p \geq 2$ appartenente al campo razionale debba contenere un numero finito di punti razionali. Pare anzi probabile che il numero dei «punti» razionali debba risultare limitato rispetto a p , intendendo i «punti» nel senso del testo, il che equivale all'essere limitato il numero dei «punti» razionali della curva a coordinate non omogenee intere; e tale fatto, il quale verrebbe a precisare il noto teorema di Siegel che afferma la finitezza del numero di questi ultimi, implicherebbe senz'altro la verità della suddetta congettura. Il fatto stesso, però, non sussiste di certo se si intendono i punti nell'accezione elementare, esistendo per esempio nel piano curve (iperellittiche) d'ordine $p + q + 2$ e genere p , dotate di un punto $(p + q)$ -plo e di q nodi arbitrariamente assegnati (per esempio a coordinate non omogenee intere), dove q denoti un intero grande a piacere.

È subito visto che, se A e B sono due gruppi razionali di Γ , tale è anche la loro somma $A + B$; sicché pure kA risulta razionale per ogni k intero positivo. Inoltre, se A e B sono due gruppi razionali di Γ di cui il primo contenga il secondo, anche la loro differenza $A - B$ è un gruppo razionale di Γ .

3. Se A è un gruppo razionale di n punti di Γ e, come non è restrittivo, si suppone che Γ sia piana, è noto — da un fondamentale lavoro del Noether ⁽⁷⁾ — che si possono costruire razionalmente le curve aggiunte a Γ di un ordine sufficientemente elevato. Con l'uso di queste, ed applicando la classica forma proiettiva del teorema del resto, si può allora determinare razionalmente su Γ la serie completa $|A|$. In base al teorema di Riemann-Roch, la dimensione v di quest'ultima soddisfa alla limitazione

$$(1) \quad v \geq n - p.$$

Inversamente, definita sulla curva Γ di S_r una g_n razionale (anche non completa), mediante un sistema lineare razionale di forme di S_r , che la seghi su Γ (eventualmente fuori di un gruppo fisso razionale), si possono subito determinare quanti si vogliano gruppi razionali di g_n . Si ottiene infatti uno di questi ultimi quale sezione di Γ (fuori di quel gruppo fisso) con una forma razionale del sistema lineare segante, definibile per esempio imponendo alle forme del sistema di passare per un conveniente numero di punti razionali dell' S_r ambiente.

Applicando l'osservazione precedente alla serie lineare delle sezioni iperpiane, si vede che Γ possiede sempre infiniti gruppi razionali di n punti, ove n denoti l'ordine di Γ . Risulta inoltre che, se Γ contiene una g_m^μ razionale che sia semplice e priva di punti fissi, si può costruire razionalmente l'immagine proiettiva di Γ , e quindi trasformare Γ in una curva d'ordine m appartenente ad un S_μ , mediante una trasformazione birazionale appartenente ad R . In ogni caso, l'immagine proiettiva di g_m^μ fornisce razionalmente in R una curva (semplice o multipla), trasformata razionale di Γ , d'ordine non superiore ad m .

4. Consideriamo su Γ due gruppi razionali A e B , i quali constino rispettivamente di n ed $n - m$ punti, e si supponga

$$(2) \quad n > m \geq p.$$

Allora A è una g_n^v razionale, la cui dimensione — in base alle (1), (2) — soddisfa alla $v \geq n - m$. Esistono dunque gruppi di $|A|$ contenenti B : e la totalità dei gruppi residui di B rispetto ad essi è una g_m^μ razionale

(7) M. NOETHER, *Rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der algebraischen Functionen*, «Math. Ann.», 23, 311-358 (1884).

effettiva, di dimensione $\mu \geq m - p \geq 0$, costruibile razionalmente in R (n. 2) ⁽⁸⁾.

Più in generale, possiamo dimostrare il seguente

TEOREMA. - *Dati su Γ uno o più gruppi razionali A_1, A_2, \dots, A_s , rispettivamente di n_1, n_2, \dots, n_s punti, se si prendono comunque degli interi k_1, k_2, \dots, k_s (positivi, nulli o negativi) tali che, posto*

$$k_1 n_1 + k_2 n_2 + \dots + k_s n_s = m,$$

sia

$$m \geq p,$$

allora $|k_1 A_1 + k_2 A_2 + \dots + k_s A_s|$ risulta una g_m^μ effettiva, di dimensione $\mu \geq m - p \geq 0$, costruibile razionalmente in R .

Ciò discende subito dai nn. 2, 3, se nessuna delle k è negativa. Supposto invece, per fissare le idee,

$$\begin{aligned} k_1 &\geq 0, & k_2 &\geq 0, \dots, k_t &\geq 0 \\ k_{t+1} &< 0, & k_{t+2} &< 0, \dots, k_s &< 0. \end{aligned} \quad (\text{ove } 1 \leq t < s),$$

il teorema si ottiene dal primo capoverso del presente numero assumendovi

$$A = k_1 A_1 + k_2 A_2 + \dots + k_t A_t, \quad B = -k_{t+1} A_{t+1} - \dots - k_s A_s.$$

5. Supponiamo, come non è restrittivo (n. 2), che la curva Γ sia piana, e denotiamone con n l'ordine, con A una sezione rettilinea razionale, e con K un gruppo canonico virtuale (di $2p - 2$ punti). Allora, considerando le curve aggiunte d'ordine $n + c - 3$ (dove c denoti un intero abbastanza grande) ed applicando i risultati di Noether richiamati nel n. 3, si costruiscono su Γ gruppi B razionali equivalenti a $cA + K$. In base al n. 4, si possono quindi ottenere su Γ razionalmente in R le seguenti serie lineari effettive:

se $p = 0$ ed $n = 2m + 1$ è dispari, la $|(1 - mc)A + mB| = g_1^1$,

se $p = 0$ ed $n = 2m + 2$ è pari, la $|(1 - mc)A + mB| = g_2^2$,

se $p \geq 2$, la $|B - cA| = |K|$.

Pertanto:

Ogni curva di genere zero può venir trasformata birazionalmente - nel proprio campo di razionalità - in una retta od in una conica, secondochè il suo ordine è dispari o pari; sicché, nei due casi rispettivamente, essa contiene infiniti punti razionali od infinite coppie razionali. Su ogni curva di genere

(8) Questo risultato potrebbe venir precisato ed esteso a casi più generali, tenendo presente che il teorema di Riemann-Roch vale per la serie virtuale $|A - B|$, a patto che si assuma la dimensione di questa uguale a -1 nell'ipotesi che la serie non sia effettiva: cfr. B. SEGRE, *Nuovi contributi alla Geometria sulle varietà algebriche*, «Mem. Acc. d'Italia», 5, nota ⁽¹¹⁾, 479-576 (1934).

$p \geq 2$ la g_{2p-2}^{p-1} canonica si costruisce razionalmente, onde la curva — supposta non iperellittica, e quindi di genere $p > 2$, — può venir trasformata birazionalmente (nel proprio campo di razionalità) in una curva d'ordine $2p - 2$ ⁽⁹⁾.

6. Supponiamo ora di conoscere — sulla curva Γ di genere $p \geq 1$ — $s \geq 2$ gruppi razionali A_1, A_2, \dots, A_s , di ordini n_1, n_2, \dots, n_s primi fra loro. Possiamo quindi determinare degli interi k_1, k_2, \dots, k_s soddisfacenti alla

$$k_1 n_1 + k_2 n_2 + \dots + k_s n_s = p,$$

ed applicare il teorema del n. 4. Otteniamo così su Γ (almeno) un gruppo razionale di p punti, equivalente a $k_1 A_1 + k_2 A_2 + \dots + k_s A_s$. In particolare (per $s = 2$) vediamo che:

Una curva di genere $p \geq 1$ ed ordine n , che sia trasformabile birazionalmente entro il proprio campo di razionalità in una curva avente ordine m primo con n , ammette necessariamente qualche gruppo razionale di p punti ⁽¹⁰⁾.

Avuto riguardo al n. 1, si può anche dire che:

Se una curva di ordine n e genere $p \geq 1$ è priva di gruppi razionali di p punti, l'ordine di un qualunque suo corpo risolvente non può essere primo con n , ed è quindi un multiplo di n quando n è un numero primo ⁽¹¹⁾.

Applicando il primo capoverso del presente numero ad una sezione iper-piana e ad un gruppo canonico di Γ , ciascuno dei quali può venir assunto razionale (nn. 3, 5), si vede che:

Ogni curva d'ordine n dispari e genere $p \geq 3$ contiene certamente qualche gruppo razionale di p punti se n è primo con $p - 1$ ⁽¹²⁾.

Se su Γ , supposta di genere $p = 1$, è noto un gruppo A razionale di $n \geq 1$ punti, per ogni intero k tale che risulti $kn \geq 3$ la $|kA|$ è una g_{kn}^{kn-1} semplice, necessariamente priva di punti fissi. Pertanto (n. 3):

Ogni curva ellittica su cui si conosca un gruppo razionale di n punti può venir trasformata birazionalmente, entro il proprio campo di razionalità, in una curva avente per ordine un qualunque multiplo di n non inferiore a 3 ⁽¹³⁾.

Le proposizioni precedenti, ed altre che stabiliremo nel n. 7, mettono in luce l'importanza dei gruppi razionali di p punti nello studio delle proprietà aritmetiche di una curva di genere $p \geq 1$. Relativamente a tali gruppi, non v'è che da applicare il teorema del n. 4 per dedurre che:

(9) Questa proposizione è già implicita in Noether. La parte relativa al caso $p = 0$ è stata data esplicitamente da HILBERT HURWITZ ⁽²⁾, e ritrovata poi indipendentemente da POINCARÉ (3), § II.

(10) Il caso $p = 1, n = 3, m = 4$ trovasi già in POINCARÉ (3), p. 176.

(11) Per $p = 1, n = 3$, cfr. i lavori di NAGELL cit. in (4).

(12) Per $p = 3$, cfr. il teorema 3 dell'ultimo lavoro di NAGELL cit. in (4). Nonostante la particolarità dei casi trattati da questo A. e dal Poincaré nei loc. cit., le considerazioni da essi impiegate sono assai più laboriose delle nostre.

(13) Cfr. POINCARÉ (3), § IV.

Se A_1, A_2, \dots, A_s sono gruppi razionali di p punti, tale è anche il gruppo $k_1 A_1 + k_2 A_2 + \dots + k_s A_s$ per ogni scelta delle k soddisfacenti alla $k_1 + k_2 + \dots + k_s \equiv 1$ ⁽¹⁴⁾.

7. Supponiamo da ultimo di conoscere s gruppi razionali sulla curva Γ di genere $p \geq 1$, e siano n_1, n_2, \dots, n_s i rispettivi ordini e $d \geq 2$ il massimo comun divisore di questi. Si possono allora determinare interi k_1, k_2, \dots, k_s tali che risulti

$$k_1 n_1 + k_2 n_2 + \dots + k_s n_s = d,$$

sicchè (in forza del n. 4):

Se $p = 1$, Γ contiene qualche gruppo razionale di d punti ⁽¹⁵⁾.

Se $p \geq 2$, si definisca l'intero ρ mediante le condizioni

$$-p \equiv \rho \pmod{d}, \quad 0 \leq \rho \leq d-1;$$

e si osservi che non è restrittivo supporre:

$$\rho \leq p-2$$
 ⁽¹⁶⁾.

Si possono allora determinare k_1, k_2, \dots, k_s in guisa che si abbia:

$$k_1 n_1 + k_2 n_2 + \dots + k_s n_s = p + \rho;$$

basta quindi applicare i nn. 3, 4, per ottenere che:

Nelle ipotesi suddette, Γ contiene almeno ∞^{ρ} gruppi razionali di $p + \rho$ punti. Se $\rho \geq 1$, Γ può venir trasformata razionalmente entro il proprio campo di razionalità in una curva (semplice o multipla) d'ordine non superiore a $p + \rho$ ($\leq 2p - 2$).

In particolare, applicando la prima parte dell'ultimo teorema in relazione ad una sezione iperpiana e ad un gruppo canonico di Γ (che si possono assumere razionali in virtù dei nn. 3, 5), e supponendo $d = 2$, si vede che:

Se una curva Γ ha pari sia l'ordine n che il genere p (≥ 2), e se n è primo con $p - 1$, si può costruire su Γ qualche gruppo razionale di p punti.

Da qui e dalla terz'ultima proposizione del n. 6 segue che:

Se un'equazione algebrica omogenea $f(x, y, z) = 0$, a coefficienti in R , rappresenta una curva irriducibile di genere $p \geq 3$ priva di gruppi razionali in R di p punti, sicché essa non ammette soluzioni in R distinte dalla $x = y = z = 0$, allora l'equazione medesima rimane non risolubile anche se si amplia R con una qualunque estensione algebrica di grado primo con $p - 1$.

(14) Cfr. POINCARÉ (3), §§ III e IX.

(15) Cfr. POINCARÉ (3), § IV.

(16) Ciò è senz'altro vero, in forza della $\rho \leq d - 1$, se $d \leq p - 1$. Se $d > p - 1$, possiamo - in base al n. 5 - ammettere che qualcuna delle n valga $2p - 2$: ma in tal caso l'intero d (che divide le n) deve risultare uguale a $2(p - 1)$, e si ha quindi $\rho = p - 2$.

Astronomia. — *Sulla opportunità di direttive generali nella ricerca di leggi di coordinamento fra i moti stellari.* Nota II ^(*) del Corrisp. VITTORIO NOBILE.

1. Come si è visto nella Nota I sul medesimo argomento, il decidere sulla esistenza o meno di un « coordinamento » dei moti stellari nella Galassia è questione che non può assumere un aspetto concreto se non sia trasformata nell'altra di ricercare se la distribuzione delle velocità dei punti (stelle) appartenenti al sistema considerato possa rappresentarsi con un ben definito campo vettoriale funzione del punto e del tempo.

La esistenza di tale campo è il postulato fondamentale che si assume nel presente studio ed è oggetto di questa seconda Nota il dedurre dalla predetta ipotesi un insieme di conseguenze controllabili con le osservazioni e il preparare gli elementi per l'esame dei caratteri speciali del campo, elementi tutti riassunti nella matrice dell'omografia $d\mathbf{v}/dP$.

Ciò premesso, ricordo che affinché il supposto campo vettoriale sia compatibile con sollecitazioni conservative agenti sulle singole stelle occorre che in tutto lo spazio occupato dall'ammasso sia verificata l'equazione

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{v} + \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \mathbf{v} \wedge \mathbf{v}) = 0 \quad (1)$$

riguardo alla quale — come anche riguardo ad altra più particolare pure riportata nella Nota predetta — è opportuno notare come le velocità delle quali si tratta sono da intendersi assolute nel senso della dinamica classica, cioè corrispondenti a spostamenti rispetto a triedri inerziali, la cui origine non potrebbe, a rigore, che coincidere col baricentro dell'ammasso.

Le dette equazioni possono dar luogo a due differenti tipi di ricerche, da distinguersi ben chiaramente. Esse possono, naturalmente, servire per lo studio teorico dei moti finiti, perché ad ogni soluzione dell'equazione

$$(2) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = \operatorname{grad} \left(U - \frac{v^2}{2} \right)$$

e quindi della (1), corrisponde un campo vettoriale $\mathbf{v}(P, t)$ che si conforma alle anzidette ipotesi e un ben determinato fascio di traiettorie. Le equazioni medesime definiscono dunque tutti i modelli dinamici corrispondenti alla concezione qui espressa del « coordinamento » e permettono eventualmente di escludere qualche ipotesi speciale a cui si fosse pervenuti con la semplice intuizione sulla base di risultati immediati di osservazione e

(*) Presentata nella seduta del 13 dicembre 1952.

(1) Si avverte che in questa Nota, come già nella I, sono adoperate esclusivamente le notazioni vettoriali italiane (BURALI-FORTI e MARCOLONGO).

astruendo da considerazioni generali intorno a possibili cause atte ad influire sulla distribuzione delle velocità.

Ma le indagini teoriche di cui sopra non sono evidentemente quelle dalle quali possa aversi una risposta sulla questione concreta della esistenza o meno di un campo vettoriale delle velocità nella nostra Galassia che esse invece presuppongono: è questo un dato di fatto che può solo essere rivelato dalla osservazione, secondo i procedimenti che passiamo più oltre ad indicare. A tale conclusione si perverrà coll'esaminare in primo luogo la distribuzione delle velocità relative dei corpi della Galassia (per via diretta nell'intorno del sistema solare e indirettamente in altre regioni) e col ricercare in seguito se le componenti di tali velocità siano esprimibili, con soddisfacente precisione, con funzioni lineari omogenee delle coordinate relative. Verranno dopo ciò a conoscersi gli elementi della matrice della omografia $d\mathbf{v}/d\mathbf{P}$ e quindi le caratteristiche del campo in ogni intorno e si avrà così una teoria provvisoria, ma basata su criterî razionali, nella quale teoria potrà rientrare la trattazione di tutti i problemi speciali sullo stato cinetico del sistema (caratteri del campo nelle varie regioni, esistenza di ammassi parziali, definizione precisa del concetto di *stato rotatorio locale* e di quello di *dilatazione*, ecc.) e potrà procedersi, riguardo a tali problemi, ad uno studio sistematico con metodo rigoroso e uniforme. Si dovrà necessariamente ritornare, nel corso di questo studio semi-teorico che corrisponde al secondo dei due tipi di ricerca di cui sopra, alla equazione (1), perché questa impone che gli elementi della matrice predetta debbano, se il postulato riguardante il campo sussiste, esser legati da tre relazioni rigorose alle quali si è condotti con l'esprimere che le componenti della velocità che compete a ciascun punto del campo debbano annullare le espressioni che si ottengono proiettando sugli assi il vettore a primo membro della (1).

2. Nel passare ora alla attuazione pratica del procedimento qui accennato in ultimo, occorre premettere che si intende qui di considerare, almeno in un primo tempo, le sole stelle appartenenti all'« intorno » dell'osservatore (supponendo questo collocato al centro del Sole in quanto si immaginano i dati di osservazione già ricondotti, con preliminari correzioni, a questo caso). Chiameremo « intorno » del Sole l'insieme di quelle stelle le cui distanze dal Sole non superino quei valori-limite oltre i quali viene meno la validità degli sviluppi in serie che conducono a trovare le espressioni delle grandezze atte a caratterizzare completamente la deformazione di un mezzo continuo nelle teorie classiche o almeno cessa la possibilità di limitarsi in quegli sviluppi ai termini lineari.

In base alle condizioni generali di uniformità e continuità che si presuppongono nelle suddette teorie e che nel caso del nostro campo si ritengono verificate, può stabilirsi senz'altro la relazione

$$(3) \quad \mathbf{v}_\Sigma - \mathbf{v}_S = \left(\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{P}} \right)_S (\Sigma - S)$$

la quale esprime che i vettori $\mathbf{v}_\Sigma - \mathbf{v}_S$ (velocità relative delle stelle Σ rispetto al Sole S) si ottengono da quelli $\Sigma - S$, definiti dalle congiungenti, coll'applicare a questi ultimi l'operatore (omografia) $d\mathbf{v}/dP$.

Nelle tre relazioni cartesiane alle quali dà luogo la (3) sono da considerarsi come incognite gli elementi a_{rs} della matrice dell'omografia e come dati di osservazione le tre componenti, per ciascuna stella, delle differenze $\mathbf{v}_\Sigma - \mathbf{v}_S$ e così pure le coordinate, rispetto alla terna predetta e in un dato tempo, delle stelle medesime. Riguardo alla prima serie di dati, la loro determinazione *rigorosa* è stata dimostrata possibile ⁽²⁾ ma non è intrapresa di lieve momento quella di effettuarla.

Si può certamente tentare di utilizzare, al fine di ottenere i predetti dati, i moti propri angolari dedotti coi procedimenti ordinari, completandoli poi con misure delle velocità radiali; è però da ritenere sicuro che si introdurrebbero in tal modo cause di errore e per lo meno elementi di gravi dubbi, dipendenti dall'impiego di sistemi di riferimento i quali sono, come ebbi a rilevare nelle mie Memorie qui ricordate, imperfettamente definiti. Ma, lasciando da parte tali questioni non del tutto urgenti, come anche altre considerazioni sulla attuale insufficienza dei dati concernenti le parallassi (e quindi le coordinate che figurano nelle equazioni di cui sopra), deve riconoscersi che sembra giunto il tempo di predisporre programmi e metodi razionalmente organizzati per lo studio sul coordinamento dei moti propri. In conformità di tali concetti, passo ad esporre ciò che credo possa attualmente attendersi da osservazioni studiate in vista degli speciali obbiettivi in questione.

Se indichiamo con x, y, z le coordinate di S (Sole) rispetto a una terna che sia assoluta nel senso innanzi dichiarato, le componenti delle velocità così intese saranno funzioni uniformi delle tre coordinate e del tempo. È ora da osservare che l'operatore vettoriale $d\mathbf{v}/dP$ non dipende da quelle componenti ma solo dalle loro derivate prime rispetto alle coordinate ed è per questo che l'applicazione di esso ai vettori $\Sigma - S$ dà per risultato vettori rappresentanti velocità *relative all'osservatore* e quindi da lui misurabili. I valori (in S) di quelle derivate parziali sono gli elementi a_{rs} della matrice di $d\mathbf{v}/dP$ e rappresentano, come si è detto, le incognite da dedurre. Se chiamiamo ora con ξ, η, ζ le coordinate della stella Σ rispetto alla terna con l'origine in S e orientamento assoluto, e indichiamo brevemente con μ_x, μ_y, μ_z (moti propri) le componenti delle velocità relative predette, l'ipotesi fondamentale sulla esistenza del campo $\mathbf{v}(P, t)$ risulterà convalidata se tutte le osservazioni saranno rappresentabili con relazioni del tipo

$$(4) \quad \begin{cases} \mu_x = a_{11} \xi + a_{12} \eta + a_{13} \zeta \\ \mu_y = a_{21} \xi + a_{22} \eta + a_{23} \zeta \\ \mu_z = a_{31} \xi + a_{32} \eta + a_{33} \zeta, \end{cases}$$

(2) Cfr. su questo argomento i richiami fatti nella Nota I, a p. 2, alle conclusioni di miei lavori anteriori.

la cui corrispondente matrice, che indicheremo brevemente con $\{a_{rs}\}$, basta allora a definire completamente, coi suoi caratteri, la cinematica dei piccoli moti nell'intorno considerato.

3. Venuti in possesso dei predetti dati, che si compendiano nelle a_{rs} , l'esame di tutte le questioni che possono proporsi sul coordinamento in estensioni limitate (intorno del Sole e altri analoghi aggruppamenti in altre regioni della Galassia) si riduce, come si è già detto, ad alcune verifiche numeriche immediate.

Le considerazioni così premesse aprono dunque la via più diretta e naturale per una classifica rigorosa, da un punto di vista cinematico, dei veri casi speciali che può presentare la distribuzione dei moti propri nell'intorno del Sole o in altra regione della Galassia. Con l'attenersi a tali direttive nonché con l'osservanza di altre condizioni necessarie per la compatibilità dei movimenti in esame con le sollecitazioni dinamiche in atto, rimarrà evitato che il ricercatore possa cedere alla suggestione di semplici impressioni e abbandonarsi, nella interpretazione delle osservazioni, a troppo facili intuizioni, perdendo così di vista certi legami logici che sono, di fatto, quelli che regolano la materia.

Entrando nei particolari, ricordiamo come sia noto dalla cinematica delle piccole deformazioni dei mezzi continui - sostanzialmente applicabile, a seguito al predetto postulato generale, ai nostri problemi - che ogni moto rientrando in quegli schemi può esser decomposto *univocamente* in un moto rigido roto-traslatorio e in una deformazione pura. Il vettore della rotazione istantanea, che chiameremo qui *rotazione locale* ⁽³⁾ del gruppo o anche *vortice*, è $1/2 \operatorname{rot} \mathbf{v}$ e pertanto le sue componenti sono

$$(5) \quad \frac{1}{2}(a_{32} - a_{23}) \quad , \quad \frac{1}{2}(a_{13} - a_{31}) \quad , \quad \frac{1}{2}(a_{21} - a_{12}).$$

In quanto alla deformazione pura essa è definita dalla *dilatazione* corrispondente alla omografia $d\mathbf{v}/dP$: altra omografia vettoriale a matrice simmetrica $D \frac{d\mathbf{v}}{dP}$, dipendente quindi da *sole sei* funzioni degli elementi a_{rs} , cioè da

$$(6) \quad a_{11}, a_{22}, a_{33} \quad ; \quad a_{12} + a_{21} \quad , \quad a_{13} + a_{31} \quad , \quad a_{23} + a_{32}$$

costituenti le «componenti» della deformazione (*strain*). Gli spostamenti corrispondenti a tale movimento avvengono allora normalmente alla quadrica di deformazione, cioè alla quadrica con centro in S e di equazione

$$D \frac{d\mathbf{v}}{dP} (\Sigma - S) \times (\Sigma - S) = c,$$

(3) È da ritenersi che questo concetto di *rotazione locale*, mai definito in passato dagli astronomi, possa intervenire utilmente, in futuro, in non poche ricerche di dinamica dei sistemi stellari.

supponendosi la costante determinata in modo che la quadrica passi per Σ .

Il primo problema da esaminare è ora quello di sapere se il postulato fondamentale secondo cui la distribuzione delle velocità debba considerarsi funzione del posto sia effettivamente valido, almeno in un intorno limitato. Ciò apparirà ben presto appena si disporrà di dati di osservazione relativi ad un gran numero di stelle dell'intorno considerato (cioè moti propri e posizioni) e si vedrà se tali dati, introdotti nelle (4), diano luogo ad equazioni compatibili. Nel caso affermativo acquista un senso ben definito qualche problema che altrimenti *non ne avrebbe alcuno*: infatti solo subordinatamente alla condizione di validità delle (4) la decomposizione del moto relativo del gruppo stellare in un moto rigido rotatorio e una *deformazione pura* ha luogo in modo *univoco* e solo nel caso della univocità la rotazione assume un significato essenziale⁽⁴⁾. Avremo, per le (6), assenza di deformazione (moto rigido) se le a_{rs} verificano le condizioni

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{12} + a_{21} = a_{13} + a_{31} = a_{23} + a_{32} = 0.$$

Non saranno, in tal caso, necessariamente nulle le componenti (5) della rotazione: se così fosse sarebbero nulle tutte le a_{rs} e si avrebbe, nell'epoca considerata, un moto rigido puramente traslatorio dell'intero gruppo. Si avrà invece, qualora risultino nulle le (6) e non le (5), un caso che corrisponderebbe al modo più generale di concepire un *ammasso parziale*. Annullandosi infine le (5) e non le (6) si avrebbe un moto *localmente irrotazionale* o a potenziale cinetico.

Appare anche evidente dalle (4) come sia possibile fissare i limiti da assegnare all'intorno considerato. Sono i limiti entro i quali i valori delle coordinate ξ, η, ζ delle stelle sono tali da rendere compatibili le equazioni suddette. Oltre tali limiti si passa ad altre regioni alle quali fanno riscontro per le a_{rs} altri sistemi di valori, da ottenersi con procedimenti che non differiscono essenzialmente da quelli seguiti pel caso dell'intorno del Sole, e ai quali accenneremo in seguito.

4. I nove elementi a_{rs} non debbono però soltanto verificare le relazioni (4) che li legano ai dati di osservazione ma debbono anche rispondere ad altre condizioni di carattere dinamico imposte dalla (1), in quanto che il vettore $\text{rot } \mathbf{v}$ corrispondente alla posizione del Sole dipende dalla distribuzione delle velocità relative di tutte le stelle dell'intorno. Ciò porta a porre fra le componenti (5) di $\text{rot } \mathbf{v}$ tre relazioni ulteriori che è facile scrivere. Notiamo anzitutto che il termine $\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{v}$ sarebbe nullo in un moto perma-

(4) Soggetti dunque ad una sostanziale, preliminare riserva di ordine logico pel mancato accertamento della suddetta condizione di univocità, sono da considerarsi i risultati, annunciati prematuramente, sulla esistenza di una *rotazione galattica*, sia essa generale o « differenziale ».

nente e che a tale stato è certamente vicino l'ammasso galattico e a maggior ragione si può considerare realizzata la medesima ipotesi per periodi relativamente brevi quali sono quelli nei quali si svolgono le operazioni per la determinazione dei moti propri. Stando così le cose, si può tralasciare il primo termine della (1); richiamando allora una nota espressione di $\text{rot}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ e ponendo nel nostro caso $\mathbf{u} = \text{rot} \mathbf{v}$ avremo, poiché il termine $\text{div} \text{rot} \mathbf{v}$ è nullo, la condizione:

$$\text{rot}(\text{rot} \mathbf{v} \wedge \mathbf{v}) = \left(\text{div} \mathbf{v} - \frac{d\mathbf{v}}{dP} \right) \text{rot} \mathbf{v} + \left(\frac{d}{dP} \text{rot} \mathbf{v} \right) \mathbf{v} = 0.$$

Il secondo dei due operatori indicati in parentesi introdurrebbe termini dipendenti linearmente dalle componenti della velocità assoluta di S: in questi però figurano come fattori le derivate parziali seconde, calcolate in S, delle componenti stesse, quantità le quali sono state trascurate nei calcoli che hanno portato a stabilire la (3), dato l'ordine di grandezza degli spostamenti che si considerano. Nello stesso ordine di approssimazione della (3), che sta, come è noto, a base dell'idrodinamica, tralascieremo dunque quell'ultima parte, dopo di che la relazione (1) assumerà la forma:

$$(7) \quad \left(\text{div} \mathbf{v} - \frac{d\mathbf{v}}{dP} \right) \text{rot} \mathbf{v} = 0$$

e dà luogo, quando si tenga conto delle (5) e si ponga al posto di $\text{div} \mathbf{v}$ l'espressione $a_{11} + a_{22} + a_{33}$, a tre corrispondenti relazioni scalari quadratiche, le quali si possono scrivere, dopo qualche riduzione:

$$(8) \quad \begin{cases} (a_{22} + a_{33})(a_{32} - a_{23}) + a_{12}a_{31} - a_{13}a_{21} = 0 \\ (a_{11} + a_{33})(a_{13} - a_{31}) + a_{23}a_{12} - a_{21}a_{32} = 0 \\ (a_{11} + a_{22})(a_{21} - a_{12}) + a_{31}a_{23} - a_{32}a_{13} = 0. \end{cases}$$

Così dunque, mentre la riconosciuta esistenza di nove numeri caratteristici a_{rs} , che verifichino *tutte* le equazioni (4) sarà da interpretarsi quale conferma della esistenza (almeno in regioni parziali) di un campo vettoriale per la velocità, la verifica, da parte degli stessi numeri, delle relazioni (8) sta ad indicare che il movimento definito nell'intorno considerato si svolge sotto l'azione di forze conservative.

(Non è inutile rilevare che le ultime condizioni sono soddisfatte identicamente e quindi *assorbite* nel caso dei moti irrotazionali).

Dell'impiego di altre relazioni, compendiate nella (2) e che contribuiscono, dopo la determinazione delle a_{rs} , a caratterizzare il potenziale delle predette forze, sarà fatto cenno in una successiva Nota.

Biologia. — *Carattere femminile dei tessuti somatici e loro indipendenza in relazione all'origine dei tumori.* Nota (*) del Socio ACHILLE RUSSO.

Indipendente dal problema su la trasformazione della cellula normale in cellula neoplasica, ancora è in discussione quello relativo alla causa della proliferazione cellulare per l'insorgere dei tumori blastomatosi.

Non ostante in Note precedenti (1) si sia rilevato che la causa della proliferazione cellulare per l'insorgere di tali tumori risieda nel *potere germinativo* delle cellule somatiche, ancora oggi è diffusa l'opinione che una potenza blastogena indeterminata si manifesti nelle cellule prima dell'apparire del neoplasma. Tale opinione fu avvalorata di più dopo che i *blastomi* furono riprodotti sperimentalmente con gl'idrocarburi isolati dal catrame, i quali, com'è noto, spennellati in determinati punti della superficie del corpo di piccoli mammiferi, produssero i blastomi, che regredirono, cessando il trattamento, ma che ricomparvero nella stessa area per azione di agenti cancerigeni (2).

Dopo tale risultato, confondendo l'effetto per la causa, fu dedotto che l'idrocarburo avesse avuto per effetto di orientare le cellule per la produzione del neoplasma.

Le diverse conoscenze, acquisite con tale indirizzo, ed il loro dubbio valore, c'inducono a confermare quanto si è detto nelle Note precedenti ed aggiungere che al *potere germinativo* dei tessuti somatici è associato il *carattere femminile*, che dà maggior valore a tale potere.

Il riconoscimento del carattere femminile è fondato in fenomeni osservati nei Metazoi nell'*ovogonio* durante il suo sviluppo, fenomeni che si ripetono nelle cellule del *soma*. Fra i più apprezzabili sono la *eliminazione* di una parte del nucleo sessuale e l'*indipendenza* nel produrre, senz'altro intervento, un nuovo individuo con tutti gli attributi di organismo vivente.

Il primo di tali fenomeni, essendo una delle manifestazioni dell'arricchimento del gamete femminile, necessario alla sua funzione fondamentale di produrre un nuovo individuo, potrebbe avere riscontro nella cellula somatica, che, per azione di determinati stimoli, ha analoga funzione riproduttiva (3).

(*) Presentata nella seduta dell'8 novembre 1952.

(1) A. RUSSO, *Ulteriori notizie sul potere germinativo del soma, ecc.* « Atti Accad. Gioenia », Catania 1950; *Potere germinativo dei tessuti somatici, ecc.* « Rend. Acc. Lincei », 1951 e « Boll. Acc. Gioenia », 1951.

(2) Tali risultati furono convalidati, limitando con la punzonatura le aree spennellate ed altre aree simili non spennellate, ed ottenendo solo nelle prime lo sviluppo dei tumori.

(3) A. RUSSO, *Diminuzione cromatica nei blastomeri somatici di alcuni Metazoi e negli individui equivalenti di un Ciliato.* « Rendic. Acc. Lincei », Roma 1949.

L'identità delle manifestazioni di arricchimento, oltre ai casi già descritti in diversi *Metazoi*, è più chiaramente ed elementarmente dimostrata nelle prime fasi percorse dal ciclo di sviluppo di un *Protozoo Ciliato*, rese evidenti nell'annessa figura. In essa, infatti, l'eliminazione, sotto forma di un filamento, si osserva solo nell'individuo adulto femminile (A) quando, nel corso della *mitosi* del suo nucleo sessuale, compie la *divisione differenziale* (B). La stessa eliminazione si compie negli individui derivati, che sono destinati a produrre i gameti *germinali* e *somatici* (C-D), i quali, non ostante la diversa origine, copulando, ricostituiscono due nuovi cicli con le relative forme adulte.

L'individuo maschile, pure percorrendo fasi identiche, non elimina alcuna sostanza dal suo nucleo sessuale e non prende parte alla formazione dei nuovi individui, funzionando, come fu dimostrato ⁽⁴⁾, da *attivatore* dei processi riproduttivi, conferendo maggiore indipendenza all'individuo femminile.

L'indipendenza del *soma* ed il suo carattere femminile, messi in rapporto con la proliferazione cellulare preblastomatosa, hanno riscontro in natura nella formazione di nuovi organismi sia direttamente dall'*uovo*, senza che si unisca all'elemento maschile, come nella *partenogenesi*, sia direttamente dalle cellule somatiche, come si osserva in diversi gruppi di *Metazoi*, a mezzo di *gemmazioni*, di *stoloni proliferi* o con analoghe formazioni, già rilevate nei *Poriferi*, negli *Idrozoi*, nei *Vermi*, nei *Tunicati* ⁽⁵⁾.

La femminilità del *soma*, dimostrata dal potere germinativo e dalla sua indipendenza, chiarisce quanto veniva affermato, senza conoscerne la causa, che i *blastomi* siano individui con gli attributi degli organismi viventi ⁽⁶⁾.

Ma, alla realtà fanno ancora contrasto le ipotesi, nessuna delle quali ha valorizzato per intero il potere germinativo del *soma*, con il quale è solo possibile concepire il valore biologico dei *blastomi* ⁽⁷⁾.

(4) La eliminazione di sostanza dal nucleo sessuale ha relazione anche con lo sviluppo del potere germinativo nelle cellule femminili. Una prova di tale relazione è data dal nostro Ciliato in quanto nello stadio del suo ciclo vitale, in cui il gamete femminile fornisce uno dei suoi nuclei al gamete maschile, tale nucleo, per assumere la funzione riproduttiva, compiendo la *3ª mitosi*, elimina parte del suo contenuto, come chiaramente fu dimostrato nella Memoria del 1930.

(5) La presenza di cellule germinali, perchè dal *soma* si producano nuovi individui (*Weismann*), ha perduto di valore dopo che è dimostrato le cellule sessuali e quelle somatiche hanno identico potere germinativo per la comune origine dei loro nuclei da quello dell'ovo o dell'individuo adulto femminile del Ciliato, come si rileva dall'annessa figura. Tale comunanza, controllata in tutti gli stadi del ciclo del Ciliato (« Rend. Acc. Lincei », 1930, p. 71), è la più concreta dimostrazione del potere germinale del *soma* in tutti gli esseri organizzati.

(6) Com'è noto, i *blastomi*, a mezzo di cellule con potere germinativo da essi prodotte e che si staccano per trasferirsi, nel corpo che li ospita, in altra sede con mezzi diversi, producono nuovi individui (*metastasi*). La loro individualità è dimostrata anche dal fatto che negli *incroci* si comportano da *allelo*, seguendo le *leggi di Mendel*, come in tutti gli organismi viventi.

(7) In proposito si ricorda che il potere germinativo, in relazione all'origine dei tumori, era stato intravisto da Cohnheim e Durante, avvalorato dopo dallo sviluppo di blastomi

* * *

Le nuove conoscenze potrebbero dare altro avviamento alla ricerca dei mezzi per combattere organismi tanto dannosi (cancro). Poichè finora non si sono ottenuti pratici risultati con i più diversi indirizzi, medici o chirurgici, fu proposto di combatterli prima di svilupparsi non con la *diagnosi precoce*, che non è di sicuro successo, ma attaccando il male alla radice, *sterilizzando il soma*, come altrove si è detto⁽⁸⁾, pure sapendo quali e quante siano le difficoltà da superare.

Biologia. — *Fattori umorali nel ciclo del sacco vitellino degli Uccelli*^(*). Nota di ETTORE REMOTTI e DELFINA BONETTI, presentata^(**) dal Corrisp. E. REMOTTI.

Fra i molteplici problemi, che le condizioni, del tutto particolari, offerte dal sacco vitellino degli Uccelli ci hanno proposto, uno di suggestivo interesse è quello inerente al processo di involuzione, cui esso va incontro, a partire da qualche giorno dopo la schiusa, quando — pressochè esaurita ormai la riserva del tuorlo — la nutrizione del pulcino si incanala per la normale e definitiva via gastroenterica.

Dopo aver dispiegato la sua singolare ricchezza architettonica nel fantastico complesso di pieghe epitelio-vascolari, a funzione secretoria e assorbente, una volta riassunto alla schiusa entro la cavità addominale, questo annesso, tipicamente polarizzato alla utilizzazione della riserva vitellina, rapidamente regredisce nella demolizione e nel riassorbimento delle sue strutture, fino a ridursi ad un esile cercine o bottone connettivale, che, al di sotto delle pareti addominali, ne costituirà, per tutta la vita, il tenue ricordo.

da resti di organi embrionali transitori, che producono forme blastomatose *cordali, renali e branchiali*.

Analogo significato ha l'ipotesi, che riferisce l'origine delle neoplasie a cellule sessuali primordiali, che, nel percorso per raggiungere la sede definitiva (*Beard*), si arresterebbero per annidarsi nei tessuti. Fra le varie ipotesi è da ricordare quella di Th. Boveri, fondata su le *fecondazioni dispermiche* e su la localizzazione di alcuni cromosomi in sede anomala con formazione di una razza cellulare preblastomatosa, che avrebbe anche rapporto con le *mutazioni somatiche* tumorali.

Nel rimandare, per maggiori dettagli, ai *Trattati di patologia* ed a pubblicazioni speciali, si afferma che, mediante gli studi zoologici, spaziando nel vasto campo del *Regno animale*, le ricerche comparative di fine morfologia hanno dato un contributo di fatti più rispondente alla realtà per il problema trattato.

(8) Cfr. n. 1.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia e Fisiologia comparata dell'Università di Genova.

(**) Nella seduta del 13 dicembre 1952.

Postoci il problema delle cause, che devono intervenire a determinare tale caratteristico processo di demolizione - che investe un apparato così imponente come massa e specializzazione strutturale - eravamo riusciti attraverso iniezioni di tuorlo, proveniente da vari momenti dell'incubazione, a prolungarne, per un periodo anche considerevole di tempo, la persistenza, nella sua piena integrità funzionale. L'effetto conservativo del tuorlo appariva nettamente specifico, non ripetendosi con altro materiale come ad esempio soluzione fisiologica od olio di paraffina, fisiologicamente inerti⁽¹⁾.

Evidentemente, i fattori funzionali costituivano - nei limiti dell'esperienza - il momento cui dovevamo la conservazione dell'organo; allo stesso modo che la cessata funzionalità, con l'esaurimento del vitello e la conquista delle nuove possibilità nutritizie per via gastroenterica, sembrava la causa, almeno immediata, della regressione.

Senonchè il problema apparve subito non esaurito. Di fatto, le iniezioni di tuorlo possono assicurare una persistenza che può giungere sino a tre settimane, raddoppiando e più la normale durata dell'organo; ma al di là di questo limite, il processo regressivo interviene sempre inesorabile, anche se il tuorlo iniettato è ancora presente e le condizioni della funzionalità sono salvaguardate. Il termine della terza settimana costituisce il limite massimo; oltre il quale la decadenza rapidamente subentra, trasformando il complesso sistema epiteliale in un sacchetto connettivale di varia dimensione secondo la massa inutilizzata del vitello, che ancora sussiste.

Per tal modo, come avevamo già segnalato sin dalle precedenti ricerche, se l'esaurirsi della riserva utilizzabile risulta come la causa immediata del processo involutivo, si profilano tuttavia sullo sfondo altri fattori, evidentemente di origine interna, come condizionatori del ciclo dell'organo, irrevocabili nel definire il destino, anche se tali da consentire un gioco relativamente ampio, entro cui agiscono gli stimoli funzionali.

Il problema offre, evidentemente, un interesse assai più vasto che non sia semplicemente la decadenza di questo annesso embrionale di per sé, ché numerosi sono gli organi dotati di un ciclo circoscritto e limitato entro il quadro dell'organismo di cui fan parte: ora semplici e fuggevoli abbozzi, la cui presenza transitoria nel corso dell'edificazione embrionale, senza una funzione sicuramente accertabile, ha potuto suggerire l'ipotetico significato di reminiscenze puramente storiche; ora invece organi veri e propri attivamente funzionanti durante il periodo larvale e destinati a scomparire nel passaggio alla organizzazione definitiva, in rapporto alle mutate condizioni di vita, o, comunque, legati a fasi particolari della esistenza individuale.

Per tutti questi casi il problema dei fattori, che intervengono nella loro riduzione e scomparsa, rimane tuttora uno dei più oscuri e sug-

(1) E. REMOTTI, *Sulla riduzione del sacco vitellino negli Uccelli*. « Ricerche di Morfologia », vol. XI e *Il sacco vitellino degli Uccelli in condizione di persistenza sperimentale*. Ibidem, 1933.

gestivi della storia filogenetica e ontogenetica; né costituisce adeguata spiegazione quella di un determinismo puramente ereditario del loro ciclo.

Il sacco vitellino ci appare quindi, anche per questo problema, un interessante « test », tenuto conto, oltretutto, della facilità con cui può essere sperimentalmente aggredito, senza necessità di traumatismi e senza che ne debbano venir profondamente disturbati i normali equilibri organici, né prima né dopo il termine della vita embrionale.

Stabilito l'intervento di un complesso di fattori attivi nella vita dell'epitelio ⁽²⁾ oltre i limiti di quelli funzionali, le possibilità che si presentano devono ricondursi essenzialmente a due: o si tratta di un declino inesorabile di senescenza, inerente a una condizione intrinseca del tessuto specifico; ovvero subentra, col progredire dello sviluppo e con le modificate condizioni di vita del pulcino, un cambiamento della *facies* dell'organismo e, in particolare, del suo ambiente umorale, che si rende incompatibile con la ulteriore sopravvivenza dell'organo. In questa seconda ipotesi, potremmo considerare il sacco vitellino legato più propriamente a una *facies* di tipo embrionale, che verrebbe a decadere col termine di questo primo periodo di vita, per trasformarsi non sappiamo come e per quali meccanismi in una *facies* definitiva, ad esso inadeguata.

Questa seconda eventualità, assai più che la prima, appare accessibile a una verifica sperimentale, nel tentativo di prolungare, al di là della schiusa, una fisionomia embrionale dei liquidi circolanti, rispetto alla quale saggiare le reazioni del sacco del tuorlo.

Si trattava, in altri termini, di iniettare per via parenterale estratti ottenuti da embrioni nel corso dello sviluppo. Ovvio è, naturalmente, la precarietà di un simile intervento, ché non sappiamo anzitutto, che cosa propriamente caratterizzi l'ambiente embrionale, se l'esclusività di particolari sostanze (basta pensare ai trefoni) o non piuttosto una specifica configurazione quantitativa dei componenti ordinari. In un caso come nell'altro, sono prevedibili *a priori* le difficoltà derivanti sia dalla diluizione del materiale iniettato, sia da modificazioni indotte dai poteri autoregolatori dell'organismo, dinanzi a componenti che possono ormai, nella nuova fase, considerarsi come eterogenei e quindi estranei.

L'interesse del problema giustificava tuttavia nonostante le difficoltà prospettate, il tentativo, usando materiale prelevato da momenti diversi dell'incubazione e ripetendone successivamente le iniezioni più volte a determinati intervalli.

L'operazione è stata condotta su pulcini dopo la schiusa a partire dal 3^o-4^o giorno: in alcune serie con iniezioni ripetute a giorni alterni per un periodo di 12-15; in altre invece con un'unica iniezione, a vari momenti della vita postembrionale.

(2) E. REMOTTI, *I fattori della disciplina intraorganica e i loro riflessi sulla genesi delle neoplasie*. « Atti Acc. Ligure Scienze e Lettere », vol. V, 1947.

Il materiale iniettato (per iniezione sottocutanea, praticata nella coscia) proveniva da uova dei primi giorni dell'incubazione. L'embrione veniva isolato dal sacco del tuorlo e ripetutamente lavato con soluzione fisiologica, onde allontanare ogni traccia di albume e di vitello, e successivamente posto in autolisi asettica per 24-48 ore alla temperatura di 39°. In tutti gli operati, come nei controlli, si procedeva a una iniezione di tuorlo entro la cavità del sacco, onde assicurare le condizioni funzionali della sopravvivenza.

Il sacco vitellino dei pulcini trattati veniva prelevato, quando l'esame dei controlli rivelava i segni manifesti di avviata degradazione.

Fatto generale nel quadro della ricerca è che i sacchi vitellini degli animali saggio appaiono ancora normalmente integri quando i sacchi dei controlli sono già in via di rapido decadimento. In altri termini, l'innesto di sostanza embrionale riesce ad assicurare la sopravvivenza del sacco, quando anche la prolungata funzionalità da sola non è più sufficiente a prevenire la regressione.

Per quanto concerne i particolari che emergono dalle nostre esperienze gli esiti migliori si hanno con estratti embrionali che non abbiano superato il nono-decimo giorno di incubazione; con estratti più tardivi gli esiti si fanno meno definiti e decisi.

Il senso dei reperti ottenuti sembra abbastanza palese: la iniezione di estratti embrionali si manifesta capace di ripristinare una condizione che, per alcuni aspetti almeno, deve essere prossima a quella dell'embrione. Il reperto di per sé è dunque sufficiente a localizzare in questa particolare *facies* dell'ambiente interno dell'organismo uno degli elementi di conservazione delle strutture del sacco, del cui decadimento la causa ultima sarebbe quindi da cercarsi nelle condizioni biochimiche in cui l'organo si trova dopo la schiusa. Non tanto quindi un fattore intrinseco di senescenza dell'organo come tale, quanto piuttosto un fattore umorale.

I dati particolari emersi dalle esperienze possono portare interessanti chiarimenti a questa conclusione. Di fatto che la iniezione tardiva risulti inefficace è non difficilmente spiegabile con l'accentuarsi sempre maggiore della nuova fisionomia biochimica del pulcino nonché dei suoi poteri autoregolativi atti a difendere la costanza del suo ambiente interno dai fattori eterogenei di perturbazione. E possiamo con questo spiegare come inevitabilmente anche col nuovo trattamento i sacchi vitellini non possano indefinitamente sopravvivere, in un ambiente che è sempre più difficile modificare in senso ad essi favorevole.

Di particolare interesse è la svolta che sembra aversi intorno al 5° giorno di età, come indice di bruschi cambiamenti intervenuti nel mezzo interno del pulcino. Di fatto è proprio a questo momento che il declino normale del sacco assume un andamento rapido e deciso. La cosa ha una suggestiva sincronia con un altro singolare fatto proprio di questo giorno: la improvvisa comparsa dei riflessi di terrore che difenderanno tutta l'esistenza

dell'animale adulto, sconosciuti invece sino a questo momento. Benché sopra un piano funzionale del tutto diverso, i due ordini di cambiamenti propri di questo momento stanno ad indicare un'importante variazione dell'organismo.

D'altro lato, che l'efficacia del materiale embrionale iniettato si attenui fortemente dopo il 9^o-10^o giorno di incubazione, quando subentrata la pienezza della digestione, oltrechè proteica, lipidica delle riserve del tuorlo, la fisionomia metabolica dell'embrione assume ormai una complessità paragonabile a quella dello stato adulto - integrata anche dalla conquistata funzione biliare a livello del fegato ⁽³⁾ - è dato che conferma ancora per una nuova via l'importanza della *facies* umorale di tipo strettamente embrionale, nella economia del sacco del tuorlo, facendoci d'altro lato pensare che il destino di questo cominci ad essere segnato assai prima che le manifestazioni esterne del suo decadimento lo rendano manifesto. Il che non esclude che, sopra una curva avviatasi assai prima, i primi giorni successivi alla schiusa, con tutte le modificazioni indotte soprattutto dalle risonanze della mutata alimentazione si incidano come un periodo di crisi atto ad accelerarne l'andamento.

Dicendo *facies* embrionale dell'ambiente interno non è naturalmente possibile precisare di più il momento caratteristico: se, come abbiamo accennato più sopra, possa trattarsi di una semplice differenza di ordine quantitativo nei rapporti di proporzione dei vari costituenti, o non piuttosto della presenza dall'uno all'altro caso, di componenti nuove; o se più particolarmente non si tratti di una differenza di tipo proteico od enzimatico. È evidente che ci troviamo qui dinanzi a un problema di interesse generale, che richiede ulteriori ed adeguate ricerche.

D'altro lato, parlando di incompatibilità umorale, nulla possiamo dire sui meccanismi attraverso i quali questa si manifesta od agisce. In particolare, non possiamo escludere che essa si identifichi con una vera e propria senescenza del tessuto. Ci troviamo cioè dinanzi al problema dibattutissimo del significato e della genesi di questo processo; quanto cioè esso costituisca inesorabile destino del protoplasma vivo, insito nelle sue stesse intrinseche caratteristiche, e quanto sia condizionato dalla presenza di materiali incompatibili nel mezzo esterno. Nel qual caso le due ipotesi da noi prospettate all'inizio verrebbero praticamente a identificarsi.

Riassumendo complessivamente i dati delle nostre ricerche, possiamo dunque dire che due ordini di fattori intervengono nella involuzione cui il sacco vitellino va incontro a breve distanza dalla schiusa:

un fattore fisiologico, che ci riconduce al vecchio asserto dello « stimolo funzionale che agisce come stimolotrofico » ed è rappresentato dall'esaurimento del materiale atto a stimolare le attività secretorie e assor-

(3) DELFINA BONETTI, *Evoluzione epatica da stimoli epatosimili*. « Atti Unione Zoologica italiana », Convegno di Milano 1952.

benti dell'epitelio mantenendone in efficienza i processi metabolici destinati alla sua conservazione;

un fattore umorale costituito dalla *facies* biochimica dei liquidi circolanti dell'embrione, *facies* che, con il progredire dello sviluppo a partire probabilmente già dal 9°-10° giorno di incubazione e più dopo la schiusa diviene incompatibile con l'ulteriore sopravvivenza dell'organo.

Dei due fattori, il secondo sembra costituire il momento decisivo inesorabile, i cui termini possono soltanto essere dilazionati, ma non soppressi dall'intervento del primo.

I limiti, che, anche in queste esperienze, si sono incontrati, prospettano evidentemente il problema della difficoltà di assicurare oltre un certo momento, una continuità della *facies* embrionale nel pulcino, dimostrandoci da un lato la profonda variazione (di cui abbiamo altri caratteristici per quanto indiretti indizi), che deve separare sul piano della composizione dei liquidi circolanti le due fasi di vita, e, d'altro lato, richiamandoci all'esistenza di poteri di regolazione attraverso i quali anche sotto questo aspetto, l'animale si assicura la stabilità del proprio mezzo interno.

Comunque, pur nella complessità dei problemi nuovi che, come sempre, si delineano non appena si sfiora la soluzione di un problema precedente, il dato che importa qui sottolineare è l'esistenza di un rapporto tra un organo e il mezzo interno in cui esso è immerso, rapporto che è condizione delle possibilità stesse di permanenza del primo, in confronto alle eventualità di modificazioni del secondo. In altri termini vi è, alla base della normale esistenza dell'organo in seno all'organismo, un problema di compatibilità degli umori che può venir meno, sia per ordinaria evoluzione, sia per abnormi modificazioni di ordine patologico. In questo caso l'organo sembra destinato a un processo più o meno profondo e decisivo di decadenza e di riduzione.

I fenomeni di riduzione cromatinica che abbiamo già segnalato nella regressione del sacco vitellino, potrebbero suggerirci forse la sede principale di questi processi involutivi, in una riduzione del metabolismo di quegli acidi nucleici dei quali sappiamo ormai tutta l'importanza come fattori regolatori delle sintesi proteiche nel nucleo come nel citoplasma, e quindi di quei processi anabolici cui, nel permanente giuoco di degradazione e costruzione, è affidata la continuità stessa delle strutture viventi.

Su questo rapporto demolizione/sintesi in seno al citoplasma noi possiamo allora impostare il giuoco contrastante tra fattori funzionali e fattori umorali. In quanto possono, per l'effetto trofico dello stimolo funzionale, esaltare la fase anabolica protoplasmatica, i fattori funzionali potranno opporsi a quelle condizioni umorali che viceversa tendono a deprimerla, e potranno così ritardarne anche la fatalità di azione; ma lo stimolo funzionale potrà agire solo entro i limiti consentiti dalla « recettività » del tessuto, cioè entro i limiti consentiti dalla opposta azione dell'ambiente nel quale esso è immerso.

È evidente che i dati sopra esposti, come risultato delle indagini condotte sul sacco vitellino, hanno un interesse e propongono una serie di problemi, che al solito va molto oltre i confini della fisiologia di questo annesso embrionale.

Come abbiamo già accennato in principio, numerosi sono gli organi che hanno una durata più o meno circoscritta nell'ambito dell'organismo che li ospita e che, a un certo momento, inesorabilmente si riducono e scompaiono. Non occorre dilungarci qui in esempi. D'altro lato sul piano patologico non pochi sono i fenomeni di atrofie o degenerazioni, di cui è praticamente impossibile definire i momenti causali. E se, in alcuni casi, il venir meno di uno stimolo funzionale potrà costituire ancora la spiegazione del processo di atrofia, per altri, che abbiamo già definito cronotropi dobbiamo ritenere l'esistenza ne sia piuttosto legata a una fisionomia del mezzo interno specificamente adatta, la cui evoluzione potrà anche segnarne la fine.

Nel caso stesso del pulcino le nostre precedenti ricerche, dimostrando la tipica solidarietà dell'amnio come dell'allantoide con l'evoluzione embrionale, ne inquadrano anche i fattori del decadimento al termine dell'incubazione entro il gioco umorale dell'organismo.

Allo stesso modo, la cosa può avere la sua significazione nel piano filogenetico dinanzi al problema degli organi rudimentali o, più genericamente, al declino, nella storia evolutiva di un gruppo, di organi cui spettava importanza funzionale nelle tappe precedenti del gruppo stesso. Ché, anziché il lentissimo e per tanti motivi dubbio meccanismo dell'uso e del non uso, sarà assai più semplice e rapido un effetto mutazionale a spiegarci come il mezzo interno possa divenire, per brusco salto incompatibile per essi e determinarne così la scomparsa non persistendone, tutt'al più, che ricordi più o meno inerti e indifferenziati (organi rudimentali).

D'altro lato il problema è perfettamente invertibile: se la incompatibilità del mezzo interno può essere un fattore di riduzione e scomparsa di un organo preesistente anche soltanto nella storia ontogenetica individuale, potrà dal canto opposto, invocare una modificazione favorevole dello stesso mezzo come fattore che, ad un determinato momento dell'ontogenesi «evoca» la formazione di un organo nuovo, creando l'ambiente biochimicamente favorevole all'entrata in azione del complesso genico corrispondente, al manifestarsi cioè delle potenze ereditarie.

È quanto costituisce oggetto di una serie di ricerche da noi avviate nel nostro Istituto.

Embriologia. — *Nuovo contributo all'ipotesi di una componente vasale nella correlazione antagonista epitelio-vasi* ^(*). Nota di ETTORE REMOTTI e SILVANA ISSEL, presentata ^(**) dal Corrisp. E. REMOTTI.

Abbiamo, in una ormai lunga serie di osservazioni e di esperienze, usando come « test » l'epitelio del sacco vitellino degli Uccelli, documentato l'importanza dei vasi — o più precisamente della sua parete — come fattore di disciplina del sovrastante epitelio, di cui limita la proliferazione e favorisce, viceversa, l'ordinamento e la differenziazione, verso le forme più complesse e specializzate di attività secretoria e assorbente ⁽¹⁾.

L'andamento dello sviluppo normale da un lato, e dall'altro, sui sacchi ormai adulti e differenziati, la reazione dell'epitelio alle varie modalità di soppressione sperimentale di tratti più o meno estesi della rete vasale, convergono infatti sull'esistenza di un tale rapporto di antagonismo, dimostrando come la conquista dei tratti definitivi di organizzazione e di funzionalità, nonché poi la loro successiva persistenza, sia legata a quella ricca trama di elementi vascolari su cui si distende e si modella in un sistema ricchissimo di pieghe e arricciature la ordinata lamina epiteliale.

Abbiamo ripetutamente insistito sull'importanza di una tale funzione del vaso in quanto essa, rilevabile sul sacco vitellino per le sue peculiarità di struttura, può però gettare luce su assai più ampio raggio, investendo quello che è forse il più misterioso momento della fisiomorfologia di qualsiasi organo, la edificazione e la conservazione di una architettura stabile e ordinata, in opposizione alla potenza espansiva delle cellule, e nonostante il continuo moto profondo di rinnovamento dei materiali costitutivi.

L'interesse di un tale problema può naturalmente giustificare ogni tentativo di sviluppare al massimo possibile le esperienze, onde raccogliere tutti quei dati che possano più completamente illuminare nei suoi possibili aspetti un simile rapporto correlativo.

Un punto particolare che richiedeva ulteriore definizione era la natura di questo controllo esercitato dal vaso. Numerose esperienze ci hanno permesso di escludere dall'effetto correlativo la circolazione come tale; la soprav-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia e Fisiologia comparate dell'Università di Genova.

(**) Nella seduta del 13 dicembre 1952.

(1) E. REMOTTI. Per la letteratura vedi: *I vasi come fattore di correlazione intraorganica e riferimenti al problema delle neoplasie*. « Arch. Ital. di Anat. e Embriologia », vol. XLVII, 1942; *I fattori della disciplina intraorganica e i loro riflessi sulla genesi delle neoplasie*. « Atti Accad. Ligure Scienze e Lettere », vol. V, 1947; SILVANA ISSEL, *Fenomeni di sopravvivenza e di correlazione epitelio-vasi nel sacco vitellino degli Uccelli*. « Boll. Musei e Istituti Biologici Università Genova », vol. XXIII, 1950, N. 147.

vivenza di tronchi vascolari segregati dal torrente circolatorio, è infatti sufficiente a salvaguardare il sovrastante epitelio da quei processi di ringiovanimento moltiplicativo, che lo investono invece tutte le volte che, nell'area ormai già differenziata e matura del sacco, esso venga privato dal vivo contatto con le pareti vasali, anche se, morte queste, la circolazione si sia tuttavia potuta, con adeguati artifici sperimentali, mantenere.

L'ipotesi di un ormone elaborato da questi tessuti, si presentava, evidentemente, una volta esclusa la componente circolatoria, come la più naturale e spontanea; tuttavia restava pur sempre un'ipotesi, non potendosi escludere in modo sicuro un meccanismo di controllo di tutt'altra natura, quale ad esempio un effetto di semplice contatto tra i due diversi tessuti così intimamente associati, con il probabile concorso di una differenza di potenziali elettrici.

Il mezzo più diretto per la risoluzione del problema, si presenta, evidentemente, fornito dalla iniezione di materiali costitutivi della parete vasale, il che val quanto dire di un estratto di questi tessuti. Sul piano concreto però occorre superare la difficoltà non piccola di una quantità adeguata di un materiale così difficilmente isolabile dai restanti elementi dell'organo e, dal punto di vista quantitativo così esilmente rappresentato rispetto a questi. Difficoltà ancora accentuata dalla ulteriore diluizione, cui il materiale va incontro per il fatto stesso della sua iniezione entro la massa del tuorlo cavitario; donde la estrema problematicità dell'esito di questa esperienza.

Ci è sembrato tuttavia poter risolvere la duplice difficoltà ricorrendo ad alcuni artifici sperimentali che verremo rapidamente esponendo, e utilizzando inoltre una particolarità topografica del sacco vitellino, che ci è occorso di osservare durante le passate esperienze.

Embrioni allo stadio, in cui le strutture del sacco hanno raggiunto il loro pieno sviluppo – superata cioè la prima decade di incubazione – venivano prelevati dall'uovo, accuratamente lavati in soluzione fisiologica onde asportare le tracce residue dell'albumine nonché la massa ancora presente di tuorlo, e posti in sopravvivenza ancora in soluzione fisiologica, ad adeguata temperatura. In queste condizioni l'embrione può vivere per parecchie ore, il che, dato l'intenso ricambio di questa fase di vita, si traduce in un rapido esaurimento delle tracce di vitello rimaste aderenti alla superficie interna dell'epitelio, nonché degli inclusi endocellulari, per passare talvolta rapidamente a una vera autodigestione dell'epitelio stesso. Quando l'embrione riesce a resistere abbastanza a lungo in questo stato di inanizione, l'epitelio del sacco si assottiglia e si riduce fortemente, mentre intatto sopravvive il complesso dei vasi. Per un tale processo di « arricchimento vasale » è possibile, dai sacchi vitellini prelevati a questo momento, ottenere un estratto, che conterrà in prevalenza, anche se non esclusivamente, i materiali della parete.

Per quanto concerne il « test » più opportuno per una tale ricerca è necessario richiamarci qui brevemente a qualche dato della normale morfologia

costruttiva dell'organo. Di fatto, come abbiamo già più volte segnalato, la progressiva estensione del sacco vitellino durante l'incubazione, intorno alla sfera del tuorlo, avviene per l'attività proliferativa di un cercine marginale, le cui cellule - disordinatamente disposte in più piani - sono sede di un vivace movimento mitotico. A mano a mano che questo cercine marginale avanza distalmente, i suoi elementi più prossimali vengono ordinandosi in una lamina epiteliale monostratificata, che rappresenta il tessuto definitivo. Il cercine marginale è anangico e l'ordinamento e la stabilizzazione dei suoi elementi seguono, di pari passo, l'estendersi della rete vasale, che avanza anch'esso dal polo prossimale del sacco, alquanto arretrata rispetto al suo bordo terminale. Tale parallelismo può dalle nostre esperienze essere interpretato come un rapporto di causa ad effetto, il vaso avanzante dovendosi considerare appunto come l'elemento ordinatore delle cellule della massa epiteliale.

Superata la prima decade della vita embrionale, questo processo è praticamente esaurito, in quanto tutta la sfera del tuorlo è ormai racchiusa entro il sacco, il cui epitelio ha raggiunto la sua definitiva organizzazione. Ma, al polo distale, l'orificio - per quanto angusto - non si chiude (singolare difficoltà degli organismi di rigenerare o chiudere aperture circolari) e per tutta l'ulteriore esistenza dell'embrione sussisterà - ombelico ombelicale degli embriologi - aprendosi sulla sottostante massa residuale dell'albume, di cui ha potuto essere considerato come una via di riassunzione, entro la cavità vitellina. E sino alla fine, quando cioè dopo la schiusa il sacco avvierà il suo processo di riduzione, il cercine di cellule che lo delimita, conserverà la sua primitiva anangicità, i vasi non raggiungendo mai il limite estremo dell'orlo dal quale si arrestano a una certa distanza. E quando - come nelle nostre precedenti esperienze sulla « persistenza sperimentale » - questo epitelio vitellino, prossimo all'esaurimento, viene dall'iniezione di nuovo tuorlo ⁽²⁾, stimolato a una ripresa di attività, nel risveglio generale, che investe tutta la superficie attiva del sacco, anche il cercine distale risponde con una forma di reazione del tutto caratteristica. Di fatto, mentre il restante tessuto praticamente si limita a una ripresa di funzionalità - salvo fatti locali di arricchimento e ulteriore complicazione delle pieghe - nel cercine terminale assistiamo al riaccendersi di una attività proliferativa, che porta alla formazione di zaffi e ciuffi ondegianti entro lo stretto lume dell'ombelico ombelicale. Come sempre, là dove il vaso è presente, la disciplina del tessuto è conservata - gli aspetti proliferativi localizzati esprimendo forse focolai circoscritti di diminuita efficienza correlativa vasale, in un organo di cui è imminente, se non forse già avviato, il processo degradativo; dove il vaso è assente, manca il freno al risvegliarsi delle sopite ma non spente capacità moltiplicative delle cellule.

Nuovo documento di per sé della correlazione epitelio-vasi, un tale quadro ci offre la possibilità di localizzare un'area ben definita e circoscritta

(2) E. REMOTTI, *Il sacco vitellino degli Uccelli in condizioni di persistenza sperimentale* in « Ricerche di Morfologia », 1933.

di persistente giovanilità dell'epitelio e quindi di sensibilità a un eventuale controllo vasale. Essa può quindi rappresentare il « test » utilizzabile per il problema propostoci. Anziché diluire l'estratto entro la massa vitellina di un sacco in via di organizzazione, di cui si debba indagare la reazione del cercine marginale, questo superstite cordone anangico dell'ombelico ombelicale ci consente di applicare il materiale iniettato direttamente sul territorio sensibile entro confini ristretti e definiti.

Per tal modo pulcini appena schiusi venivano in un primo intervento iniettati di nuovo tuorlo, onde risvegliare le sopite attività dell'epitelio vitellino. .

Successivamente, mentre una parte ne rimaneva come controllo, gli altri venivano, a distanza di giorni, trattati con l'estratto vasale iniettato al polo distale del sacco, in vicinanza quindi del cercine anangico terminale. Il prelievo per l'osservazione veniva fatto nelle 48 ore successive.

Il risultato di questa nuova serie di esperienze è venuto a portare una significativa conferma ai dati precedenti permettendoci anche di definire con maggiore precisione le modalità.

Di fatto mentre i controlli hanno presentato nelle diverse serie una elevata percentuale di proliferazioni epiteliali nella zona del cercine a seguito dell'effetto stimolante della iniezione di tuorlo – con intensità peraltro notevolmente varie da individuo a individuo – i sacchi trattati con estratto vasale hanno dato quasi sempre esito negativo, espresso dall'inerzia dell'epitelio della zona anangica.

Questo reperto viene a confermare un altro dato già da noi precedentemente raccolto con estratto di vaso ⁽³⁾, fornendoci dunque una documentazione, che possiamo dire diretta, circa una componente di natura ormonica di questa azione di blocco esplicita dai tessuti delle pareti vasali sulla moltiplicazione delle cellule dell'epitelio. Ove questa funzione potesse essere generalizzata noi potremmo considerare il sistema dei vasi come una vera e propria ghiandola endocrina diffusa, fattore fondamentale nella stabilità organizzativa degli organi almeno epiteliali.

(3) E. REMOTTI, *Ancora sull'antagonismo epitelio-vasi in rapporto con il primo momento dell'insorgenza neoplastica*. « Boll. Soc. Ital. di Biologia Sperimentale », vol. XXIII, fasc. 12, 1947; *La relazione vaso-epiteliale e il primo momento della insorgenza neoplastica*. Ibidem, vol. XXIV, fasc. 1, 1948.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Maggiorazione della soluzione di un problema al contorno, di tipo misto, relativo a una equazione a derivate parziali, lineare, del secondo ordine*^(*). Nota di CARLO PUCCI, presentata ^(**) dal Socio M. PICONE.

Nella presente Nota si stabiliscono delle limitazioni quantitative per l'integrale di una equazione differenziale a derivate parziali, lineare, del secondo ordine, di tipo ellittico-parabolico, supponendo che l'integrale soddisfi a particolari condizioni al contorno. Tali condizioni possono essere pure di tipo misto e cioè, ad esempio, su una parte del contorno è assegnato il valore che deve assumere la soluzione e sulla parte rimanente è assegnato il valore di una determinata derivata direzionale di tale soluzione.

Osserviamo che le maggiorazioni conseguite nel presente lavoro costituiscono una generalizzazione di precedenti risultati ⁽²⁾.

a) Indichiamo con X un punto di uno spazio euclideo S_r a r dimensioni, $r \geq 2$, e con x_1, x_2, \dots, x_r le coordinate di X . Indichiamo con A un campo di S_r , con $\mathfrak{F}A$ la sua frontiera e supponiamo che in ogni punto di $\mathfrak{F}A$ sia definito un asse l penetrante in A ⁽²⁾. Indichiamo con H ed I due insiemi di S_r , privi di punti comuni, e tali che $\mathfrak{F}A = H + I$. L'insieme I inoltre sia tale che ogni asse che passi per un punto X di I e che formi con l'asse l , passante per X , un angolo inferiore a $\pi/2$, risulti penetrante in A ⁽³⁾.

Indichiamo con $\alpha(X)$, $\beta(X)$, $\gamma(X)$ tre funzioni reali definite in H e con $f(X)$, $\hat{c}(X)$, $\hat{b}_h(X)$, $a_{hk}(X)$ ($h, k = 1, 2, \dots, r$), delle funzioni reali definite in $A + I$.

Indichiamo infine con Γ la classe delle funzioni reali continue in $A + \mathfrak{F}A$, che possiedono derivate parziali prime e seconde continue in

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta dell'8 novembre 1952.

(1) C. PUCCI, *Alcune limitazioni per gli integrali delle equazioni differenziali a derivate parziali, lineari, del secondo ordine, di tipo ellittico-parabolico*. « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », VIII, XI, pp. 334-339 (1951).

(2) Ricordiamo che un asse l passante per un punto X di $\mathfrak{F}A$ si dice penetrante in A se esiste su di esso un punto Y tale che i punti interni al segmento XY appartengono ad A e se ha il verso concorde col vettore XY .

(3) Notiamo che se nel punto X è definito un iperpiano tangente ad $\mathfrak{F}A$ e quindi una normale n ad $\mathfrak{F}A$, diretta verso l'interno di A , ogni asse passante per X e formante con n un angolo inferiore a $\pi/2$ penetra in A . Si ha quindi in particolare che l'insieme I soddisfa alla ipotesi dichiarata se in ogni suo punto è definito un iperpiano tangente ad $\mathfrak{F}A$ e l'asse l coincide con la normale n .

$A + I$, e che in ogni punto X di H ove $\alpha(X) \neq 0$ possiedono la derivata direzionale secondo l'asse l definito in tal punto. Ciò premesso, enunciamo il Teorema:

TEOREMA I. — *La funzione $u(X)$, appartenente alla classe Γ , sia un integrale in $A + I$ dell'equazione differenziale*

$$(1) \quad E[u(X)] \equiv \sum_{h,k}^{1,r} a_{hk}(X) \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_{h=1}^r b_h(X) \frac{\partial u}{\partial x_h} + c(X) u = f(X),$$

e soddisfi alle seguenti condizioni alla frontiera

$$(2) \quad L[u(X)] \equiv \alpha(X) \frac{du}{dl} + \beta(X) u = \gamma(X), \quad \beta(X) \neq 0 \quad \text{per } X \in H,$$

$$(3) \quad \frac{du}{dl} = 0 \quad \text{per } X \in I^{(4)}.$$

L'equazione differenziale (1) sia in $A + I$ di tipo ellittico-parabolico non negativo ⁽⁵⁾ e sia

$$(4) \quad c(X) < 0 \quad \text{per } X \in A + I,$$

$$(5) \quad \alpha(X) \beta(X) \leq 0 \quad \text{per } X \in H.$$

In tali ipotesi, se l'insieme H non è vuoto, sussiste in $A + \bar{\mathfrak{A}}$ la seguente limitazione

$$(6) \quad \min \left\{ \min_{A+I} \left[\frac{f}{c} \right], \min_H \left[\frac{\gamma}{\beta} \right] \right\} \leq u(X) \leq \max \left\{ \max_{A+I} \left[\frac{f}{c} \right], \max_H \left[\frac{\gamma}{\beta} \right] \right\}^{(6)};$$

se invece l'insieme H è vuoto sussiste in $A + \bar{\mathfrak{A}}$ quest'altra limitazione

$$(7) \quad \min_{A+I} \left[\frac{f}{c} \right] \leq u(X) \leq \max_{A+I} \left[\frac{f}{c} \right]^{(7)}.$$

(4) Nell'eventualità, non esclusa, che l'insieme I (l'insieme H) sia vuoto le condizioni al contorno si riducono alla (2) (alla (3)).

(5) Ricordiamo che l'equazione differenziale (1) si dice di tipo ellittico-parabolico non negativo in $A + I$ se per ogni punto X di $A + I$ la forma quadratica $\sum_{h,k}^{1,r} a_{hk}(X) \lambda_h \lambda_k$ è definita o semidefinita positiva. Siccome le funzioni $a_{hk}(X)$ possono essere quindi anche identicamente nulle in $A + I$ il teorema sussiste pure per equazioni differenziali del primo ordine.

(6) Abbiamo indicato con $\min_{A+I} \left[\frac{f}{c} \right]$ l'estremo inferiore dei valori assunti dalla funzione $\frac{f(X)}{c(X)}$ per X variabile in $A + I$. Analogamente risultano definiti gli altri numeri $\min_H \left[\frac{\gamma}{\beta} \right]$, $\max_{A+I} \left[\frac{f}{c} \right]$, $\max_H \left[\frac{\gamma}{\beta} \right]$. Notiamo che tali quantità possono essere anche $+\infty, -\infty$ e quindi il teorema può non fornire una effettiva limitazione per la funzione $u(X)$.

(7) Nella Nota già citata in ⁽¹⁾ è provata la limitazione (6) nell'ipotesi che l'insieme I sia vuoto, la limitazione (7) nell'ipotesi che l'insieme H sia vuoto. Quindi i risultati di questo teorema erano già noti per i casi in cui non si tratta di un problema di tipo misto.

Dimostrazione. - Indichiamo con Y il punto di $A + \mathfrak{F}A$ ove $u(X)$ assume il suo valore massimo. Supponiamo da prima che Y appartenga ad A . È allora

$$(8) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x_h} \right)_{X=Y} = 0, \quad \text{per } h = 1, 2, \dots, r,$$

e la forma quadratica

$$\sum_{h,k}^{1,r} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} \right)_{X=Y} dx_h dx_k$$

è definita o semidefinita negativa. Essendo per ipotesi definita o semidefinita positiva la forma quadratica

$$(9) \quad \sum_{h,k}^{1,r} a_{hk}(Y) \lambda_h \lambda_k,$$

per un teorema di Moutard ⁽⁸⁾ è

$$(10) \quad \sum_{h,k}^{1,r} a_{hk}(Y) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} \right)_{X=Y} \leq 0.$$

Verificandosi la (4) possiamo dividere primo e secondo membro della (1) per $c(Y)$ e dalla (8) segue

$$(11) \quad u(Y) = \frac{f(Y)}{c(Y)} - \frac{1}{c(Y)} \sum_{h,k}^{1,r} a_{hk}(Y) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} \right)_{X=Y},$$

e per le (4), (10)

$$(12) \quad u(Y) \leq \frac{f(Y)}{c(Y)} \leq \max_A \left[\frac{f}{c} \right].$$

Supponiamo ora che il punto Y appartenga ad I . Siccome un cambiamento delle variabili indipendenti mediante una sostituzione lineare muta l'equazione differenziale (1) in un'altra pure di tipo ellittico-parabolico non negativo ⁽⁹⁾ e siccome anche nelle nuove variabili sussistono le (2), (3) essendo l'asse l definito in ogni punto di $\mathfrak{F}A$ indipendentemente dal sistema di riferimento, senza alterare la generalità della dimostrazione si può supporre per semplicità che l'asse l definito nel punto Y e l'asse x_r siano paralleli e concordi.

Indichiamo con $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ r numeri reali che fissiamo arbitrariamente con l'unica condizione $\lambda_r > 0$. Indichiamo con λ la retta passante per Y di coseni direttori

$$\cos \widehat{\lambda x_i} = \frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_r^2}}, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

(8) Cfr. ad esempio M. PICONE, *Appunti di Analisi superiore*. Napoli 1940, p. 695.

(9) M. PICONE, op. cit. ⁽¹⁾, pp. 657-658.

Siccome l'asse l passante per Y e l'asse x_r sono paralleli e concordi e $\lambda_r > 0$, si ha $\cos \widehat{\lambda x_r} = \cos \widehat{\lambda l} > 0$ e quindi la retta λ , formando un angolo acuto con il considerato asse l , penetra in A nel punto Y per la ipotesi relativa all'insieme I . Si può determinare perciò un numero positivo ε sufficientemente piccolo in modo che il punto $T \equiv (y_1 + \tau \lambda_1, y_2 + \tau \lambda_2, \dots, y_r + \tau \lambda_r)$ appartenga ad A per $0 < \tau \leq \varepsilon$. Si ha quindi

$$u(T) - u(Y) = \sum_{h=1}^r \left(\frac{\partial u}{\partial x_h} \right)_{X=T'} \tau \lambda_h \leq 0,$$

ove T' indica un punto del segmento YT e quindi di A . Potendo essere τ arbitrariamente piccolo e quindi i punti T e T' prossimi quanto si vuole al punto Y , per la continuità in $A + I$ delle derivate parziali prime di $u(X)$, è

$$\sum_{h=1}^r \left(\frac{\partial u}{\partial x_h} \right)_{X=Y} \lambda_h \leq 0.$$

Per il parallelismo dell'asse x_r e dell'asse l definito in Y , verificandosi la (3) perchè $Y \in I$, si ha

$$(13) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x_r} \right)_{X=Y} = 0,$$

e quindi

$$\sum_{h=1}^{r-1} \left(\frac{\partial u}{\partial x_h} \right)_{X=Y} \lambda_h \leq 0.$$

Dovendo tale relazione essere verificata comunque si fissino gli $r-1$ numeri reali $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r-1}$ sussiste necessariamente il solo segno $=$ e deve essere

$$(14) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x_h} \right)_{X=Y} = 0, \quad \text{per } h = 1, 2, \dots, r-1.$$

Per la (13) e la (14) si ha allora con le solite notazioni e la condizione $\lambda_r > 0$

$$u(T) - u(Y) = \frac{1}{2} \sum_{h,k} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} \right)_{X=T'} \tau^2 \lambda_h \lambda_k \leq 0.$$

Potendo essere τ arbitrariamente piccolo e quindi i punti T e T' prossimi quanto si vuole al punto Y , per la continuità in $A + I$ delle derivate parziali seconde di $u(X)$, è

$$(15) \quad \sum_{h,k} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} \right)_{X=Y} \lambda_h \lambda_k \leq 0$$

ove i numeri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r-1}$ sono arbitrari e λ_r positivo. Cambiando di segno tutti i numeri λ_h la relazione (15) rimane inalterata e quindi essa sussiste anche per $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r-1}$ qualsiasi e λ_r negativo.

La (15) sussiste perciò per $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r-1}$ qualsiasi e λ_r positivo o negativo; per continuità la (15) sussiste pure per $\lambda_r = 0$ e quindi, in conclusione, si è provato che la (15) sussiste comunque si fissino i parametri λ_h . Essendo per ipotesi definita o semidefinita positiva la forma quadratica (9), per il già citato teorema di Moutard e per la (15) si ottiene la (10). Inoltre dalla (1) per la (4) e le (13), (14) segue la (11) e da questa per le (4), (10) segue

$$(16) \quad u(Y) \leq \frac{f(Y)}{c(Y)} \leq \max_I \left[\frac{f}{c} \right],$$

avendo supposto $Y \in I$.

Supponiamo infine che il punto Y appartenga ad H . È allora

$$\left(\frac{du}{dl} \right)_{X=Y} \leq 0,$$

e dalla (2) per la (5)

$$(17) \quad u(Y) = \frac{\gamma(Y)}{\beta(Y)} - \frac{\alpha(Y)}{\beta(Y)} \left(\frac{du}{dl} \right)_{X=Y} \leq \frac{\gamma(Y)}{\beta(Y)} \leq \max_H \left[\frac{\gamma}{\beta} \right].$$

Avendo indicato con Y il punto di $A + \mathfrak{F}A$ ove $u(X)$ assume il suo valore massimo ed avendo provato la (12) se $Y \in A$, la (16) se $Y \in I$, la (17) se $Y \in H$, si ottiene per X variabile in $A + \mathfrak{F}A$

$$u(X) \leq u(Y) \leq \max \left\{ \max_{A+I} \left[\frac{f}{c} \right], \max_H \left[\frac{\gamma}{\beta} \right] \right\}$$

se l'insieme H non è vuoto, ed in caso contrario si ottiene invece

$$u(X) \leq u(Y) \leq \max_{A+I} \left[\frac{f}{c} \right].$$

Per dimostrare anche la limitazione inferiore di $u(X)$ basta osservare che è

$$\sum_{h,k}^{1,r} a_{hk}(X) \frac{\partial^2(-u)}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_{h=1}^r b_h(X) \frac{\partial(-u)}{\partial x_h} + c(X)(-u) = -f(X) \quad \text{per } X \in A + I,$$

$$\alpha(X) \frac{d(-u)}{dl} + \beta(X)(-u) = -\gamma(X) \quad \text{per } X \in H,$$

$$\frac{d(-u)}{dl} = 0 \quad \text{per } X \in I,$$

e per quanto è stato precedentemente dimostrato, supposto H non vuoto, è

$$-u(X) \leq \max \left\{ \max_{A+I} \left[\frac{-f}{c} \right], \max_H \left[\frac{-\gamma}{\beta} \right] \right\} =$$

$$= \max \left\{ -\min_{A+I} \left[\frac{f}{c} \right], -\min_H \left[\frac{\gamma}{\beta} \right] \right\} = -\min \left\{ \min_{A+I} \left[\frac{f}{c} \right], \min_H \left[\frac{\gamma}{\beta} \right] \right\},$$

$$u(X) \geq \min \left\{ \min_{A+I} \left[\frac{f}{c} \right], \min_H \left[\frac{\gamma}{\beta} \right] \right\},$$

per X variabile in $A + \mathfrak{F}A$; se invece l'insieme H è vuoto si ottiene analogamente

$$u(X) \geq \min_{A+I} \left[\frac{f}{c} \right].$$

b) Estendiamo il teorema precedente al caso più generale che si ottiene sostituendo alla ipotesi (3) la condizione che $\frac{du}{dl}$ sia uguale ad una funzione assegnata su I . Manteniamo le solite notazioni con l'unica variante che $\gamma(X)$ indica ora una funzione reale definita su tutto $\mathfrak{F}A$.

TEOREMA II. — *La funzione $u(X)$, appartenente alla classe Γ , sia un integrale in $A + I$ dell'equazione differenziale (1) e soddisfi alle condizioni alla frontiera (2) e*

$$(I8) \quad \frac{du}{dl} = \gamma(X) \quad \text{per } X \in I.$$

L'equazione differenziale (1) sia inoltre di tipo ellittico-parabolico non negativo in $A + I$ e siano verificate le (4), (5).

Se esiste una funzione $w(X)$ della classe Γ che soddisfa alla condizione

$$(I9) \quad \frac{dw}{dl} = \gamma(X) \quad \text{per } X \in I,$$

sussiste per $X \in A + \mathfrak{F}A$ la seguente limitazione

$$w(X) + \min \left\{ \min_{A+I} \left[\frac{f-E[w]}{c} \right], \min_H \left[\frac{\gamma-L[w]}{\beta} \right] \right\} \leq u(X) \leq \\ \leq w(X) + \max \left\{ \max_{A+I} \left[\frac{f-E[w]}{c} \right], \max_H \left[\frac{\gamma-L[w]}{\beta} \right] \right\}$$

nell'ipotesi che l'insieme H non sia vuoto, ed invece quest'altra limitazione

$$w(X) + \min_{A+I} \left[\frac{f-E[w]}{c} \right] \leq u(X) \leq w(X) + \max_{A+I} \left[\frac{f-E[w]}{c} \right]$$

se H è vuoto.

Siccome le funzioni $u(X)$, $w(X)$ sono della classe Γ , anche la funzione

$$v(X) = u(X) - w(X)$$

è della classe Γ . Possiamo quindi applicare a tale funzione gli operatori E , L definiti dalle (1), (2), ed otteniamo così:

$$E[v(X)] = E[u(X)] - E[w(X)] = f(X) - E[w(X)] \quad \text{per } X \in A + I,$$

$$L[v(X)] = L[u(X)] - L[w(X)] = \gamma(X) - L[w(X)] \quad \text{per } X \in H,$$

$$\frac{dv}{dl} = \frac{du}{dl} - \frac{dw}{dl} = 0 \quad \text{per } X \in I.$$

La funzione $v(X)$ soddisfa perciò alle ipotesi del teorema precedente e sussiste quindi in $A + \mathfrak{F}A$ la limitazione

$$\begin{aligned} \min \left\{ \min_{A+I} \left[\frac{f - E[w]}{c} \right], \min_H \left[\frac{\gamma - L[w]}{\beta} \right] \right\} &\leq v(X) \leq \\ &\leq \max \left\{ \max_{A+I} \left[\frac{f - E[w]}{c} \right], \max_H \left[\frac{\gamma - L[w]}{\beta} \right] \right\} \end{aligned}$$

se l'insieme H non è vuoto, e sussiste invece la limitazione

$$\min_{A+I} \left[\frac{f - E[w]}{c} \right] \leq v(X) \leq \max_{A+I} \left[\frac{f - E[w]}{c} \right]$$

se l'insieme H è vuoto.

Essendo $u(X) = v(X) + w(X)$, dalle limitazioni provate per la funzione $v(X)$ segue il teorema.

c) Nel teorema II viene considerata una funzione ausiliaria della quale si suppone l'esistenza. Osserviamo che tale ipotesi comporta implicitamente delle restrizioni per l'insieme I e per la funzione $\gamma(X)$ su I . Per applicare il teorema II si pone la questione, relativamente ad ogni problema al contorno, di provare l'esistenza di una funzione ausiliaria $w(X)$ e di costruirla sfruttando quelle che sono le particolari proprietà del contorno considerato. Se l'insieme I è costituito da porzioni di iperpiani e da porzioni di ipersfere la costruzione di una $w(X)$ è facile ed immediata. Indichiamo ora un caso più generale in cui una funzione ausiliaria $w(X)$ esiste ed anche può essere costruita.

L'insieme I sia costituito da porzioni di ipersuperficie regolare fra di loro a distanza non nulla. Indicata con Λ una generica di tali porzioni, essa risulti definita dalle equazioni parametriche $x_i = \lambda_i(t_1, t_2, \dots, t_{r-1})$, $i = 1, 2, \dots, r$, per $(t_1, t_2, \dots, t_{r-1})$ variabile in T , ove le funzioni $\lambda_i(t_1, t_2, \dots, t_{r-1})$ sono supposte continue in $T + \mathfrak{F}T$ insieme alle loro derivate parziali terze. La funzione $\tilde{\gamma}(t_1, t_2, \dots, t_{r-1}) \equiv \gamma[\lambda_1(t_1, t_2, \dots, t_{r-1}), \dots, \lambda_r(t_1, t_2, \dots, t_{r-1})]$ sia inoltre continua insieme alle sue derivate prime in $T + \mathfrak{F}T$, ed in tutti i punti di Λ l'asse l coincida con la normale n alla ipersuperficie. In tali ipotesi si può costruire una funzione $w(X)$ della classe Γ che soddisfa alla (19).

Matematica. — *Sul differenziale generalizzato delle forme differenziali esterne.* Nota I di GIULIO ARUFFO, presentata (*) dal Corrisp. B. SEGRE.

1. Sia $\omega_r = \frac{1}{r!} a_{i_1, \dots, i_r} [dx^{i_1} \dots dx^{i_r}]^{(1)}$ una forma differenziale esterna di grado r , definita in una n -cella C_n dello spazio euclideo reale S_n ove x^1, \dots, x^n sono coordinate cartesiane ortogonali di punto ($0 \leq r \leq n-1$).

Indicheremo con D_{r+1} un $(r+1)$ -campo orientato qualsiasi contenuto in C_n e con dD_{r+1} il contorno di D_{r+1} con l'orientazione indotta su esso da quella di D_{r+1} . È allora ben noto che, se ω_r è di classe 1 in C_n e se D_{r+1} , dD_{r+1} soddisfano ad opportune ipotesi di regolarità, vale la formula generale di Stokes:

$$(1) \quad \int_{dD_{r+1}} \omega_r = \int_{D_{r+1}} \sigma_{r+1},$$

ove $\sigma_{r+1} = d\omega_r$ è la forma di grado $r+1$ e classe 0 che si ottiene da ω_r con l'operazione di differenziazione esterna di Cartan (2).

Se invece si suppone soltanto che ω_r sia di classe 0, può accadere in certi casi (ma non sempre) che ad ω_r si possa associare una forma σ_{r+1} , anch'essa di classe 0, tale che per ogni D_{r+1} di C_n valga la (1): si dice allora che σ_{r+1} è il differenziale generalizzato di ω_r e (con B. Segre) scriveremo:

$$(2) \quad \sigma_{r+1} = d' \omega_r.$$

È immediato constatare che un differenziale siffatto, se esiste, è unico.

Lo studio del differenziale generalizzato per le forme esterne di classe 0 — proposto da E. Cartan (3) — è stato iniziato da P. Gillis (4) e ripreso recentemente da B. Segre (5), il quale — oltre a riottenere in modo più rapido e perspicuo i risultati di Gillis — ha stabilito due semplici condizioni necessarie e sufficienti per la validità della (2). Nel n. 2 riporteremo tali condizioni, che ci saranno utili in modo essenziale in questa Nota ed in una che seguirà, designandole come Criterio I e Criterio II.

(*) Nella seduta dell'8 novembre 1952.

(1) Supporremo che i coefficienti a_{i_1, \dots, i_r} di una qualsiasi forma ω_r costituiscano un sistema emisimmetrico, adottando la usuale convenzione sulla sommazione tacita rispetto agli indici ripetuti in basso ed in alto.

(2) Cfr. per esempio B. SEGRE, *Forme differenziali e loro integrali*, vol. I, Docet, Ed. Univ. Roma 1951, pp. 169-175.

(3) E. CARTAN, *Leçons sur les invariants intégraux* (Paris Hermann 1945), pp. x e 68-71.

(4) P. GILLIS, *Sur les formes différentielles et la formule de Stokes* (thèse d'agregation). « Mem. Ac. Belgique », Coll. in 8°, to. XX, pp. 3-95 (1943) ed inoltre: P. GILLIS, *Sur quelques théorèmes de la théorie des formes différentielles alternées*. « Bull. Ac. R. Belgique », pp. 175-186 (1943).

(5) B. SEGRE, op. cit. in (*), pp. 186-200, ed anche: *Sul differenziale delle forme esterne di classe zero*. « Atti del Sem. Mat. di Messina », vol. I (1951).

Nel n. 4, dopo aver premesso un lemma (n. 3), semplificheremo l'enunciato del Criterio II, ponendolo (teor. I) in una forma di uso più immediato nelle applicazioni.

Nel n. 5 stabiliremo una proprietà di certe forme chiuse di tipo particolare, mostrando (teor. II) che condizione necessaria e sufficiente affinché risulti

$$d' [\omega_r dx^{k_1} \dots dx^{k_p}] = 0,$$

ove ω_r sia una data forma di classe 0 e k_1, \dots, k_p sia una combinazione di classe p dei numeri $1, 2, \dots, n$, è che, per ogni scelta delle costanti c^{k_l} soddisfacenti alle $0 < c^{k_l} < 1$ ($l = 1, \dots, p$), sia

$$d' \omega_r (X/C) = 0,$$

ove il simbolo $\omega_r (X/C)$ sta ad indicare la « traccia » di ω_r sull' S_{n-p} definito dalle $x^{k_l} = c^{k_l}$, e cioè la forma di classe 0 che si deduce da ω_r ponendo in questa $x^{k_l} = c^{k_l}$, $dx^{k_l} = 0$ ($l = 1, \dots, p$).

Nel n. 7, come ulteriore applicazione del teor. I, mostreremo che la (I) vale nell'ipotesi, meno restrittiva del consueto, che i coefficienti di ω_r abbiano continue quelle sole derivate che effettivamente compaiono nell'espressione formale di $d\omega_r$.

In una Nota che seguirà, mostreremo poi come i precedenti risultati, possano trovare applicazione nella teoria delle funzioni di più variabili complesse.

2. Richiameremo in questo numero i due criteri di B. Segre menzionati nel n. 1, nonché le notazioni introdotte da quell'Autore, di cui pure faremo uso.

Se $\varphi(x^1, \dots, x^n)$ è funzione continua dell' n -blocco E_n definito dalle $0 \leq x^i \leq 1$ ($i = 1, \dots, n$), indicheremo con $\varphi^{[m]}(x^1, \dots, x^n)$ l' m -mo polinomio di Stieltjes approssimante tale funzione, e cioè porremo:

$$\varphi^{[m]}(x^1, \dots, x^n) = \frac{\int_{E_n} \varphi(t^1, \dots, t^n) \prod_{i=1}^n \{1 - (t^i - x^i)^2\}^m dt^1 \dots dt^n}{\left[2 \int_0^1 (1 - t^2)^m dt \right]^n}$$

Poiché, come subito si constata, il polinomio:

$$I^{[m]}(x^1, \dots, x^n) = \frac{\int_{E_n} \prod_{i=1}^n \{1 - (t^i - x^i)^2\}^m dt^1 \dots dt^n}{\left[2 \int_0^1 (1 - t^2)^m dt \right]^n}$$

riesce positivo in ogni punto di E_n , la funzione razionale:

$$\varphi^{(m)}(x^1, \dots, x^n) = \frac{\varphi^{[m]}(x^1, \dots, x^n)}{I^{[m]}(x^1, \dots, x^n)}$$

è regolare in E_n . La successione delle funzioni razionali $\varphi^{(m)}$ gode di proprietà di approssimazione ⁽⁶⁾ del tutto analoghe a quelle ben note relative alla successione dei polinomi $\varphi^{[m]}$, ma offre su questa il vantaggio che, se $\varphi(x^1, \dots, x^n)$ non dipende da x^i , lo stesso accade per ciascuna delle $\varphi^{(m)}$, mentre l'analoga proprietà non vale per i polinomi $\varphi^{[m]}$. Tale circostanza fu utilmente sfruttata da B. Segre, al quale appunto si deve l'introduzione delle funzioni $\varphi^{(m)}$ in sostituzione dei polinomi $\varphi^{[m]}$ nel procedimento di approssimazione usato dal Gillis.

Torniamo ora a considerare la (2). Qui e nel seguito supporremo sempre, salvo esplicito avviso in contrario, che le forme:

$$(3) \quad \omega_r = \frac{1}{r!} a_{i_1, \dots, i_r} [dx^{i_1} \dots dx^{i_r}],$$

$$(4) \quad \sigma_{r+1} = \frac{1}{(r+1)!} b_{i_1, \dots, i_{r+1}} [dx^{i_1} \dots dx^{i_{r+1}}]$$

siano di classe o nell' n -cella C_n ; questa inoltre potrà, senza restrizione, venir identificata con l' n -blocco E_n .

Determiniamo in E_n funzioni continue A_{i_1, \dots, i_r} , $B_{i_1, \dots, i_{r+1}}$ emisimmetriche rispetto agli indici e tali che sia:

$$(5) \quad \frac{\partial^r A_{i_1, \dots, i_r}}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_r}} = a_{i_1, \dots, i_r},$$

$$(6) \quad \frac{\partial^{r+1} B_{i_1, \dots, i_{r+1}}}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_{r+1}}} = b_{i_1, \dots, i_{r+1}}.$$

Possiamo allora enunciare il

CRITERIO I. — *Condizione necessaria e sufficiente perché in E_n valga la (2) è che, per ogni scelta degli $r+1$ indici i_1, \dots, i_{r+1} , sussista un'eguaglianza del tipo:*

$$B_{i_1, \dots, i_{r+1}} = \sum_{i_h}^{r+1} (-1)^{h-1} A_{i_1, \dots, i_{h-1} i_{h+1}, \dots, i_{r+1}} + \sum_{i_h}^{r+1} \lambda_{i_1, \dots, i_{h-1} i_{h+1}, \dots, i_{r+1}},$$

con le λ continue ed emisimmetriche rispetto agli indici, e $\lambda_{i_1, \dots, i_{h-1} i_{h+1}, \dots, i_{r+1}}$ indipendente da x^i .

Posto poi:

$$(7) \quad \bar{\omega}_r^{(m)} = \frac{1}{r!} \frac{\partial^r A_{i_1, \dots, i_r}^{(m)}}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_r}} [dx^{i_1} \dots dx^{i_r}],$$

$$(8) \quad \bar{\sigma}_{r+1}^{(m)} = d\omega_r^{(m)} = \frac{1}{(r+1)!} \bar{b}_{i_1, \dots, i_{r+1}}^{(m)} [dx^{i_1} \dots dx^{i_{r+1}}],$$

vale il:

CRITERIO II. — *Condizione necessaria e sufficiente affinché in E_n sussista la (2) è che, al divergere di m , ciascuno dei coefficienti $\bar{b}_{i_1, \dots, i_{r+1}}^{(m)}$ tenda al cor-*

(6) Cfr. B. SEGRE, op. cit. in (2), pp. 186-190 ed inoltre G. ARUFFO, *Un'osservazione sull'approssimazione di una funzione continua per mezzo di una successione di funzioni razionali*. « Boll. U.M.I. » (marzo 1952), pp. 44-47.

rispondente coefficiente $b_{i_1, \dots, i_{r+1}}$ di σ_{r+1} uniformemente in ogni n -campo D_n tutto interno ad E_n .

Converremo di esprimere in simboli questa condizione, scrivendo (con B. Segre):

$$d\omega_r^{(m)} \xrightarrow{m} \sigma_{r+1} \quad (\text{in } D_n).$$

3. Sia $A(x^1, \dots, x^n)$ una funzione definita nell' n -blocco E_n , ivi continua insieme con ciascuna delle:

$$\frac{\partial A}{\partial x^{i_1}}, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial x^{i_1} \partial x^{i_2}}, \dots, \frac{\partial^r A}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_r}},$$

ove i_1, i_2, \dots, i_r denota una fissata combinazione semplice di classe $r \leq n$ dei numeri $1, 2, \dots, n$. Relativamente ad una tale funzione A , stabiliremo il seguente:

LEMMA. - La funzione razionale $\epsilon^{(m)}$ definita dall'eguaglianza:

$$\epsilon_{i_1, \dots, i_r}^{(m)} = \frac{\partial^r A^{(m)}}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_r}} - \left\{ \frac{\partial^r A}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_r}} \right\}^{(m)}$$

soddisfa alle:

$$\epsilon^{(m)} \xrightarrow{m} 0, \quad \partial^k \epsilon^{(m)} \xrightarrow{m} 0 \quad (\text{in } D_n),$$

ove D_n è un qualsiasi n -campo tutto interno ad E_n , e ∂^k denota una qualunque operazione di derivazione k^{ma} rispetto alle x .

Dimostrazione. - Indicheremo con $s = (s_1, \dots, s_p)$ una qualsiasi combinazione (senza ripetizione) di classe p degli indici i_1, \dots, i_r ($0 \leq p < r$), e con j_1, \dots, j_{r-p} la combinazione complementare. Con la scrittura $\sum_{(s)}$ intenderemo poi che una data somma debba venir estesa a tutte le combinazioni s_1, \dots, s_p di una stessa classe p .

Risulta:

$$(9) \quad \frac{\partial^r A^{(m)}}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_r}} = \frac{\partial^r A^{[m]}}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_r}} \{I^{[m]}\}^{-1} + \\ + \sum_{o=0}^{r-1} \sum_{(s)} \frac{\partial^o A^{[m]}}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_o}} \frac{\partial^{r-o} \{I^{[m]}\}^{-1}}{\partial x^{j_1} \dots \partial x^{j_{r-o}}}.$$

Ma è:

$$\frac{\partial^r A^{[m]}}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_r}} = \left\{ \frac{\partial^r A}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_r}} \right\}^{[m]} + \sigma_m,$$

con:

$$(10) \quad \sigma_m = \frac{I}{2 \int_0^1 (1-t^2)^m dt} \sum_{i=1}^r \frac{\partial^{k-i}}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_{k-i}}}.$$

$$\cdot \left[\{I - (x^{i_k})^2\}^m \left\{ \frac{\partial^{r-k} A(x^1, \dots, x^{i_{k-1}}, 0, x^{i_{k+1}}, \dots, x^n)}{\partial x^{i_{k+1}} \dots \partial x^{i_r}} \right\}^{[m]} - \right. \\ \left. - \{I - (I - x^{i_k})^2\}^m \left\{ \frac{\partial^{r-k} A(x^1, \dots, x^{i_{k-1}}, I, x^{i_{k+1}}, \dots, x^n)}{\partial x^{i_{k+1}} \dots \partial x^{i_r}} \right\}^{[m]} \right],$$

come facilmente si ottiene calcolando per parti l'integrale che esprime

$$\left[\frac{\partial^r A}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_r}} \right]^{[m]}.$$

La (9) può dunque scriversi:

$$(11) \quad \frac{\partial^r A^{(m)}}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_r}} = \left\{ \frac{\partial^r A}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_r}} \right\}^{(m)} + \sigma_m \{I^{[m]}\}^{-1} + \\ + \sum_{p=0}^{r-1} \sum_{(x)} \frac{\partial^p A^{[m]}}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_p}} \frac{\partial^{r-p} \{I^{[m]}\}^{-1}}{\partial x^{j_1} \dots \partial x^{j_{r-p}}}.$$

Ricordiamo ora che:

a) La successione delle costanti $\frac{1}{2 \int_0^1 (1-t^2)^m dt}$ diverge con m dell'ordine

di $\sqrt{m}^{(7)}$.

b) nell'ipotesi che A sia continua in E_r vale ivi la limitazione:

$$\partial^k A^{[m]} = O\left(m^{\frac{n}{2} + k}\right).$$

c) Una qualsiasi derivata di $\{I^{[m]}\}^{-1}$, al divergere di m , tende a zero uniformemente in D_n e dell'ordine di un esponenziale almeno ⁽⁸⁾.

Osserviamo inoltre che, per $m \rightarrow \infty$, ciascuna delle quantità $\{1 - (x^{i_k})^2\}^m$, $\{1 - (1 - x^{i_k})^2\}^m$ tende a zero uniformemente in D_n in modo esponenziale, insieme ad ogni sua derivata: lo stesso accade allora per σ_m , causa l'uguaglianza (10) e le proprietà a), b). Poiché infine nel sommatorio a secondo membro di (11) ogni termine contiene a fattore una derivata di $\{I^{[m]}\}^{-1}$ di ordine $r - p \geq 1$, dalle proprietà b), c) segue che tale sommatorio tende a zero uniformemente in D_n assieme ad ogni sua derivata.

Dalla (11) stessa, si trae allora facilmente la tesi.

4. Possiamo ora dimostrare il:

TEOREMA I. - *Condizione necessaria e sufficiente affinché in E_n valga la:*

$$(2) \quad d^r \omega_r = \sigma_{r+1}$$

è che, posto:

$$\omega_r^{(m)} = \frac{1}{r!} a_{i_1, \dots, i_r}^{(m)} [dx^{i_1} \dots dx^{i_r}]$$

risulti:

$$d\omega_r^{(m)} \xrightarrow{m} \sigma_{r+1} \quad (\text{in } D_n).$$

(7) Cfr. per esempio G. VITALI e G. SANSONE, *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale*, Parte II, 2^a ediz., Bologna, p. 341.

(8) Per le dimostrazioni delle affermazioni b), c) cfr. G. ARUFFO, loc. cit., in (6). In tale lavoro, è anche dimostrata una proprietà del tutto analoga a quella del presente lemma, ove si sostituiscono i polinomi $A^{[m]}$ alle funzioni razionali $A^{(m)}$.

Dimostrazione. - Determinate in E_n funzioni continue A_{i_1, \dots, i_r} emisimmetriche rispetto agli indici e soddisfacenti alle (5), consideriamo le forme (7), (8). Risulta:

$$(12) \quad \bar{b}_{i_1, \dots, i_{r+1}}^{(m)} = \sum_h^{r+1} (-1)^{h-1} \frac{\partial}{\partial x^{i_h}} \frac{\partial^r A_{i_1, \dots, i_{h-1}, i_{h+1}, \dots, i_{r+1}}^{(m)}}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_{h-1}} \partial x^{i_{h+1}} \dots \partial x^{i_{r+1}}}.$$

Poiché A_{i_1, \dots, i_r} può scegliersi in modo da avere continua ciascuna delle:

$$\frac{\partial A_{i_1, \dots, i_r}}{\partial x^{i_1}}, \frac{\partial^2 A_{i_1, \dots, i_r}}{\partial x^{i_1} \partial x^{i_2}}, \dots, \frac{\partial^r A_{i_1, \dots, i_r}}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_r}},$$

per il lemma del n. 3 risulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^r A_{i_1, \dots, i_{h-1}, i_{h+1}, \dots, i_{r+1}}^{(m)}}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_{h-1}} \partial x^{i_{h+1}} \dots \partial x^{i_{r+1}}} &= \left\{ \frac{\partial^r A_{i_1, \dots, i_{h-1}, i_{h+1}, \dots, i_{r+1}}}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_{h-1}} \partial x^{i_{h+1}} \dots \partial x^{i_{r+1}}} \right\}^{(m)} + \\ &+ \varepsilon_{i_1, \dots, i_{h-1}, i_{h+1}, \dots, i_{r+1}}^{(m)} = a_{i_1, \dots, i_{h-1}, i_{h+1}, \dots, i_{r+1}}^{(m)} + \varepsilon_{i_1, \dots, i_{h-1}, i_{h+1}, \dots, i_{r+1}}^{(m)}, \end{aligned}$$

ove $\varepsilon_{i_1, \dots, i_{h-1}, i_{h+1}, \dots, i_{r+1}}^{(m)}$ soddisfa alle:

$$\varepsilon_{i_1, \dots, i_{h-1}, i_{h+1}, \dots, i_{r+1}}^{(m)} \xrightarrow{m} 0; \quad \partial^k \varepsilon_{i_1, \dots, i_{h-1}, i_{h+1}, \dots, i_{r+1}}^{(m)} \xrightarrow{m} 0 \quad (\text{in } D_n).$$

Sostituendo nella (12) si ottiene:

$$\bar{b}_{i_1, \dots, i_{r+1}}^{(m)} = \sum_h^{r+1} (-1)^{h-1} \frac{\partial a_{i_1, \dots, i_{h-1}, i_{h+1}, \dots, i_{r+1}}^{(m)}}{\partial x^{i_h}} + \eta_{i_1, \dots, i_{r+1}}^{(m)},$$

con:

$$\eta_{i_1, \dots, i_{r+1}}^{(m)} \xrightarrow{m} 0 \quad (\text{in } D_n).$$

Poiché $\frac{1}{(r+1)!} \sum_h^{r+1} (-1)^{h-1} \frac{\partial a_{i_1, \dots, i_{h-1}, i_{h+1}, \dots, i_{r+1}}^{(m)}}{\partial x^{i_h}}$ è il coefficiente di $[dx^{i_1} \dots dx^{i_{r+1}}]$ in $d\omega_r^{(m)}$, dalle precedenti eguaglianze segue che è:

$$(13) \quad d\omega_r^{(m)} = d\omega_r^{(m)} + \tau_{r+1}^{(m)}$$

ove $\tau_{r+1}^{(m)}$ è una forma di grado $r+1$ tale che:

$$(14) \quad \tau_{r+1}^{(m)} \xrightarrow{m} 0 \quad (\text{in } D_n).$$

Dalle (13), (14) si deduce che, se è:

$$(15) \quad d\omega_r^{(m)} \xrightarrow{m} \sigma_{r+1} \quad (\text{in } D_n),$$

è anche:

$$d\omega_r^{(m)} \xrightarrow{m} \sigma_{r+1} \quad (\text{in } D_n),$$

e viceversa. D'altronde, per il criterio II ricordato nel n. 2, la (2) vale se e soltanto se sussiste la (15), onde la tesi.

Geometria. — *Esame di singolarità superficiali.* — I. *Superficie algebriche d'ordine n con punti $(n-2)$ -pli inflessionali.* Nota di GIUSEPPE VACCARO, presentata (*) dal Socio E. BOMPIANI.

Mi sono già occupato delle ipersuperficie algebriche di ordine n appartenenti ad un S_r proiettivo con un punto $(n-2)$ -plo tale che la generica tangente in esso alla ipersuperficie abbia ivi incontro n -punto con la ipersuperficie data (1).

Nel presente lavoro riprendo tale studio nel caso delle superficie algebriche di S_3 e, dopo aver esaminato le particolarità delle superficie in esame per l'acquisto di un punto s -plo ($s \geq 2$) (Nota I), determino il massimo numero δ di punti $(n-2)$ -pli inflessionali (come dirò brevemente) che può acquistare una superficie di ordine n e ne trovo la configurazione (Nota II). Tale numero per le superficie cubiche (i punti in esame diventano allora punti di flesso o di Eckardt) è stato ottenuto da B. Segre; nel presente lavoro determino tale massimo per ogni valore di n . Per le superficie del 5° ordine $\delta = 6$, per le superficie del 4° e del 6° ordine $\delta = 4$ e per tutti gli altri ordini $\delta = 3$.

Nel caso delle superficie cubiche determino una nuova condizione sufficiente affinché la superficie acquisti infiniti flessi.

A base di tutti i risultati sta la considerazione che se una Φ^n di S_3 possiede un punto O $(n-2)$ -plo a tangenti n -punte, esiste una omologia armonica di centro O che muta la superficie in sé.

1. Dette x, y, z, t le coordinate omogenee di un punto di un S_3 proiettivo, sia $F(x, y, z, t) = 0$ l'equazione di una superficie algebrica (irriducibile) di ordine n , Φ^n , e sia $O(0, 0, 0, 1)$ un suo punto $(n-2)$ -plo tale che la generica tangente in esso alla Φ^n abbia ivi incontro n -punto con la Φ^n (diremo per brevità che O è un punto $(n-2)$ -plo inflessionale per Φ^n).

È noto che nella nostra ipotesi la superficie polare d'ordine $n-1$ del punto O rispetto alla Φ^n si spezza nel cono osculatore alla Φ^n in O ed in un piano, necessariamente non passante per O , detto piano armonico di O rispetto alla Φ^n .

Assumendo come piano improprio dello S_3 il piano armonico di O rispetto alla Φ^n , la $F(x, y, z, t)$ è del tipo:

$$(1.1) \quad t^2 \varphi_{n-2}(x, y, z) + \varphi_n(x, y, z) = 0$$

dove φ_{n-2} e φ_n sono forme in x, y, z di grado uguale all'indice.

(*) Nella seduta del 13 dicembre 1952.

(1) Cfr. G. VACCARO, *Sopra alcune singolarità di ipersuperficie algebriche.* « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », ser. VIII, vol. 50, fasc. 50 (1948).

Chiamiamo d'ora in poi Γ la superficie di equazione (I.I).

È noto, e si verifica immediatamente, che l'omologia armonica T di centro O ed avente per piano asse il piano ω ($t = 0$) muta la Γ in sè.

2. Supponiamo che Γ possieda un punto doppio P distinto da O .

Due casi sono possibili: o la retta OP non appartiene a Γ o vi appartiene.

Nel primo caso il punto P deve necessariamente appartenere al piano ω , altrimenti sulla OP esisterebbe un secondo punto P' (coniugato di P nella T) anch'esso doppio per Γ e pertanto la retta OP avendo $n+2$ intersezioni con Γ vi apparterebbe. Supposto pertanto P su ω , esso può essere conico, biplanare o uniplanare. Se P è biplanare la retta r comune ai due piani tangenti in P deve appartenere ad ω . Infatti poichè la retta r non passa per O , se non appartenesse al piano ω , dovrebbe per la T esistere una altra retta comune ai due piani tangenti in P , ma allora P sarebbe uniplanare.

La retta r deve essere pertanto unita nella T e non potendo passare per O deve appartenere ad ω . Si ha poi che:

Se P è un punto doppio biplanare di Γ , e se la retta OP non appartiene a Γ , (per il che P deve appartenere ad ω), i due piani tangenti in P , il piano ω ed il piano per O e per la retta r comune ai due piani tangenti in P , formano un gruppo armonico.

Analogamente si dimostra che:

Se Γ possiede un punto doppio uniplanare P , la retta OP non appartiene a Γ , il piano tangente (unico) in P è proprio il piano ω ed esso sega quindi la Γ nella C^n luogo dei punti di contatto dei piani tangenti che da O si possono condurre altrove a Γ .

Se invece, essendo P un punto doppio di Γ distinto da O , la retta OP appartiene a Γ , allora se P appartiene ad ω , esso non può essere conico; se P non appartiene ad ω , allora sulla retta OP esiste un altro punto doppio P' (coniugato di P nella T). In ogni caso, come è evidente, sempre a causa della T , il piano tangente nei punti della retta OP risulta fisso.

Del resto la verifica analitica dei risultati su esposti è immediata, e trovasi nella mia citata Nota⁽²⁾, addirittura per una ipersuperficie di S_r .

Supponiamo ora in generale che Γ possieda un punto P s -plo con $s > 2$, distinto da O e dapprima appartenente ad ω . Assuntolo come punto $(0, 0, 1, 0)$, la (I.I) si scrive:

$$(2.1) \quad t^2 [x^{n-s} \theta_{s-2} + x^{n-s-1} \theta_{s-1} + \dots + \theta_{n-2}] + \\ + x^{n-s} \chi_s + x^{n-s-1} \chi_{s+1} + \dots + \chi_n = 0$$

ove le θ_i , e le χ_i sono forme nelle sole x, y di grado i .

Come si vede, la retta OP ($x = y = 0$) risulta luogo di punti $(s-2)$ -pli e il cono tangente in ognuno di essi è fisso e di equazione: $\theta_{s-2}(x, y) = 0$.

(2) Cfr. loc. cit. in (1).

Supponiamo ora che P non stia su ω e assumiamolo come punto di coordinate $0, 0, 1, 1$. Come si vede facilmente la (1.1) si scrive allora:

$$(2.2) \quad t^2 [z^{n-s-1} \theta_{s-1} + \dots + \theta_{n-2}] - z^{n-s-1} \theta_{s-1} + z^{n-s} \chi_s + \dots + \chi_n = 0$$

e risulta, come era chiaro a causa della T , che anche il punto $(0, 0, -1, 1)$ è s -plo per Γ e che la retta OP ($x = y = 0$) è luogo di punti $(s-1)$ -pli per Γ con cono osculatore fisso.

Si ha dunque in generale:

Sia P un punto P s -plo ($s > 2$) di Γ , distinto da O : se P appartiene ad ω la retta OP risulta $(s-2)$ -pla per Γ ; se P non appartiene ad ω sulla OP esiste un altro punto s -plo per Γ (il punto P' coniugato di P nella T) e la retta OP è $(s-1)$ -pla per Γ . In ogni caso il cono osculatore nei punti della OP è fisso.

3. Imponiamo adesso alla superficie Γ di equazione (1.1) un altro punto O' $(n-2)$ -plo inflessionale.

Se $n > 3$ ed il punto O' non è sul piano ω , la retta OO' appartiene certamente a Γ . Infatti l'esistenza della omologia armonica T di centro O che muta la Γ in sè, porta alla esistenza di un terzo punto O'' (coniugato di O' nella T) anch'esso $(n-2)$ -plo inflessionale per Γ ed appartenente alla retta OO' . La retta OO' ha pertanto, con la Γ $3n-6$ intersezioni, e quindi essendo, per $n > 3$, $3n-6 > n$ essa appartiene a Γ .

La retta OO' risulta $(n-3)$ -pla per Γ e le sezioni di Γ con piani passanti per la OO' risultano spezzate nella OO' contata $n-3$ volte ed in una cubica avente tre flessi rispettivamente in O, O', O'' . In questo caso esistono tre omologie armoniche di centri rispettivamente in O, O', O'' che mutano la Γ in sè e tali che ognuna di esse scambia fra loro gli altri due punti $(n-2)$ -pli a tangenti n -punte diversi dal centro.

Supponiamo invece che O' appartenga ad ω e assumiamolo come punto $(0, 0, 1, 0)$. Se si prende come piano $z = 0$ il piano armonico di O' rispetto a Γ , ciò che è evidentemente possibile la (1.1) diviene:

$$(3.1) \quad t^2 [z^2 \theta_{n-4} + \theta_{n-2}] + z^2 \chi_{n-2} + \chi_n = 0$$

con il solito significato per le θ_i e le χ_i .

Dalla (3.1) si ricava che per $n > 4$ la retta OO' (come era evidente a priori) appartiene a Γ , inoltre essendo $Q(0, 0, \frac{z}{2}, 1)$ un generico punto della retta OO' e posto $\zeta_n = z - z_0, t = 1$, la (1.1) diventa:

$$(3.2) \quad z^2 \theta_{n-4} + 2\frac{z}{2} \zeta \theta_{n-2} + \theta_{n-2} + \frac{z^2}{2} \chi_{n-2} + \dots = 0$$

ove i termini non scritti sono almeno di grado $n-1$ nelle x, y, ζ .

Si ottiene pertanto che per $n > 4$ il generico punto Q è $(n-4)$ -plo per Γ , il cono osculatore in esso non dipende da Q ed è tale che la sua generica generatrice ha incontro $(n-2)$ -punto con la Γ .

Si conclude pertanto che:

Se una superficie di Φ^n di S_3 di ordine $n > 4$ possiede due punti O, O' $(n-2)$ -pli inflessionali, ciascuno appartenente al piano armonico dell'altro rispetto a Φ^n , la retta OO' risulta luogo di punti $(n-4)$ -pli inflessionali e, come è noto ⁽³⁾, il cono osculatore in essi risulta fisso.

4. Esaminiamo il caso $n = 4$. In questo caso la (3.2) diviene:

$$(4.1) \quad t^2 [z^2 \theta_0 + \theta_2] z^2 \chi_2 + \chi_4 = 0$$

ove θ_0 è una costante.

In generale quindi la retta OO' ($x = y = 0$) non appartiene a Γ . Se $\theta_0 = 0$, con che la retta OO' appartiene a Γ , dalla (4.1) si ricava immediatamente che tutti i punti della OO' risultano doppi. Si ha quindi:

Se su una retta r appartenente ad una superficie del 4° ordine di S_3 , Φ^4 , vi sono due punti doppi inflessionali ognuno dei quali appartenga al piano armonico dell'altro rispetto a Φ^4 la retta r risulta doppia per Φ^4 .

5. Esaminiamo ora il caso $n = 3$. Allora la (1.1) si scrive:

$$(5.1) \quad t^2 [z \theta_0 + \theta_1] + z^3 \chi_0 + z^2 \chi_1 + z \chi_2 + \chi_3 = 0$$

ove l'origine è un punto semplice a tangente tripunte, o come comunemente si chiama, di flesso o di Eckardt.

Imponiamo che il punto $O' (0, 0, 1, 0)$ appartenente al piano armonico di O rispetto alla (5.1) sia anch'esso di flesso per la (5.1). Il fatto che O' stia sulla (5.1) porta $\chi_0 = 0$, e allora la (5.1) nell'intorno di O' si scrive:

$$(5.2) \quad \chi_1 + \chi_2 + \theta_0 t^2 + [3] = 0.$$

Affinchè l'origine sia punto di flesso per la (5.2), deve essere $\theta_0 = 0$. Ma se ciò avviene la retta OO' ($x = y = 0$) appartiene alla (5.1).

Se O' non appartiene ad ω , con facili calcoli si vede, come del resto è evidente a causa della omologia armonica T di centro O che muta la (5.1) in sè, che sulla OO' esiste un terzo punto di flesso (il coniugato di O' nella T).

Si ha pertanto:

Una superficie del terzo ordine Φ^3 di S_3 può possedere due soli punti di flesso solo e solo se ciascuno appartiene al piano armonico dell'altro rispetto a Φ^3 , ed in questo caso la retta che li congiunge appartiene a Φ^3 , in caso contrario se ad una Φ^3 si impongono due flessi, essa ne contiene necessariamente tre allineati.

(3) Cfr. G. VACCARO, *Sugli spazi lineari luogo di flessi di una ipersuperficie algebrica*. « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », ser. VII, vol. VII, fasc. 1-4 (1949).

Questi risultati trovansi già enunciati in forma equivalente tra gli innumerevoli altri, nell'esauriente volume di B. Segre: *The non singular cubic surfaces* ⁽⁴⁾.

Il Segre studiando le omologie armoniche che mutano in sè una Φ^3 (priva di singolarità) ciascuna delle quali ha il centro in un punto di Eckardt della Φ^3 , determina tra l'altro tutti i tipi di superficie cubiche con punti di Eckardt. Trova così che una Φ^3 di S_3 può possedere 1, 2, 3, 4, 6, 9, 10, 18 punti di Eckardt e ne determina la esatta configurazione.

Supponiamo qui che una Φ^3 possieda oltre ad O un altro punto di flesso P non giacente sul piano armonico di O rispetto a Φ^3 , e supponiamo inoltre che la retta OP appartenga a Φ^3 .

La Φ^3 abbia per semplicità come piano tangente in O (0, 0, 0, 1) il piano $y = 0$ e contenga l'asse z di modo che la sua equazione sia del tipo:

$$(5.3) \quad \theta_0 t^2 y + z^2 \chi_1 + z \chi_2 + \chi_3 = 0.$$

Sia P (0, 0, 1, 1) un altro punto di flesso per la (5.3). La (5.3) nell'intorno di P posto al solito $\zeta = z - 1$, $t = 1$, si scrive:

$$(5.4) \quad \theta_0 y + \chi_1 + 2\zeta \chi_1 + \chi_2 + [3] = 0.$$

Il punto P è flesso per la (5.4) se $2\zeta \chi_1 + \chi_2$ risulta divisibile per $\theta_0 y + \chi_1$. Con facili calcoli si trova che ciò è possibile se e solo se in χ_1 manca il termine in x ed in χ_2 manca il termine in x^2 . Ma in questo caso il piano tangente in un generico punto dell'asse z è fisso, esso è dato da $y = 0$, e si verifica subito che l'asse z risulta luogo di punti di flesso per la Φ^3 . Come è noto ⁽⁵⁾ la Φ^3 in questo caso acquista due punti doppi biplanari sulla retta dei flessi.

Allo stesso risultato si perviene osservando che se P non giace nel piano armonico di O rispetto a Φ^3 , sulla OP, per ipotesi appartenente alla Φ^3 , esiste un altro punto di flesso P' (coniugato di P nella omologia armonica T di centro O che muta la Φ^3 in sè). I piani tangenti in O, P, P' coincidono giacchè contenendo la retta OP risultano uniti nelle tre omologie armoniche di centri rispettivi O, P, P'. La sezione della Φ^3 con tale piano è data pertanto dalla retta OP contata tre volte, e ciò vuol dire che la OP è luogo di punti di flesso per Φ^3 .

Si ha quindi:

Se su una retta di Φ^3 di S_3 esistono due punti di flesso per Φ^3 , tali che uno non appartenga al piano armonico dell'altro rispetto a Φ^3 , tutta la retta risulta luogo di punti di flesso per Φ^3 . In questo caso la Φ^3 acquista due punti doppi biplanari.

(4) Oxford, At the Clarendon Press, p. 145 e sgg. (1942).

(5) Cfr. loc. cit. in (2).

Si trova così la superficie cubica Φ^3 di S_3 con infiniti flessi nella sola ipotesi che essa contenga due punti di flesso su una retta, e tali che ognuno di essi non appartenga al piano armonico dell'altro rispetto a Φ^3 .

La superficie cubica Φ^3 con infiniti punti di flesso è stata già trovata dal Ciani ⁽⁶⁾ partendo dalla condizione che la Φ^3 possieda due punti doppi biplanari, ed è stata ritrovata poi dal Bompiani ⁽⁷⁾ sotto la ipotesi che la Φ contenga due punti di flesso *infinitamente vicini*.

Per una superficie cubica con infiniti flessi, esistono evidentemente infinite omologie armoniche che la trasformano in sè e che generano un gruppo continuo di collineazioni rispetto al quale la superficie è invariante.

Meccanica dei fluidi. — *La velocità massima nel moto di Gromeka-Beltrami* ^(*). Nota di CLIFORDO TRUESDELL, presentata ^(**) dal Socio M. PICONE.

Bouligand ⁽¹⁾ ha dimostrato che la pressione, nel moto di un fluido incompressibile, non viscoso e soggetto all'azione della gravità, non può raggiungere un massimo nell'interno di una regione irrotazionale provando che essa è una funzione superarmonica. La validità di questo risultato è stata estesa da Hamel ⁽²⁾ al caso di un fluido a viscosità costante. Nel caso di un moto stazionario, irrotazionale e non soggetto a forze esterne, l'equazione di Bernoulli $p/\rho + \frac{1}{2}v^2 = \text{cost.}$ permette di enunciare il teorema di Bouligand come proposizione riguardante la massima velocità. La presente Nota estende quest'ultima forma del teorema che è di carattere puramente cinematico e valida per ogni mezzo continuo al caso del moto di Gromeka-Beltrami in cui le linee vorticosi coincidono con quelle della corrente.

Siano v_i le componenti del vettore della velocità \vec{v} , e si ponga

$$\theta \equiv \text{div } \vec{v},$$

$$\dot{\theta} \equiv \frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{v} \times \text{grad } \theta,$$

$$\vec{w} \equiv \text{rot } \vec{v},$$

$$d_{ij} \equiv \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}).$$

(6) Cfr. E. CIANI, *Sopra le superficie cubiche dotate di infiniti punti di Eckardt*. « Periodico di Matematiche », ser. IV, vol. XX, pp. 240-245 (1940).

(7) Cfr. E. BOMPIANI, *Sulle superficie con flessi infinitamente vicini*. « Rend. Acc. d'Italia », ser. VII, vol. II, fasc. 7 (1940).

(*) Lavoro eseguito in base al contratto della Indiana University con la U.S. Navy (contract n 6-onr 180, Task order V).

(**) Nella seduta dell'8 novembre 1952.

(1) « Verh. Int. Congr. Tech. Mech. », pp. 400-461 (1926).

(2) « Monatshefte Math. Phys. », 43, 345-363 (1936).

θ è la velocità di dilatazione e \vec{w} la vorticità. Si definisce come numero di vorticità W la quantità

$$W = \frac{w}{\sqrt{2} \, d^2 d_{ij}}.$$

Si può dedurre la seguente identità

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{2} w^2 \left(\frac{1}{W^2} - 1 \right) + \dot{\theta},$$

dove \vec{a} è il vettore accelerazione.

Nel caso del moto di Gromeka-Beltrami, essendo $\vec{w} \wedge \vec{v} = 0$ si ha

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} \frac{1}{2} v^2, \\ \operatorname{div} \vec{a} &= \frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla^2 \left(\frac{1}{2} v^2 \right). \end{aligned}$$

Quindi

$$\nabla^2 v^2 = w^2 \left(\frac{1}{W^2} - 1 \right) + 2 \left(\dot{\theta} - \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) = w^2 \left(\frac{1}{W^2} - 1 \right) + 2 \vec{v} \times \operatorname{grad} \theta.$$

Con l'aiuto di un noto teorema sulle funzioni sottoarmoniche si ottiene da questa identità il seguente

TEOREMA SUGLI ESTREMI DELLA VELOCITÀ. — Se nel moto di Gromeka-Beltrami in un mezzo continuo il numero di vorticità non è maggiore (è eguale) (non è minore) di 1, e se la velocità di dilatazione non decresce (non cambia) (non cresce) nella direzione del moto lungo le linee di corrente, allora la velocità non può raggiungere un massimo (massimo o minimo) (minimo) in un punto interno.

Il teorema di Bouligand si estende quindi al moto di Gromeka-Beltrami se $W \leq 1$ e $\vec{v} \times \operatorname{grad} \theta \geq 0$.

Corollario. — Se in un moto irrotazionale la velocità di dilatazione non decresce in direzione del moto lungo le linee di corrente, allora la velocità non può raggiungere un massimo nell'interno.

Nel caso di un moto senza dilatazione ($\theta = 0$), le condizioni del teorema e del corollario si esprimono solo mediante il numero di vorticità.

In un lavoro in preparazione svilupperò altre notevoli proprietà di W ⁽³⁾.

(3) Per esempio un teorema di Hamel (loc. cit.) si può esprimere in maniera molto elegante mediante il numero di vorticità: Dato un moto di un fluido omogeneo, viscoso e incompressibile, soggetto a forze esterne derivanti da un potenziale armonico; in una regione dove si abbia $W \geq 1$ ($W = 1$) ($W < 1$) la pressione non può raggiungere un massimo (massimo o minimo) (minimo).

Astrofisica. — *Relazione tra l'umidità atmosferica assoluta ed il coefficiente di trasmissione della radiazione solare, secondo le misure eseguite all'Osservatorio di Roma dal 1935 al 1950.* Nota di MARIA ANTONIETTA GIANNUZZI, presentata (*) dal Socio G. ARMELLINI.

1. In una Nota precedente ⁽¹⁾, servendomi delle misure piroeliometriche che si eseguono all'Osservatorio di Roma ogni giorno sereno a mezzodì, ho determinato l'andamento annuo del coefficiente di trasmissione atmosferico. Mi propongo ora, in questa Nota, di esaminare la relazione tra l'andamento così trovato e le variazioni dell'umidità atmosferica, proseguendo le ricerche eseguite dal prof. M. Cimino ⁽²⁾ per il quinquennio 1930-35.

Poiché le misure della radiazione solare a Monte Mario si eseguono a mezzodì e le misure dell'umidità assoluta alle ore 9-15-21 di ciascun giorno, ho preso come valore dell'umidità assoluta a mezzodì, la media dei valori delle ore 9 e delle ore 15; approssimazione più che sufficiente per la ricerca di una correlazione dal punto di vista statistico. I dati si riferiscono alle osservazioni eseguite a Monte Mario, eccezione fatta dell'umidità atmosferica per il biennio 1935-37 che proviene dalle misure dell'antico Osservatorio del Campidoglio; rigorosamente parlando, l'umidità per Monte Mario è minore essendo il luogo più alto ed areato, ma la differenza non è certamente rilevante.

Ciò premesso, dai registri delle osservazioni a mia disposizione, ho ricavato anzitutto le medie per decenni, e le medie mensili, dell'umidità assoluta a mezzodì; e riporto i risultati nella tabella I esprimendoli sempre in millimetri.

Ciascuna media è seguita da una cifra, indicante il numero di osservazioni su cui poggia, e le medie mensili sono in *grassetto*.

Nella tabella II sono riportate le medie per decenni dell'umidità assoluta, sempre in millimetri, relative ai due gruppi di anni 1935-44, 1945-50; così suddivise per agevolare il confronto con i corrispondenti valori del coefficiente di trasmissione atmosferico, di cui alla Nota precedente. Seguono le medie mensili in *grassetto*.

2. Dal confronto dei valori dell'umidità assoluta di queste tabelle, con i valori del coefficiente di trasmissione dati dalla tabella I della mia Nota precedente, risulta evidente, ancora una volta, la corrispondenza inversa tra radiazione solare e umidità assoluta al suolo.

Nei due grafici seguenti sono riportati — ponendo in ascissa i tempi, in ordinata le umidità assolute in millimetri — le variazioni per decenni (a

(*) Nella seduta dell'8 novembre 1952.

(1) Cfr. M. A. GIANNUZZI, *Ricerca sopra l'assorbimento atmosferico della radiazione solare a Roma.* « Rend. Accad. Naz. Lincei », vol. XI, 2° sem., pp. 193-198 (1951).

(2) Cfr. M. CIMINO, *Ricerche sopra l'assorbimento atmosferico della radiazione solare a Roma.* « Rend. Accad. Naz. Lincei », vol. II, 1° sem., pp. 599-604 (1947).

tratto fino) e mensili (a tratto più pieno) dell'umidità assoluta a Roma. Il primo grafico si riferisce agli anni 1935-44; il secondo agli anni 1945-50. Le curve tratteggiate danno, per comodità di confronto, le corrispondenti variazioni mensili del coefficiente di trasmissione (già date nelle fig. 1 e 2 della Nota 1).

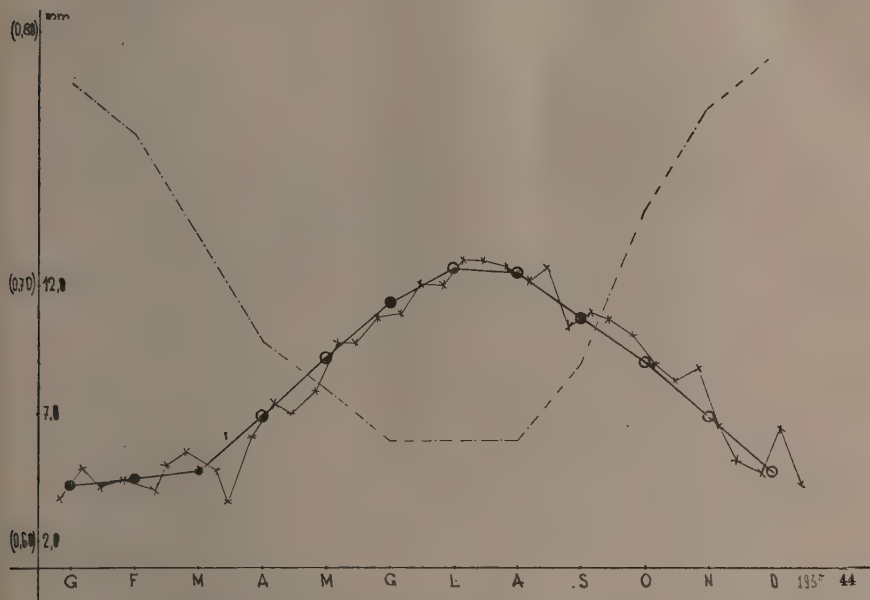


Fig. 1. - Valori mensili dell'umidità assoluta in mm. (curva piena) e del coefficiente di trasmissione (curva tratteggiata) nel periodo 1935-1944.

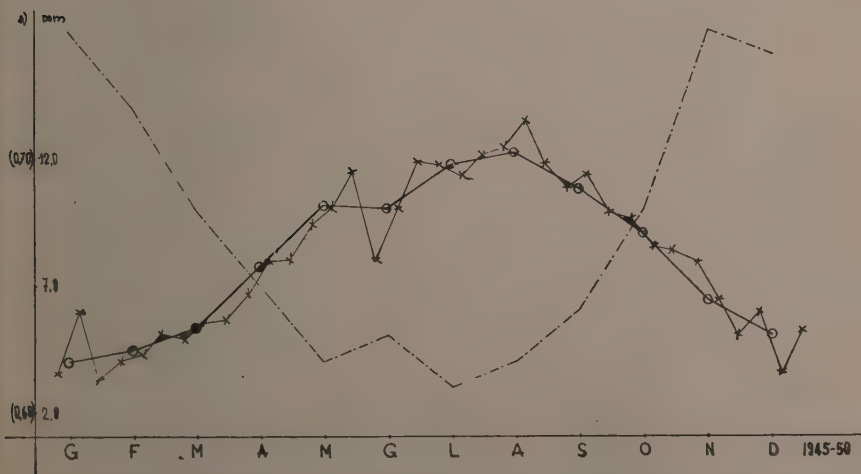


Fig. 2. - Valori mensili dell'umidità assoluta in mm. (curva piena) e del coefficiente di trasmissione (curva tratteggiata) nel periodo 1945-1950.

Umidità assoluta a Roma (Monte Mario) alle

		1935	1936	1937	1938	1939	1940	1941	
Gennaio	I	—	—	2,04*	1	—	5,10	1	—
	II	—	—	—	—	—	7,03	2	—
	III	—	—	5,06*	2	3,79	1	—	6,34
Gennaio		—	—	4,05*	3	3,79	1	6,3	4,61
Febbraio	I	—	4,27	1	—	4,61	5	4,34	5
	II	—	—	—	—	4,17	2	4,56	1
	III	—	—	—	—	3,79	4	6,27	2
Febbraio		—	4,27	1	—	4,23	11	4,85	8
Marzo	I	—	—	—	—	6,82	3	3,56	3
	II	—	—	—	—	4,86	4	2,27	2
	III	—	—	—	—	—	—	2,84	1
Marzo		—	—	—	—	5,70	7	3,01	6
Aprile	I	—	—	—	—	5,53	2	7,34	1
	II	6,56*	1	—	—	3,36	1	8,68	5
	III	9,04*	1	—	—	—	—	—	—
Aprile		7,80*	2	—	—	6,69*	3	8,46	6
Maggio	I	4,99*	1	—	—	—	—	—	—
	II	—	—	—	—	—	—	—	—
	III	—	—	—	—	9,71	1	—	—
Maggio		4,99*	1	—	—	7,25*	1	8,25	1
Giugno	I	8,52*	1	—	—	10,99	8	11,18	1
	II	10,64*	5	11,53	1	11,21*	2	11,36	2
	III	11,43*	4	—	—	11,67*	1	12,59	6
Giugno		10,74*	10	11,53	1	11,36*	3	11,64	16
Luglio	I	13,90*	2	16,66	1	11,82*	3	11,24	2
	II	12,51*	3	17,21	3	12,76*	2	9,77	1
	III	14,07*	1	19,11	1	15,83*	3	12,00	4
Luglio		13,41*	6	17,48	5	13,56*	8	11,46	7
Agosto	I	12,25*	1	—	—	15,89	2	—	—
	II	—	—	—	—	11,43	1	13,48	1
	III	10,26*	1	14,89	1	9,20	1	—	—
Agosto		11,25*	2	14,89	1	—	—	10,30	1
Settembre	I	—	—	—	13,80	2	10,54	1	—
	II	8,54*	2	—	—	—	—	—	—
	III	8,74*	4	—	—	—	—	—	—
Settembre		8,67*	6	—	—	13,80	2	10,54	1
Ottobre	I	—	8,25	3	—	—	—	—	—
	II	12,70*	1	—	9,02	1	12,21	2	11,00
	III	—	—	5,36	1	9,42	1	5,56	2
Ottobre		12,70*	1	7,53	4	9,22	2	8,88	4
Novembre	I	—	—	—	—	8,21	2	8,82	2
	II	7,43*	2	—	—	5,52	1	8,36	2
	III	4,90*	1	5,95	4	2,97	1	—	—
Novembre		6,59*	3	5,95	4	2,97	1	7,31	3
Dicembre	I	—	—	5,83	1	—	—	—	—
	II	—	—	—	—	4,31	3	—	—
	III	—	—	5,26	2	—	—	—	—
Dicembre		—	—	5,45	3	—	—	3,55	3

Le cifre contrassegnate con l'asterisco, si riferiscono ai dati del Campidoglio.

per decadi e mensili in millimetri.

	1944	1945	1946	1947	1948	1949	1950						
1	3,74	3	—	3,68	3	3,03	2	—	—	—	3,98	2	
3	4,96	4	—	—	—	5,16	1	8,69	1	5,01	2	—	
3	4,53	6	3,11	—	—	4,22	3	—	—	2,65	4	—	
7	4,48	13	3,11	1	3,68	3	3,98	6	8,69	1	3,44	6	3,98
2	3,66	1	5,30	2	—	—	—	5,77	2	2,79	5	—	
3	2,97	3	4,51	3	4,54	3	6,25	2	3,07	3	2,96	3	6,39
2	6,63	1	4,92	5	2,80	1	—	—	—	—	6,19	3	—
7	3,84	5	4,87	10	4,10	4	6,25	2	4,15	5	3,76	11	6,39
3	4,68	2	4,03	1	5,68	1	—	—	5,71	6	2,23	3	7,52
2	4,03	2	6,56	3	4,32	1	—	—	3,40	1	—	—	—
—	3,38	2	6,49	3	4,38	1	6,52	1	6,06	6	4,55	1	4,51
5	4,03	6	6,17	7	4,79	3	6,52	1	5,69	13	2,81	4	5,11
3	5,76	1	7,56	2	—	—	—	—	5,64	1	6,42	1	6,38
—	9,12	1	7,45	2	8,65	2	8,11	2	7,46	2	8,05	7	—
—	6,39	2	—	—	6,91	2	10,06	3	3,14	1	8,78	3	7,30
3	6,92	4	7,50	4	7,78	4	9,28	5	5,92	4	8,10	11	6,61
—	9,04	2	11,66	2	10,74	1	11,29	1	—	—	8,50	1	6,08
3	9,60	1	10,33	6	8,56	1	—	—	—	—	—	—	—
1	9,13	4	10,35	1	—	—	12,50	1	—	—	11,47	2	—
4	9,17	7	10,63	9	9,65	2	11,89	2	—	—	10,48	3	6,08
—	9,62	3	7,76	6	—	—	—	—	8,93	1	—	—	—
—	10,92	2	11,65	5	—	—	—	—	—	—	7,27	3	—
1	11,80	4	12,69	4	—	—	—	—	—	—	—	—	11,18
1	10,88	9	10,37	15	—	—	—	—	8,93	1	7,27	3	11,18
—	11,61	4	11,31	5	17,10	1	14,85	3	—	—	9,03	1	9,28
2	11,00	4	11,61	7	10,66	3	10,97	6	11,35	2	11,72	4	—
4	—	—	11,58	8	11,87	6	12,62	3	9,51	4	—	—	16,04
7	11,30	8	11,52	20	12,03	10	12,35	12	10,12	6	11,18	5	12,66
—	14,73	2	10,53	3	13,31	4	14,55	6	11,07	1	12,55	2	8,97
3	13,55	4	12,18	1	13,16	3	—	—	—	—	15,60	1	—
—	13,61	7	9,57	6	11,50	2	—	—	13,16	3	13,74	2	12,76
9	13,76	13	10,12	10	12,86	9	14,55	6	12,64	4	13,64	5	11,81
—	11,32	3	10,09	6	11,94	1	11,39	2	9,39	2	11,22	8	—
3	10,97	2	9,89	6	—	—	11,97	9	—	—	—	—	12,86
2	7,85	1	8,09	3	9,55	4	—	—	—	—	13,92	2	7,98
5	10,62	6	9,61	15	10,93	5	11,86	11	9,39	2	11,76	10	11,23
3	7,02	1	6,06	5	11,69	1	10,78	3	12,17	1	—	—	11,00
1	—	—	8,23	6	7,74	3	7,93	5	10,28	2	8,79	2	10,40
2	—	—	—	—	8,82	1	—	—	—	—	—	—	8,15
6	7,02	1	7,24	11	8,75	5	9,00	8	10,91	3	8,79	2	10,31
1	14,16	1	8,20	2	6,98	1	8,05	4	9,85	1	6,02	1	—
2	—	—	5,62	2	6,67	2	—	—	6,84	4	—	—	—
—	—	—	5,17	3	—	—	6,02	2	4,65	6	—	—	—
3	14,16	1	6,16	7	6,77	3	7,37	6	5,92	11	6,02	1	—
1	6,16	1	—	—	6,72	1	6,90	1	5,18	5	7,17	2	—
—	6,06	2	3,69	1	5,32	1	2,82	3	—	—	—	—	—
3	4,00	2	6,43	3	4,29	4	5,59	1	4,31	1	—	—	—
4	5,26	5	5,74	4	4,87	6	4,19	5	5,03	6	7,17	2	—

TABELLA II.

		1935-44		1945-50				1935-44		1945-50	
Gennaio	I	3,62	6	3,58	7	Luglio	I	11,97	23	11,74	14
	II	4,82	12	5,97	4		II	12,99	26	11,30	22
	III	4,16	18	3,27	8		III	13,04	29	12,16	25
Gennaio		4,29	36	3,96	19	Luglio		12,71	78	11,75	61
Febbraio	I	4,49	17	4,01	9	Agosto	I	12,79	16	12,57	18
	II	4,02	12	4,28	15		II	12,21	17	13,45	5
	III	4,40	12	5,11	9		III	12,56	18	11,79	19
Febbraio		4,33	41	4,43	33	Agosto		12,51	51	12,32	42
Marzo	I	5,66	12	4,85	12	Settembre	I	10,47	14	10,73	19
	II	4,70	13	5,48	5		II	11,08	12	11,34	17
	III	3,62	5	5,59	16		III	10,75	12	9,83	10
Marzo		4,90	30	5,30	33	Settembre		10,75	38	10,76	46
Aprile	I	5,92	8	6,62	7	Ottobre	I	10,16	10	9,53	16
	II	7,41	11	7,98	15		II	9,00	12	8,56	20
	III	7,05	6	8,08	10		III	8,27	13	8,37	3
Aprile		6,85	25	7,71	32	Ottobre		9,06	35	8,94	39
Maggio	I	7,86	6	9,43	7	Novembre	I	8,59	10	7,94	9
	II	9,80	7	10,08	7		II	6,67	10	6,49	8
	III	9,33	10	11,45	4		III	5,27	10	5,04	11
Maggio		9,35	23	10,13	18	Novembre		6,84	30	6,39	28
Giugno.	I	10,70	15	7,93	7	Dicembre	I	4,76	10	5,98	9
	II	10,93	15	10,01	8		II	6,48	4	3,49	5
	III	12,07	24	11,93	8		III	4,11	15	5,15	
Giugno		11,37	54	10,04	23	Dicembre		4,66	29	5,11	23

Se si mettono poi in relazione i valori dell'umidità assoluta ed i corrispondenti valori del logaritmo decimale del coefficiente di trasmissione, si vede subito che sia nel primo gruppo di anni 1935-44, sia nel secondo 1945-50, sussiste il fenomeno di una trasmissione autunnale - *a parità di umidità al suolo* - maggiore di quella primaverile, fenomeno questo, messo già in luce

dal prof. M. Cimino per le osservazioni Capitoline. Esso appare dunque confermato dalle osservazioni di Monte Mario.

Circa i motivi che farebbero credere alla presenza primaverile di cause perturbatrici (goccioline, ghiaccioli, ecc.), richiamiamo qui l'impostazione teorica fatta dal prof. Cimino nella citata Nota.

Supponiamo che tra l'umidità assoluta al suolo che chiamiamo u_0 ed il logaritmo decimale di a esista una relazione lineare del tipo:

$$(2) \quad \text{Log } a = \alpha + \beta u_0$$

col secondo coefficiente β *indipendente dalla stagione*. Il prof. Cimino ha dimostrato che l'esistenza di tale relazione indicherebbe che l'umidità assoluta $u(h)$ misurata ad una certa altezza dal suolo, sarebbe proporzionale all'umidità assoluta u_0 al suolo con il coefficiente di proporzionalità $\lambda(h)$ non dipendente dal tempo e cioè invariabile nel corso dell'anno. Ponendo infatti:

$$(3) \quad u(h) = \lambda(h) u_0$$

si trova che uno strato di aria di spessore dh posto all'altezza h e sul quale incida un raggio di intensità i assorbirebbe una intensità data dalla formula:

$$(4) \quad di = -Cu(h) = -Cu_0\lambda(h)$$

e quindi, indicando con i l'intensità della radiazione al suolo e con i_0 quella misurata all'esterno dell'atmosfera, sarebbe: $i = i_0 e^{\alpha + \beta u_0}$, α e β essendo costanti. Dal confronto con la relazione I (Nota I) (ove si ponga per semplicità $z = 0$), risulterà tra il logaritmo decimale di a e l'umidità assoluta al suolo una relazione lineare del tipo (2). Se il coefficiente $\lambda(h)$ dipendesse anche dal tempo, cioè dalla stagione, od in altre parole variasse nel corso dell'anno, ne dipenderebbe anche β contro l'ipotesi fatta.

Nel caso nostro, non essendo possibile approssimare la correlazione trovata tra $\text{Log } a$ ed u_0 con una retta (né con altra funzione univoca, quali archi di parabola, ecc.), si può tentare di farlo con più rette, per esempio due, una approssimante le posizioni primaverili, un'altra quelle autunnali.

Si possono avere due casi: 1° Le due rette sono convergenti; allora β e quindi $\lambda(h)$ è variabile dalla primavera all'autunno, cioè λ è funzione anche del tempo. 2° Le due rette hanno andamento sensibilmente parallelo; in questo caso, β non dipende dal tempo e quindi neppure λ . L'anomalia non può perciò essere attribuita a variazioni stagionali di questo parametro, ma ad altre cause perturbatrici dovute all'azione particolare di qualche strato atmosferico, vale a dire a formazioni di ghiaccioli, goccioline, ecc.

Osserviamo che il secondo caso si è verificato, come ha mostrato il prof. Cimino, per le osservazioni Capitoline dal 1929 al 1935 e sembra — sebbene con minore evidenza — verificarsi anche per le osservazioni di Monte Mario.

Storia dell'Astronomia. — *Un'erronea spiegazione del ventennale ritardo con cui Newton enunciò la legge di gravitazione universale.*
Nota di RAFFAELE GIACOMELLI, presentata (*) dal Socio G. ARMELLINI.

1. Perché Newton, che già nel 1666 aveva scoperto la legge di gravitazione, ritardò poi vent'anni ad enunciarla, nei suoi *Principia*, nel 1686?

La spiegazione di questo ritardo, tuttora accolta in molti Paesi — salvo dal 1927 in quelli di lingua inglese — risale in origine ad Henry Pemberton: il curatore della terza edizione dei *Principia*, 1726, ed autore d'un volume di divulgazione della fisica newtoniana, uscito nel 1728, l'anno dopo la morte di Newton (1).

Pemberton, infatti, nella prefazione al volume racconta che Newton, essendosi ritirato da Cambridge, dove l'Università era stata chiusa a causa della peste negli anni 1665-66, sedendo un giorno da solo in giardino, cadde in meditazione sulla forza di gravità (« he fell into a speculation on the power of gravity »). E poiché questa forza si estende a distanze abbastanza forti dal centro della Terra, gli sembrò ragionevole pensare che potesse estendersi molto più in là di quanto generalmente si ritiene; e, perché no, fino alla Luna? (« why not as high as the moon, said to himself? »). Ma, se così fosse, il moto della Luna dovrebbe esserne influenzato e forse la Luna stessa dovrebbe esserne trattenuta nella sua orbita. Ma allora anche i pianeti potrebbero essere trattenuti nelle loro orbite da una forza analoga, proveniente dal Sole.

E avendo, frattanto, ricavato dalla terza legge di Kepler, sulla proporzionalità fra i quadrati dei tempi delle rivoluzioni dei pianeti intorno al Sole ed i cubi dei grandi assi delle loro orbite, che la forza che trattiene in queste i pianeti è in ragione inversa dei quadrati delle loro distanze dal Sole, volle confrontare, in base a questo risultato, la forza che fa cadere un corpo alla superficie della Terra, cioè alla distanza di un raggio terrestre, con la forza che verso il centro della Terra fa « cadere » la Luna, la quale dista da questo 60 raggi terrestri.

Pemberton prosegue il suo racconto dicendo che Newton eseguì subito i relativi calcoli, confrontando il valore così calcolato della accelerazione della gravità alla superficie terrestre con il valore sperimentalmente noto: ma i due valori non concordarono. Insomma, il suo calcolo non corrispose all'aspettativa: « his calculation did not answer expectation ». Per spiegare il disaccordo Newton sarebbe stato allora costretto a supporre che nella caduta dei corpi dovesse intervenire qualche altra forza oltre la gravità. In ogni modo, contrariato, sospese le sue ricerche sulla gravità per dedicarsi tutto a ricerche di algebra e di ottica.

(*) Nella seduta del 13 dicembre 1952.

(1) *A View of Sir Isaac Newton's Philosophy*, by HENRY PEMBERTON, London 1728.

Venti anni dopo, secondo Pemberton, Newton avrebbe ripreso le primitive ricerche sulla gravità, e rifacendo nel 1686 gli stessi calcoli del 1666, avrebbe trovato perfetto accordo fra dato sperimentale e calcolato: risultato che gli permise di formulare nei *Principia* la legge di gravitazione universale. Pemberton dà la spiegazione anche di questo diverso risultato degli stessi calcoli a distanza di vent'anni. Le cose sarebbero andate così: quando il giovane Newton eseguì i suoi calcoli nel 1666, trovandosi in campagna, lontano dai suoi libri (« being absent from books ») prese involontariamente un valore inesatto del grado di latitudine: 60 miglia inglesi invece di 69 e mezza. Ora, invece, avendo preso un più esatto valore del raggio terrestre, quale era stato ultimamente calcolato dal francese Picart, potè realmente verificare col calcolo che la Luna è mantenuta nella sua orbita puramente dalla forza di gravità e che questa, conseguentemente, decresce al recedere dal centro della Terra, nel modo che egli aveva dapprima supposto ⁽²⁾.

2. Questa spiegazione è stata seguita per un secolo, e mezzo da tutti gli storici di Newton; tanto che non è raro trovare nei loro scritti patetici accenni al suo fatale involontario errore, che ritardò di venti anni al mondo la conoscenza della legge della gravitazione.

Ora il primo dubbio sulla veridicità del racconto di Pemberton venne nel 1887 all'astronomo inglese J. C. Adams, che aveva rinvenuto fra i manoscritti di Newton della Collezione Portsmouth un suo memorandum scritto intorno al 1714, nel quale erano rapidamente riepilogate le sue ricerche giovanili di matematica, di ottica e di gravità. A proposito di quest'ultima, Newton racconta di aver in quei primi tempi dedotto dalla terza legge di Kepler la legge di gravitazione e da qui, confrontando la forza occorrente a mantenere la Luna nella sua orbita con la forza di gravità alla superficie della Terra, aveva trovato che *le due si corrispondevano con buona approssimazione: and found them answer pretty nearly*. Dopo di che, chiudeva il suo riepilogo dicendo che tutto ciò avveniva negli anni della peste 1665 e 1666: tempi in cui egli era nel fiore degli anni per la potenza inventiva e si occupava di matematica e fisica più di quanto abbia poi fatto in seguito: *all this was in the two plague years of 1665 and 1666 for in those days I was in the prime of my age for invention and minded Mathematics and Philosophy more than any times since* ⁽³⁾.

Come potevano ora accordarsi due dichiarazioni tanto discordanti quanto quella di Pemberton che i calcoli di Newton non avevano corrisposto all'aspettativa e quella di Newton che il dato sperimentale e quello calcolato si erano corrisposti con buona approssimazione?

(2) « Picart in France having lately measured the earth, by using his measures the moon appeared to be kept in her orbit purely by the power of gravity; and consequently, that this power decreases as you recede from the center of the earth in the manner our author had formerly conjectured ». Prefazione opera citata.

(3) Questa parte del memorandum si trova riprodotta nell'*Essay on Newton's Principia* di W. ROUSE BALL, London 1893, p. 7.

Il 1887 era l'anno commemorativo del 2° Centenario della pubblicazione dei *Principia* (1687) e l'anno successivo il matematico J. W. Glaisher pubblicava una Nota sul memorandum scoperto dal suo collega Adams, intitolata appunto *Bicentenary of Newton's Principia*, nella quale, d'accordo con lui, rigettava il racconto di Pemberton, dimostrando, invece, che il ritardo di Newton nel rendere pubblica la legge di gravitazione era dipeso dalle gravissime difficoltà d'ordine matematico, che aveva dovuto superare, riuscendovi solo nel 1686, per dare alla legge di gravitazione un valore veramente universale.

La Nota del Glaisher era uscita in un periodico di scarsa diffusione, il *Cambridge Chronicle*, del 20 aprile 1888, e rimase quindi parecchi anni ignota, per quanto Rouse Ball ne avesse pubblicato un importante passo a p. 61 del suo *Essay*. E non fu che nel 1927, in occasione del secondo centenario della morte di Newton (da parte d'uno scrittore belga, B. Lefebvre, tre anni prima) che le idee di Glaisher e di Adams furono riesumate da vari scrittori: da R. T. Glazebrook nel *Dictionary of National Bibliography*; da H. H. Turner, astronomo ad Oxford, sul *Times* del 19 marzo 1927; dal tedesco H. Wieleitner negli *Unterrichtblätter für Math. u. Natur*, vol. 33; finalmente dallo storico della matematica all'Università della California, Florian Cajori, con un documentatissimo lavoro, pubblicato appunto col titolo *Newton's Twenty Years' Delay in Announcing the Law of Gravitation*, comparso nel volume commemorativo del 2° Centenario della morte di Newton ⁽⁴⁾.

Nello studio dei Cajori il racconto di Pemberton viene sottoposto ad esauriente analisi, rendendo ragione degli equivoci in cui questi era caduto, delle confusioni fatte e delle inesattezze affermate. Fra queste, in particolare quella che durante il periodo 1665-1666, trovandosi Newton nel suo paese, lontano dai libri, avesse per ciò preso un valore inesatto del raggio terrestre; mentre al contrario il Cajori stesso è riuscito a dare una lista di opere che Newton aveva acquistato in quel periodo, le quali escludono che egli potesse esser caduto in una inesattezza così grave per mancanza di libri adatti.

Lo studio del Cajori si chiude con un'ampia citazione dell'articolo sul *Times* di Turner, le cui acute parole non sono altro in fondo che una traduzione in semplice e chiaro linguaggio moderno d'un passo dei *Principia* di Newton sullo stesso argomento: passo che era passato per lungo tempo ignorato e incompreso, come tanti altri dei *Principia*. Nei quali la profondità del pensiero non è spesso accompagnata da sufficiente chiarezza dell'esposizione: non adeguandosi sufficientemente il genio del sommo autore alla intelligenza del lettore.

Quando Newton (scrive l'astronomo Turner nel suo articolo) vide nell'autunno del 1666 cadere una mela dall'albero del suo giardino, gli occorre subito alla mente l'idea generale d'una attrazione universale in ragione

(4) Il volume, intitolato *Sir Isaac Newton, 1727-1927. A Bicentenary Evaluation of His Work*, London 1928, contiene tutte le Memorie presentate al Convegno, tenuto nei giorni 25-26 novembre 1927 all'*American Museum of Natural History*.

inversa del quadrato della distanza, ma nello stesso tempo vide nell'applicazione dell'idea gravi difficoltà, delle quali non si rendevano conto menti meno profonde della sua. La più grave di queste difficoltà era quella di abbracciare insieme il caso dell'attrazione della Terra su un corpo da essa tanto lontano come la Luna, con il caso dell'attrazione della Terra su una mela alla sua superficie. Nel primo caso le varie particelle componenti la Terra (alle quali individualmente Newton voleva estendere la sua legge per renderla veramente universale) si trovano a distanze dalla Luna non molto diverse fra loro, sia per grandezza che per direzione; mentre nel secondo caso le distanze delle particelle della Terra dalla mela sono molto diverse fra di loro, sia in grandezza che direzione. Ora come debbono nel secondo caso combinarsi in una unica risultante le singole attrazioni? ed in quale centro di gravità, dato che vi sia, debbono concentrarsi?

Il bellissimo teorema — conclude Turner — che Newton scoprì, dimostrando che l'attrazione totale d'una sfera sopra un punto posto alla sua superficie è esattamente concentrata al centro della sfera stessa, precisamente come su un lontano satellite, dovè costituire per lui un'altissima soddisfazione. Esso pose la legge di gravitazione su un piede affatto nuovo, convertendo quella che era stata fin lì una rozza approssimazione, valevole per corpi planetari, in una legge esatta ed universale.

Il passo in questione di Newton è costituito da una dichiarazione che segue all'enunciato della proposizione ottava del terzo libro dei *Principia* (p. 404 della loro terza edizione), nella quale si afferma che due sfere, la cui materia sia distribuita in strati sferici omogenei, gravitano l'una sull'altra con forza inversamente proporzionale al quadrato della distanza fra i due centri.

Propositio VIII: Theorema VIII.

Si globorum duorum in se mutuo gravitantium materia undique in regionibus, quae a centris aequaliter distant, homogenea sit: erit pondus globi alterutrius in alterum reciproce ut quadratum distantiae inter centra.

Ed ecco ora la dichiarazione che Newton fa seguire all'enunciato del teorema:

«Dopo ⁽⁵⁾ che ebbi trovato che la gravità nell'intero pianeta ha origine e si compone delle gravità nelle singole parti e che in queste è in ragione inversa dei quadrati delle distanze, fui tuttavia in dubbio se quella proporzionalità quadratica inversa si mantenesse esattamente anche nella forza totale risultante da tutte le forze, ovvero solo con una certa approssimazione. Poiché poteva essere che quella proporzionalità, la quale si presentava con sufficiente esattezza alle maggiori distanze, andasse soggetta a notevole

(5) *Postquam invenissem gravitatem in planeta oriri et componi ex gravitatibus in partibus; et esse in partes singulas reciproce proportionalem quadratis distantiarum a partibus: dubitabam an reciproca illa proportio duplicata obtineret accurate in vi tota ex viribus composita, an vero quam proxime. Nam fieri posset ut proportio, quae in maioribus distantis satis accurate obtineret, prope superficiem planetae ob inaequales particularum distantias et situs dissimiles, notabiliter erraret. Tandem vero, per prop. LXXV et LXXVI libri primi et ipsarum corollaria, intellexi veritatem propositionis de qua agitur.*

deviazione in prossimità della superficie del pianeta, a causa della diversità delle distanze e posizioni delle particelle. Però finalmente, con le proposizioni 75 e 76 del primo libro e relativi corollari, mi convinsi della verità della proposizione di cui qui si tratta».

3. Si comprende, da quanto si è fin qui esposto, la ragione delle appassionate rivendicazioni di Newton sulla legge di gravitazione universale; giacché, sebbene più o meno contemporaneamente a lui, Halley, Wren e Hooke avessero ricavato con facile calcolo dalla terza legge di Kepler la possibilità d'una attrazione fra i corpi celesti, decrescente col quadrato della distanza, non erano tuttavia riusciti a dimostrarla *per tutta la materia in generale*: tanto da doversi lui solo considerare l'unico vero scopritore della legge stessa in tutta la sua universalità.

In particolare, drammatica fu la ribellione di Newton alla pretesa di Robert Hooke di voler esser da lui citato nei *Principia* come suo collaboratore nella enunciazione della legge stessa. Newton arrivò a minacciare di togliere dal volume dei *Principia*, allora in corso di stampa sotto gli auspici della *Royal Society*, tutto il terzo libro, nel quale trovasi tale formulazione, se Hooke non fosse stato messo a posto dalla Società stessa. E ci volle tutto il tatto del suo amico, l'astronomo Edmund Halley, segretario della *Royal Society*, per convincerlo che in questa tutti lo riconoscevano vero e solo autore della scoperta della gravitazione e farlo recedere⁽⁶⁾ dal suo proposito.

Insomma, per Newton, la scoperta della gravitazione universale fu una scoperta di carattere essenzialmente matematico: da qui la sua protesta contro coloro che non lo volevano riconoscere.

Significativo al riguardo il seguente passo di una lettera spedita il 20 giugno 1686 ad Halley⁽⁷⁾ in cui, alludendo appunto al carattere matematico della sua scoperta ed alle pretese di Hooke su di essa, così scrive: «Non è ora proprio bello⁽⁸⁾ che i matematici, i quali scoprono, mettono a posto e compiono tutto il lavoro, debbano poi contentarsi di non esser nulla più che aridi calcolatori e manovali; mentre qualcuno che non fa altro che avanzare pretese e tentare di accaparrarsi tutto, debba portarsi via la mia scoperta, nonché le scoperte di quelli che verranno dopo di lui o che vennero prima?».

(6) Le pretese di Hooke erano arrivate a tal punto da accusare Newton di plagio nella scoperta della legge di gravitazione. Hooke, uomo di grande ingegno, avrebbe potuto portare alla scienza notevoli contributi, se avesse avuto la costanza di portare a fine tutte le ricerche su cui si buttava e sulle quali avanzava poi infondate rivendicazioni, tanto da essersi guadagnato il nomignolo di «rivendicatore universale» (the universal claimant), come racconta W. ROUSE BALL a p. 72 del suo *Essay*.

(7) Lettera pubblicata con i più importanti documenti relativi ai *Principia* a p. 159 dell'*Essay* di V. ROUSE BALL.

(8) *Now is not this very fine, Mathematicians, that find out, settle, and do all the business, must content themselves with being nothing but dry calculators and drudges; and another, that does nothing but pretend and grasp at all things, must carry away all the invention, as well as of those that were to follow him, as of those that went before.*

Geodesia. — *Determinazione di gravità relativa tra l'Istituto Idrografico della Marina in Genova ed il vertice di 1° Ordine Monte Colma di Mombarone* (*). Nota di IDA GENNARO, presentata (**) dal Corrisp. G. BOAGA.

Nell'agosto del 1927 il prof. U. Barbieri eseguiva la stazione astronomica-geodetica sul Monte Colma di Mombarone (*). Facevano parte della spedizione due studenti preventivamente addestrati da chi scrive alle osservazioni delle coincidenze per le misure gravimetriche pendolari.

Il soggiorno sul vertice, alto 2371 metri sul livello del mare, già poco confortevole per natura, fu reso ancora più disagiato dal cattivo tempo, che fece protrarre il lavoro di circa 20 giorni, e dalla partenza improvvisa di uno dei due collaboratori.

Le osservazioni gravimetriche iniziate e chiuse a Genova (Istituto Idrografico della Marina) nei giorni 12-13 luglio 1927 e 7-8 ottobre 1927 rispettivamente, si svolsero a Monte Colma di Mombarone il 5 e 8 agosto 1927.

Le coordinate geografiche delle due stazioni sono, indicando con φ la latitudine, λ la longitudine ad est di Greenwich ed H l'altezza sul livello del mare espressa in metri:

Istituto Idrografico: . . . $\varphi = 44^{\circ}25'08'',20$ $\lambda = 8^{\circ}55'21'',49$ $H = 97^m,50$
 Monte Colma di Mombarone: $\varphi = 45^{\circ}35'08'',05$ $\lambda = 7^{\circ}53'37'',64$ $H = 2371^m,00$.

L'apparato gravimetrico usato fu il *Bipendolare di Sterneck*, appartenente all'Istituto di Geodesia dell'Università di Genova, corredato di quattro pendoli in bronzo portanti il numero: 69-70-98-99; le costanti dei quali furono determinate a Genova nella sala gravimetrica dell'Istituto Idrografico della Marina (2) e risultarono le seguenti:

per la *temperatura*, per tutti e quattro i pendoli . . . $C_2 = 48,91 \pm 0,05$
 per la *densità*, per la coppia 69-70 $C_{3I} = 543,6 \pm 1,02$
 per la *densità*, per la coppia 98-99 $C_{3II} = 562,1 \pm 0,54$.

Gli orologi adoperati furono il *cronometro Michaelsen* e il *cronometro Fletcher* entrambi appartenenti all'Istituto di Geodesia e preventivamente tenuti in osservazione per il buon andamento nel Reparto Cronometri dell'Istituto Idrografico. Il comportamento fu ottimo e le *correzioni per l'andamento dell'orologio* a furono dedotte dai segnali Radio-telegrafici di Bordeaux e di Parigi.

(*) Lavoro eseguito all'Istituto di Geodesia dell'Università di Genova.

(**) Nella seduta del 13 dicembre 1952.

(1) Cfr. questi « Rendiconti » (anno 1928) ser. VI, vol. VII, da p. 907 a p. 910.

(2) I. GENNARO, *Determinazione delle costanti strumentali dell'Apparato Bipendolare di Sterneck dell'Istituto di Geodesia dell'Università di Genova*. « Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino », vol. LXVII (1932).

Gli *apparecchi sussidiari* per la determinazione furono quelli adoperati per la stazione di Andrate ⁽³⁾; le modalità quelle tenute nelle operazioni pure descritte nella Nota ⁽³⁾.

I valori per la *riduzione a supporto rigido* dedotti col metodo del Borrás e gli *errori medi* corrispondenti nelle singole stazioni sono risultati dei seguenti importi:

Istituto Idrografico_I $\sigma = -(34,78 \pm 1,5) \cdot 10^{-7}$ sec.

Colma di Mombarone $\sigma = -(36,72 \pm 2,5) \cdot 10^{-7}$ sec.

Istituto Idrografico_{II} $\sigma = -(36,88 \pm 3,2) \cdot 10^{-7}$ sec.

Nel quadro che segue sono riportati i valori ridotti delle durate di oscillazione dei quattro pendoli, per le quattro serie effettuate in ogni stazione; vi è pure aggiunta, per ogni serie, la durata di oscillazione media mentre le varie epoche e le *condizioni medie* generali sotto cui le misure furono eseguite sono:

STAZIONE	Data	Serie	Durate di oscillazioni ridotte				
			s_{69} 0 ^s ,50	s_{70} 0 ^s ,50	s_{98} 0 ^s ,50	s_{99} 0 ^s ,50	s_m 0 ^s ,50
Istituto Idrografico Marina Genova	12-7-1927	1	69010	72134	76750	76543	73609
	»	2	69014	72137	76755	76542	73612
	13-7-1927	3	69007	72129	76753	76539	73607
	»	4	69008	72134	76758	76544	73611
			69009 ₈	72133 ₅	76754	76542	73609 ₈
Monte Colma di Mombarone.	5-8-1927	1	70021	73106	77785	77560	74618
	»	2	70020	73103	77778	77559	74615
	8-8-1927	3	70018	73104	77776	77555	74613
	»	4	70020	73107	77777	77556	74615
			70019 ₈	73105	77779	77557 ₅	74615 ₃
Istituto Idrografico Marina Genova	7-10-1927	1	68988	72087	76710	76510	73573 ₈
	»	2	68986	72088	76711	76506	73572 ₈
	8-10-1927	3	68989	72090	76709	76510	73574 ₅
	»	4	68984	72091	76708	76506	73572 ₃
			68986 ₈	72089	76709 ₅	76508	73573 ₃

(3) I. GENNARO, *Determinazione di gravità relativa tra l'Istituto Idrografico della Marina in Genova ed Andrate*. «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», vol. 69 (1933-1934).

Stazione	Epoca	N. serie	Ampiezza	Temperatura	Densità
Istituto Idrografico _I .	1927,53	4	$\alpha = 16',56$	$T = 19',15$	$D = 0,677$
Mombarone	1927,60	4	14,43	10,31	0,735
Istituto Idrografico _{II} .	1927,77	4	15,06	18,04	0,719
Medie			$\alpha_m = 15',81$	$T_m = 18',59$	$D_m = 0,698$

Per la determinazione della *precisione* delle misure si osservi che le durate d'oscillazione ridotte S ed S' per le due stazioni si deducono da quelle osservate s ed s' secondo la nota relazione:

$$S = s - c_1 \alpha^2 - C_2 T - C_3 D + C_4 a + \sigma$$

ed analoga:

$$S' = s' - c_1 \alpha'^2 - C_2 T' - C_3 D' + C_4 a' + \sigma'$$

La *differenza di gravità* viene calcolata in funzione della differenza:

$$S - S' = s - s' - c_1 (\alpha^2 - \alpha'^2) - C_2 (T - T') - C_3 (D - D') + \\ + C_4 (a - a') + (\sigma - \sigma')$$

dove per le costanti si assumono i valori:

$$C_1 = \frac{s}{16} 10^7 = 0,0268 \quad C_2 = 48,91 \pm 0,05 \quad C_3 = 552,8 \pm 0,78$$

$$C_4 = \frac{s}{86400} 10^7 = 58,68$$

e differenziando:

$$d(S - S') = ds - ds' + 2 c_1 (\alpha d\alpha - \alpha' d\alpha') - dC_2 (T - T') - C_2 (dT - dT') - \\ - dC_3 (D - D') - C_3 (dD - dD') + C_4 (da - da') + (d\sigma - d\sigma').$$

La formula che dà il *quadrato dell'errore della differenza delle durate di oscillazione ridotte* è con ciò:

$$m_{S-S'}^2 = 2 ds^2 + 2 (2 c_1 \alpha d\alpha)^2 + dC_2^2 (T - T')^2 + 2 (C_2 dT)^2 + dC_3^2 (D - D')^2 + \\ + 2 (C_3 dD)^2 + (C_4 da)^2 + (C_4 da')^2 + 2 (d\sigma)^2$$

che fornisce il seguente valore:

$$m_{\Delta S}^2 = 31,90$$

e conseguentemente:

$$m_{\Delta S} = \pm 5,6 \cdot 10^{-7} \text{ sec.}$$

Applicando il *metodo del Borrás* la parte *accidentale* μ dell'errore da cui è affetta la durata di oscillazione S , e la parte *sistematica* α dovuta a cause

che permangono durante le osservazioni dei pendoli di una serie, sono determinate dalle note relazioni:

$$\mu^2 + \kappa^2 = \frac{[vv']}{-4([n] - r)} \quad ; \quad \frac{\mu^2}{4} + \kappa^2 = \frac{[VV']}{[n] - r} \quad ; \quad \mu^2 = \frac{[v'v']}{3([n] - r)}$$

dove una delle tre serve di verifica alle altre due.

Utilizzando i valori delle durate di oscillazioni ridotte, trascritte nello specchio precedente, si giunge facilmente ai risultati seguenti, per le tre equazioni del Borrás e per le singole stazioni:

Istituto Idrografico I	$12 (\mu^2 + \kappa^2) = 95$	$3 \left(\frac{\mu^2}{4} + \kappa^2 \right) = 15$	$9 \mu^2 = 37$
Mombarone	$12 (\mu^2 + \kappa^2) = 80$	$3 \left(\frac{\mu^2}{4} + \kappa^2 \right) = 15$	$9 \mu^2 = 33$
Istituto Idrografico II	$12 (\mu^2 + \kappa^2) = 46$	$3 \left(\frac{\mu^2}{4} + \kappa^2 \right) = 3$	$9 \mu^2 = 37$
Somma . . .	$36 (\mu^2 + \kappa^2) = 221$	$9 \left(\frac{\mu^2}{4} + \kappa^2 \right) = 33$	$27 \mu^2 = 107$

dalle quali:

$$\begin{aligned} \mu^2 &= 3,31 & \kappa^2 &= 2,83 & \mu^2 &= 3,96 \\ \mu &= \pm 1,8 & \kappa &= \pm 1,6 & \mu &= \pm 1,9 \end{aligned}$$

espressi con la settima cifra decimale del secondo.

Per determinare la parte λ dell'errore dovuta al passaggio da una stazione all'altra servono a tale scopo le differenze: $S_{69} - S_m$; $S_{70} - S_m$; $S_{98} - S_m$; $S_{99} - S_m$; però per rendere paragonabili tra loro questi valori è bene prima ridurli ad una medesima stazione, in questo caso all'Istituto Idrografico, essendo la stazione base. Le correzioni da apportare alle differenze $S_i - S_m$, corrispondenti alla stazione di campagna Monte Colma di Mombarone, si deducono dalla relazione:

$$+ \frac{dg}{2g} (S_i - S_m).$$

L'errore λ che è definito dalla

$$3 \frac{r-1}{r} \cdot \mu^2 \sum \frac{1}{n} + 3(r-1)\lambda^2 = [V'V']$$

risulta pertanto del seguente importo:

$$\lambda = \pm 13,1 \times 10^{-7} \text{ sec.}$$

L'errore complessivo $M_{\Delta s}$ relativo alla differenza tra le due durate d'oscillazione, stazione base e stazione campagna, $d(S - S')$ è fornito dalla nota relazione:

$$M_{\Delta s}^2 = m_{\Delta s}^2 + \frac{\mu^2}{4n} + \frac{\mu^2}{4n'} + \frac{\kappa^2}{n} + \frac{\kappa^2}{n'} + \frac{\lambda^2}{4}$$

dove n rappresenta il numero delle serie osservate all'Istituto Idrografico ed n' quelle al vertice Colma di Mombarone.

Tenendo conto dei risultati parziali ottenuti si trae:

$$M_{\Delta S} = \pm 8,7 \times 10^{-7} \text{ sec.}$$

Infine, indicando g l'accelerazione della gravità all'Istituto Idrografico della Marina di Genova e con g' l'accelerazione di gravità al Mombarone (Monte Colma), si ha la serie:

$$g' - g = 2g \frac{S - S'}{S} + 3g \left(\frac{S - S'}{S} \right)^2 + \dots$$

e conseguentemente:

$$M_{g'} = \frac{2g}{S} \cdot M_{\Delta S}.$$

Assumendo quale valore della gravità nella stazione di riferimento (Istituto Idrografico-sala gravimetrica) il valore $g = 980,557 \text{ gal}$ ⁽⁴⁾ si ottengono i valori:

$$g' - g = -0,3957 \text{ gal} \quad \text{e} \quad M_g = \pm 0,003, \text{ gal}$$

da cui la gravità osservata a Monte Colma di Mombarone risulta dell'importo:

$$g' = 980,161, \text{ gal} \pm 0,003, \text{ gal}.$$

Assumendo per la densità superficiale del terreno attorno alla stazione di campagna il valore $d = 2,7$ per la densità media terrestre il valore $d_m = 5,52$ generalmente adottato, dai *valori normali* forniti dalle formule teoriche:

formula di Hermert (1901)

$$\gamma_0 = 978,030 (1 + 0,005302 \sin^2 \varphi - 0,000007 \sin^2 2\varphi) \text{ gal},$$

formula internazionale (1930)

$$\gamma'_0 = 978,0490 (1 + 0,0052884 \sin^2 \varphi - 0,0000059 \sin^2 2\varphi) \text{ gal},$$

si deducono le seguenti *anomalie* gravimetriche di Faye e di Bouguer:

Anomalie	formula Helmert (1901)	formula internazionale (1930)
(Faye) : . $g_0 - \gamma_0$	+ 0,224 gal	+ 0,211 gal
(Bouguer) . $g''_0 - \gamma_0$	- 0,044 gal	- 0,057 gal

essendo le corrispondenti *gravità normali* dei seguenti importi:

$$\gamma_0 = 980,669 \text{ gal} \quad \gamma'_0 = 980,682 \text{ gal}.$$

(4) REINA E CASSINIS, *Determinazioni di Gravità relativa a Roma, Arcetri, Livorno, Genova, ecc.* « R. Commissione Geodetica Italiana », 1913.

Fisica matematica. — *Sulla risoluzione mediante integrali definiti del problema delle vibrazioni di una piastra.* Nota di CATALDO AGOSTINELLI, presentata (*) dal Socio A. SIGNORINI.

1. In un mio lavoro di alcuni anni fa ⁽¹⁾, dopo aver osservato che la ricerca di soluzioni dell'equazione differenziale delle vibrazioni di una piastra piana omogenea

$$(1) \quad \Delta_2 \Delta_2 w + \frac{1}{k^4} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad , \quad \left(\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right),$$

ove w è lo spostamento di un punto generico della piastra in direzione perpendicolare al suo piano e k è una costante che dipende dallo spessore della piastra, dalla densità, dal modulo di elasticità e dal rapporto di contrazione di Poisson, si riconduce alla ricerca di soluzioni $u = w + i v$ dell'equazione differenziale del 2° ordine

$$(2) \quad \Delta_2 u - \frac{i}{k^2} \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad , \quad (i = \sqrt{-1}),$$

la quale si scinde nel sistema di due equazioni differenziali del 2° ordine

$$(3) \quad \Delta_2 w + \frac{1}{k^2} \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \Delta_2 v - \frac{1}{k^2} \frac{\partial v}{\partial t} = 0,$$

stabilii una formula che risolveva il problema di Cauchy per la (1) nel caso di una piastra illimitata mediante integrali definiti estesi a tutto il piano e in cui figurava una funzione $f = \varphi(x, y) + i \psi(x, y)$, ove φ definiva lo spostamento iniziale dei punti della piastra, mentre la velocità iniziale era data da $k^2 \Delta_2 \psi$.

Nello stesso lavoro osservai che quella formula poteva servire a risolvere il problema delle vibrazioni di una piastra piana di dimensioni finite, purché le funzioni φ, ψ fossero nulle in tutto il campo piano esterno a quello occupato dalla piastra e fossero scelte in modo da essere soddisfatte le condizioni al contorno che si impongono alla w ; infatti ne feci applicazione al caso della piastra rettangolare appoggiata e al caso della piastra circolare incastrata.

In questa Nota, con procedimento diverso, servendomi della trasformata di Laplace, stabilisco direttamente quella formula per il caso di una piastra di dimensioni finite, precisando le condizioni alle quali devono soddisfare gli spostamenti iniziali e le velocità iniziali dei punti della piastra perchè quella stessa formula risolva il problema delle vibrazioni per la piastra con assegnate condizioni al contorno.

(*) Nella seduta del 13 dicembre 1952.

(1) C. AGOSTINELLI, *Sul problema di Cauchy per l'equazione differenziale delle piastre vibranti*. « Annali di Matematica pura ed applicata », ser. IV, Tomo XXVI, 1947.

2. Se indichiamo con $f = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ il valore iniziale della funzione u , in virtù della stessa equazione (2), si ha che il valore iniziale di $\frac{\partial u}{\partial t}$ sarà dato da

$$(4) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial u}{\partial t} = -k^2 i \Delta_2 f.$$

Indicando inoltre con U la trasformata di Laplace della funzione u , ponendo cioè

$$(5) \quad U(p) = \mathcal{L}u = \int_0^\infty e^{-pt} u dt,$$

con Rp maggiore dell'ascissa di convergenza dell'integrale, la (2) si trasforma nella seguente equazione

$$(6) \quad \Delta_2 U - \frac{i p}{k^2} U = -\frac{i}{k^2} f(x, y).$$

Essendo ora $P(x, y)$ un punto scelto come *polo* nell'interno del campo piano σ occupato dalla piastra e $P_0(x_0, y_0)$ un punto variabile nello stesso campo, posto $r = P_0 P = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, si sa che è soluzione dell'equazione omogenea associata alla (6) la funzione $K_0\left(\frac{r}{k} \sqrt{i p}\right)$, ove K_0 è il simbolo della funzione di Bessel di ordine zero, di 2ª specie e di argomento immaginario, che ha una singolarità logaritmica per $r = 0$.

Ciò posto, io dico che la funzione

$$(7) \quad U(P) = \frac{i}{2\pi k^2} \int_{\sigma} K_0\left(\frac{r}{k} \sqrt{i p}\right) f(P_0) d\sigma$$

nei punti *interni* alla piastra verifica la (6), mentre nei punti *esterni*, ove la funzione integranda è regolare, soddisfa ovviamente all'equazione omogenea associata.

Infatti, se σ_1 è un cerchio di centro P tutto contenuto in σ , chiamando U_1 il valore dell'integrale (7) esteso a σ_1 ed U_2 quello dello stesso integrale esteso all'area $\sigma_2 = \sigma - \sigma_1$, si ha $U = U_1 + U_2$, e poichè

$$\Delta_2 U_2 - \frac{i p}{k^2} U_2 = 0$$

essendo il punto P esterno all'area σ_2 , si ricava

$$(8) \quad \Delta_2 U = \Delta_2 U_1 + \Delta_2 U_2 = \Delta_2 U_1 + \frac{i p}{k^2} U_2.$$

D'altra parte dalla relazione

$$U_1(P) = \frac{i}{2\pi k^2} \int_{\sigma_1} K_0\left(\frac{r}{k} \sqrt{i p}\right) f(P_0) d\sigma_1,$$

il cui secondo membro è derivabile sotto il segno rispetto alle coordinate di P, prendendo il gradiente rispetto a P, osservando che

$$\begin{aligned}\text{grad}_P K_0 \left(\frac{r}{k} \sqrt{i\bar{p}} \right) \cdot f(P_0) &= -\text{grad}_{P_0} K_0 \left(\frac{r}{k} \sqrt{i\bar{p}} \right) \cdot f(P_0) = \\ &= -\text{grad}_{P_0} [K_0 \cdot f(P_0)] + K_0 \cdot \text{grad}_{P_0} f(P_0)\end{aligned}$$

e osservando inoltre che all'integrale

$$\int_{\sigma_1} \text{grad}_{P_0} \left[K_0 \left(\frac{r}{k} \sqrt{i\bar{p}} \right) \cdot f(P_0) \right] d\sigma_1$$

è applicabile il teorema del gradiente, si deduce

$$\begin{aligned}(9) \quad \text{grad}_P U_1 &= -\frac{i}{2\pi k^2} \int_{s_1} K_0 \left(\frac{r}{k} \sqrt{i\bar{p}} \right) f(P_0) \cdot \bar{n} ds_1 + \\ &+ \frac{i}{2\pi k^2} \int_{\sigma_1} K_0 \left(\frac{r}{k} \sqrt{i\bar{p}} \right) \cdot \text{grad}_{P_0} f(P_0) d\sigma_1\end{aligned}$$

ove s_1 è il contorno del cerchio σ_1 ed \bar{n} è il versore della normale *esterna*.

Prendendo ora la divergenza di ambo i membri della (9) si ha

$$\begin{aligned}(10) \quad \Delta_2 U_1 &= -\frac{i}{2\pi k^2} \int_{s_1} \text{grad}_P K_0 \left(\frac{r}{k} \sqrt{i\bar{p}} \right) \times \bar{n} \cdot f(P_0) ds_1 + \\ &+ \frac{i}{2\pi k^2} \int_{\sigma_1} \text{grad}_P K_0 \left(\frac{r}{k} \sqrt{i\bar{p}} \right) \times \text{grad}_{P_0} f(P_0) d\sigma_1.\end{aligned}$$

Ma è

$$\text{grad}_P K_0 \left(\frac{r}{k} \sqrt{i\bar{p}} \right) \times \bar{n} = \frac{dK_0}{dr} \cdot \text{grad}_P r \times \bar{n} = -\frac{dK_0}{dr}$$

e

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \frac{dK_0}{dr} = -1,$$

perciò, passando al limite quando il raggio del cerchio σ_1 tende a zero, il primo integrale del secondo membro della (10) tende a $2\pi f(P)$, mentre il secondo tende a zero. Ne segue

$$\lim \Delta_2 U_1 = -\frac{i}{k^2} f(P)$$

e dalla (8), passando analogamente al limite si ha

$$\Delta_2 U = -\frac{i}{k^2} f(P) + \frac{i\bar{p}}{k^2} U.$$

Dunque l'integrale (7) nei punti interni all'area σ soddisfa proprio all'equazione differenziale (6).

Applicando alla (7) l'antitrasformata di Laplace avremo

$$u = \mathcal{L}^{-1} U = \frac{i}{2\pi k^2} \int_{\sigma} \mathcal{L}^{-1} \left[K_0 \left(\frac{r}{k} \sqrt{i\dot{p}} \right) \right] \cdot f(P_0) d\sigma$$

ma è ⁽²⁾

$$\mathcal{L}^{-1} \left[K_0 \left(\frac{r}{k} \sqrt{i\dot{p}} \right) \right] = \frac{1}{2t} e^{-i \frac{r^2}{4k^2 t}}$$

perciò si ha infine

$$(11) \quad u(P, t) = \frac{i}{4\pi k^2 t} \int_{\sigma} e^{-i \frac{r^2}{4k^2 t}} f(P_0) d\sigma,$$

che si identifica con la formula (5) del lavoro citato in (1) quando il campo σ si estende a tutto il piano e si chiama t_0 l'istante iniziale.

Con procedimento analogo ivi seguito, potendo estendere l'integrale del secondo membro della (11) a tutto il piano, purchè all'esterno di σ si ponga $f(P) = 0$, si dimostra che il limite di u per $t \rightarrow 0$ è proprio $f(P) = \varphi + i\psi$. Inoltre, separando nella (11) la parte reale w dalla parte immaginaria v , si ricava la funzione $w(P, t)$ che soddisfa all'equazione differenziale (1) delle piastre vibranti, che per $t = 0$ assume il valore φ e la cui derivata temporale $\frac{\partial w}{\partial t}$, assume il valore iniziale $k^2 \Delta_2 \psi$ (come mostra la (4)).

Se invece della funzione ψ è assegnata la velocità iniziale

$$\dot{w}_0(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial w}{\partial t}$$

dovremo avere

$$\Delta_2 \psi = \frac{1}{k^2} \dot{w}_0(x, y)$$

la quale, in base alla teoria dei potenziali logaritmi è soddisfatta ponendo, in ogni punto P interno al campo σ (a meno di una funzione armonica),

$$\psi(P) = -\frac{1}{2\pi k^2} \int_{\sigma} \log \frac{1}{r} \cdot \dot{w}_0(P_0) d\sigma.$$

3. La funzione reale w che si ricava dalla (11) ponendo $u = w + iv$, non risolve evidentemente il problema delle vibrazioni di una piastra piana omogenea con assegnate condizioni al contorno, se gli spostamenti iniziali e le velocità iniziali, se cioè le funzioni $w_0 = \varphi(x, y)$, $\dot{w}_0(x, y)$, *a priori* arbitrarie, non sono scelte opportunamente.

Per stabilire le condizioni alle quali devono soddisfare questi dati iniziali supponiamo che le funzioni $w_0(x, y)$, $\dot{w}_0(x, y)$ e i successivi $\Delta_{4m} w_0$, $\Delta_{4m} \dot{w}_0$, ($m = 1, 2, 3, \dots$), esistano, siano limitati e in valore assoluto minori di un numero finito M . Allora, tenendo conto dell'equazione differenziale (2), la funzione u che per $t = 0$ assume il valore $u_0 = f = \varphi + i\psi$,

(2) Vedi ad esempio A. GHIZZETTI, *Calcolo simbolico*, tabelle trasformate di Laplace n. (123). (Zanichelli, Bologna 1943).

e che è espressa dalla (11), si può rappresentare anche, come si è visto nel lavoro citato in ⁽¹⁾, mediante la serie

$$(12) \quad u = u_0 + \sum_m \frac{(-1)^m}{(2m)!} k^{4m} \Delta_m u_0 \cdot t^{2m} - i \sum_m \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} k^{4m+2} \Delta_{m+2} u_0 \cdot t^{2m+1}$$

uniformemente convergente per tutti i valori del tempo.

Poiché dalla stessa (2) risulta, con evidente significato dei simboli,

$$\Delta_2 u_0 \equiv \Delta_2 w_0 + i \Delta_2 \dot{w}_0 = \frac{i}{k^2} (\ddot{w}_0 + i \dot{\dot{w}}_0),$$

sostituendo nella (12), e uguagliando le parti reali dei due membri, si ha

$$(13) \quad w = w_0 + \sum_m \frac{(-1)^m}{(2m)!} k^{4m} \Delta_m w_0 \cdot t^{2m} + \sum_m \frac{(-1)^m k^{4m}}{(2m+1)!} \Delta_m \dot{w}_0 \cdot t^{2m+1}.$$

Allora la funzione w soddisferà alle assegnate condizioni al contorno se a queste condizioni soddisfano le funzioni

$$w_0, \dot{w}_0; \quad \Delta_m w_0, \quad \Delta_m \dot{w}_0, \quad (m = 1, 2, 3, \dots).$$

Così per esempio, se la piastra è incastrata, per ogni valore del tempo sarà al contorno $w = 0$, $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$, e pertanto dalla (13) si ricava che le funzioni $w_0(x, y)$, $\dot{w}_0(x, y)$, che rappresentano rispettivamente gli spostamenti iniziali e le velocità iniziali dei punti della piastra, dovranno verificare al contorno le condizioni:

$$w_0 = 0, \quad \dot{w}_0 = 0, \quad \Delta_m w_0 = 0, \quad \Delta_m \dot{w}_0 = 0, \\ \frac{\partial w_0}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \Delta_m w_0}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \Delta_m \dot{w}_0}{\partial n} = 0, \quad (m = 1, 2, 3, \dots).$$

Funzioni w_0 e \dot{w}_0 , che, in ogni caso, soddisfano alle condizioni richieste; si possono ottenere considerando soluzioni dell'equazione differenziale

$$(14) \quad \Delta_4 W - \gamma^4 W \equiv (\Delta_2 + \gamma^2)(\Delta_2 - \gamma^2)W = 0$$

ove γ è un parametro reale, soddisfacenti alle stesse condizioni al contorno. Esse sussisteranno in corrispondenza a determinati autovalori del parametro γ . Si riconosce allora subito che per ottenere soluzioni del problema basta porre le funzioni w_0 , \dot{w}_0 uguali a delle combinazioni lineari, con coefficienti costanti, delle autosoluzioni della (14).

Concludendo si ha: La parte reale della formula (11), ove $f(P_0) = \varphi(P_0) + i\psi(P_0)$, fornisce soluzioni del problema delle vibrazioni di una piastra piana omogenea, con date condizioni al contorno, se lo spostamento iniziale w_0 e la velocità iniziale \dot{w}_0 di un punto generico della piastra sono combinazioni lineari con coefficienti costanti delle autosoluzioni della (14), e si pone quindi

$$\varphi = w_0, \quad \psi = -\frac{1}{2\pi k^2} \int_0 \log \frac{1}{r} \cdot \dot{w}_0(P_0) d\sigma,$$

ove i simboli hanno il significato innanzi precisato.

Chimica inorganica. — *Sulle leghe dell'Uranio col Bismuto*^(*).Nota I di RICCARDO FERRO, presentata^(**) dal Socio L. ROLLA.

Dell'uranio coi metalloidi del V gruppo sono conosciute oltre a quelle con l'azoto⁽¹⁾, le combinazioni col fosforo⁽²⁾, arsenico⁽³⁾ ed antimonio⁽⁴⁾. Per il bismuto da ricerche di Brewer⁽⁵⁾ risultava l'esistenza del composto UBi e la probabile presenza di altre fasi più ricche in Bi per le quali venivano proposte le formule U_4Bi_5 ed UBi_2 .

Per cercare di completare i dati relativi a questi composti dell'U ho appunto studiato quelli col Bi su cui riferisco.

I metalli di partenza erano: U al 99,8 % con impurezze di Fe (0,05 %), O e N (complessivamente 0,2-0,3) ottenuto dal C. I. S. E. di Milano per la gentilezza del prof. Bolla cui rinnovo i miei ringraziamenti. Il Bi era di purezza superiore al 99,9 % (tracce di Pb).

Le leghe sono state preparate per riscaldamento delle polveri dei due metalli in crogiolini di allumina saldati sotto vuoto in ampolle di quarzo fuso, secondo una tecnica già descritta⁽⁴⁾.

I vari campioni sono stati riscaldati a temperature attorno a 800° per circa 2 giorni e raffreddati molto lentamente (anche 5-6 giorni in alcuni casi) fino a circa 400°.

Le leghe si presentano in masse grigiastre che a differenza delle analoghe con Sb sono fortemente alterabili: un blocchetto di pochi decigrammi lasciato all'aria raggiunge in pochi secondi, ossidandosi, una temperatura di 500°-600°; reagiscono abbastanza rapidamente anche con l'acqua.

Questa rapida alterabilità ha reso necessari particolari accorgimenti, in pratica per le misure di densità si è resa utile, per il riempimento del picnometro, l'apparecchiatura schematicamente rappresentata nella fig. 1.

Un provettone di vetro (V) è saldato con mastice al litargirio ad un bocchettone di ferro (F) internamente conico in cui si può introdurre a chiusura un tappo pure metallico (T) cavo internamente ed attraversato da 2 tubi (per fare il vuoto ed introdurre gas inerte nel tubo), e da un reoforo isolato (R) che sostiene, tramite un filo di piombo, un peso (M) che può scorrere su una guida saldata al tappo stesso.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale dell'Università di Genova col contributo finanziario del C.N.R.

(**) Nella seduta dell'8 novembre 1952.

(1) R. E. RUNDLE, N. C. BAENZIGER, A. S. WILSON, R. A. McDONALD, « J. Am. Chem. Soc. », 70, 99 (1948); inoltre: L. M. LITZ, A. B. GARRET, F. C. CROXTON, « J. Am. Chem. Soc. », 70, 1721 (1948) e H. A. WILHELM, P. CHIOTTI, A. I. SNOW, A. H. DAANE, « J. Am. Chem. Soc. Suppl. », p. S 318 (1949).

(2) M. ZUMBUSCH, « Z. anorg. Chem. », 245, 402 (1941).

(3) A. IANDELLI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », vol. XIII, ser. 8^a, 138-151 (1952).

(4) R. FERRO, « Rend. Acc. Naz. Lincei », vol. XIII, ser. 8^a, 53 (1952) e 151-157 (1952).

(5) L. BREWER, « Metall. Abstr. », 17, 710 (1950).

Introdotta sotto gas inerte (CO_2) il picnometro (P) nell'apparecchio e fatto il vuoto si fa cadere fondendone elettricamente il sostegno di piombo il peso che spezza l'estremità di una fiala contenente il liquido picnometrico (C_6H_6 distillato su Na). Riscaldando leggermente il fondo del provettone si fa distillare il benzolo, così uscito, che si condensa e cade nel picnometro senza

poter sfuggire attraverso i tubi del tappo che è opportunamente raffreddato internamente. Reintrodotta il gas inerte il picnometro è rapidamente chiuso e pesato.

Le varie leghe sono state studiate coi raggi X dimostrando la presenza delle fasi qui di seguito descritte formatesi nelle suddette condizioni.

A partire dal Bi il primo composto trovato corrisponde alla formula UBi_2 (su fotogrammi delle polveri di miscele più ricche in Bi di questa composizione ho ottenuto le righe di questa fase insieme a quelle immutate del Bi elementare), seguito da U_3Bi_4 .

A partire dall'U il primo composto è UBi le cui righe ho ottenuto insieme a quelle pure immutate dell'uranio elementare.

Su composizioni vicinissime ad UBi compaiono, insieme a quelle di questa fase, altre righe ancora che potrebbero forse spiegare l'osservazione di Brewer dell'esistenza di U_4Bi_5 .

Dall'esame dei vari fotogrammi sembra da escludere la possibilità di soluzioni solide sia per gli ele-

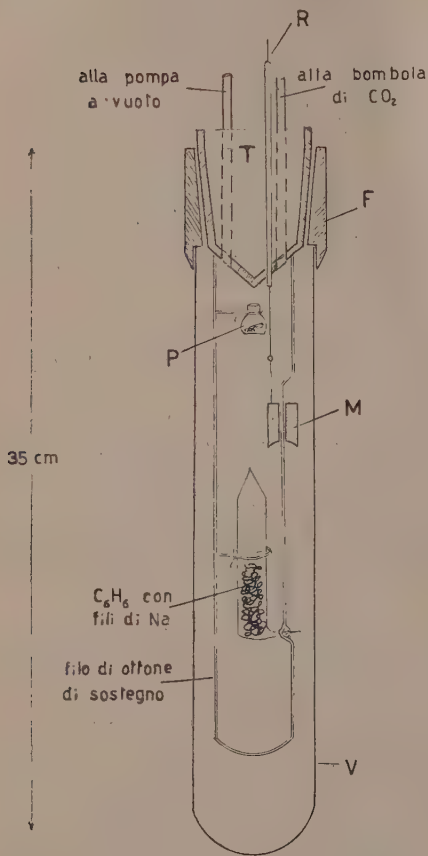


Fig. 1.

menti che per le altre fasi, in quanto non si osservano graduali variazioni delle distanze reticolari.

Composto UBi (53,25% U).

Questo composto, come ha già trovato Brewer è cubico tipo NaCl . Il valore trovato da questo Autore per la costante reticolare è di $6,364 \text{ \AA}$. Misurando su fotogrammi delle polveri ottenuti con la K_αCu , operando secondo Straumanis ed estrapolando a 90° ho ottenuto, in buon accordo, $6,356 \text{ \AA}$.

TABELLA I.

 U_3Bi_4 fotogramma delle polveri, radiazione $K_\alpha Cu$.

$h^2 + k^2 + l^2$	sen ² θ oss.	sen ² θ calc.	$h^2 + k^2 + l^2$	sen ² θ oss.	sen ² θ calc.
10	0,0677	0,0677	80	0,5402	0,5407
14	0,0940	0,0948	82	0,5537	0,5542
20	0,1353	0,1355	84	0,5679	0,5678
22	0,1491	0,1490	86	0,5810	0,5813
24	0,1621	0,1626	90	0,6083	0,6083
26	0,1769	0,1761	94	0,6358	0,6354
30	0,2025	0,2032	96	0,6494	0,6489
34	0,2290	0,2303	98	0,6628	0,6624
38	0,2571	0,2574	102	0,6896	0,6894
40	0,2711	0,2709	106	0,7170	0,7165
42	0,2851	0,2845	110	0,7430	0,7435
46	0,3118	0,3116	114	0,7712	0,7705
48	0,3258	0,3251	116	0,7832	0,7841
50	0,3383	0,3387	118	0,7968	0,7976
52	0,3528	0,3522	120	0,8118	0,8111
54	0,3660	0,3658	122	0,8255	0,8246
56	0,3790	0,3793	126	0,8524	0,8517
62	0,4203	0,4199	128	0,8659	0,8652
66	0,4478	0,4470	130	0,8787	0,8787
72	0,4885	0,4877	134	0,9062	0,9057
74	0,5019	0,5012	136	0,9195	0,9192
I seguenti: valori per la K_{α_1}			138	0,9330	0,9328
			142	0,9599	0,9598
			144	0,9732	0,9733
78	0,5273	0,5272			

$$\frac{4 \text{ sen}^2 \theta}{\lambda^2} = 0,011439 (h^2 + k^2 + l^2) \quad ; \quad a_0 = 9,350 \text{ \AA}$$

TABELLA II.
 U_3Bi_4 intensità calcolate ed osservate.

$h^2+k^2+l^2$	hkl	I calc.	I oss.	$h^2+k^2+l^2$	hkl	I calc.	I oss.
2	110	0,0	—	74	831+750+743	23,5	mf
4	200	0,0	—	76	662	0,0	—
6	211	1,9	—	78	752	14,5	m
8	220	0,0	—	80	840	4,3	d
10	310	12,1	mf	82	910+833	2,9	dd
12	222	0,0	—	84	842	9,9	md
14	321	32,1	f	86	921+761+655	34,7	f
16	400	0,4	—	88	664	0,8	—
18	411+330	0,0	—	90	930+851+754	25,2	mf
20	420	9,2	md	94	932+763	12,3	m
22	332	6,6	d-md	96	844	10,7	md
24	422	12,0	md	98	941+853+770	14,0	m
26	510+431	9,0	md	100	10.0.0+860	0,0	—
30	521	3,8	dd	102	10.1.1+772	25,9	mf
32	440	0,0	—	104	10.2.0+862	0,1	—
34	530+433	4,3	d	106	950+943	20,3	mf
36	600+442	0,0	—	108	10.2.2+666	0,0	—
38	611+532	33,0	f	110	10.3.1+952+765	17,8	m
40	620	12,5	m-md	114	871+855+774	9,7	md
42	541	20,3	mf	116	10.4.0+864	26,3	mf
44	622	0,0	—	118	10.3.3+961	11,7	md
46	631	10,0	md	120	10.4.2	27,7	mf
48	444	8,3	d-md	122	11.1.0+954+873	50,0	ff
50	710+550+543	10,0	md	126	11.2.1+10.5.1+963	15,9	m
52	640	5,5	d-md	128	880	10,3	m-m
54	721+633+552	20,2	mf	130	11.3.0+970	12,2	m
56	642	9,5	md	132	10.4.4+882	0,0	—
58	730	0,0	—	134	11.3.2+972+	136,7	fff
62	732+651	4,3	d		+10.5.3+776		
64	800	0,5	—	136	10.6.0+866	69,4	ff
66	811+741+554	5,7	d-md	138	11.4.1+875	40,2	f
68	820+644	0,0	—	140	10.6.2	0,0	—
70	653	2,4	—	142	965	47,2	ff
72	822+660	11,2	md	144	12.0.0+884	105,6	fff

In ogni caso inoltre:

quando: $h^2+k^2+l^2$ = numero dispari
 si ha: $I_{calc.} = I_{oss.} = 0,00$.

Composto U_3Bi_4 (46,07 % U).

U_3Bi_4 è cubico con $a_0 = 9,350 \text{ \AA}$, come risulta dalla tabella I. La sua densità picnometrica di 12,8 porta a 4,07 mol./cella. La densità X per 4 mol./cella è 12,59.

La sua struttura è del tipo Th_3P_4 ⁽⁶⁾, gruppo spaziale T_d^6 con:

12 U in:

$$\frac{3}{8}, 0, \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, 0 \quad 0, \frac{1}{4}, \frac{3}{8} \quad \frac{1}{8}, 0, \frac{3}{4} \quad \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, 0 \quad 0, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}$$

$$\frac{7}{8}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \quad \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8} \quad \frac{5}{8}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4}, \frac{5}{8}, \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{5}{8}$$

e 16 Bi in:

$$\begin{aligned} x, x, x & \quad \frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} - x, \bar{x} \\ x + \frac{1}{4}, x + \frac{1}{4}, x + \frac{1}{4} & \quad \frac{3}{4} + x, \frac{1}{4} - x, \frac{3}{4} - x \\ x + \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2} & \quad x, \bar{x}, \frac{1}{2} - x \\ x + \frac{3}{4}, x + \frac{3}{4}, x + \frac{3}{4} & \quad \frac{1}{4} + x, \frac{3}{4} - x, \frac{1}{4} - x \\ \bar{x}, \frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} - x & \quad \frac{1}{2} - x, \bar{x}, \frac{1}{2} + x \\ \frac{3}{4} - \bar{x}, \frac{3}{4} + \bar{x}, \frac{1}{4} - x & \quad \frac{1}{4} - x, \frac{3}{4} - x, \frac{3}{4} + x \\ \frac{1}{2} - x, x, x & \quad \bar{x}, \frac{1}{2} - x, x \\ \frac{1}{4} - x, \frac{1}{4} + x, \frac{3}{4} - x & \quad \frac{3}{4} - x, \frac{1}{4} - x, \frac{1}{4} + x \end{aligned}$$

con $x = \frac{1}{12}$ come risulta dalla tabella II dal confronto tra intensità calcolate in tale ipotesi e quelle osservate.

Nel reticolo di U_3Bi_4 gli U si trovano a $3,24 \text{ \AA}$ dai Bi più vicini.

Le caratteristiche di UBi_2 , tetragonale, isomorfo con UP_2 , UAs_2 ed USb_2 verranno descritte in una successiva Nota.

(6) K. MEISEL, «Z. anorg. Chem.», 240, 300 (1939).

Microcoulombometria. — *Sulla determinazione di n nell'elettrolisi polarografica accompagnata da processi secondari* (*). Nota I di PIETRO LANZA e ANTONIO CORBELLINI, presentata (**) dal Corrisp. G. SEMERANO.

Uno degli scopi principali della ricerca polarografica consiste nello stabilire la natura dei processi elettrolitici che si svolgono all'interfase elettrodo-soluzione e che vengono rivelati dai gradini sui diagramma corrente-tensione. Definire la natura del processo elettrolitico equivale, in pratica, a determinare il numero di elettroni n messo in gioco nella ossidoriduzione che si compie all'elettrodo.

L'indagine polarografica dovette occuparsi ben presto di questo problema escogitando metodi sperimentali atti a fornire i valori di n . Si poté facilmente osservare che le correnti di diffusione di vari ioni esaminati nella stessa soluzione base, a parità di concentrazione molare, di temperatura, di caratteristiche del capillare e di ogni altra condizione in grado di influenzare l'altezza del gradino polarografico, salvo notevoli eccezioni, dipendenti però dai valori nettamente diversi del coefficiente di diffusione (H^+ , D^+), erano proporzionali alla valenza del processo elettrolitico in atto.

Già questa semplice constatazione fu di notevole aiuto nella definizione della valenza di molti processi elettrolitici, sia inorganici che organici, potendosi ottenere dati attendibili, anche se approssimati, confrontando le altezze di gradini di processi di nota valenza con quella dei gradini di processi di n incognita, esaminati a parità di condizioni sperimentali. In questo modo, tanto per citare un esempio fra molti, si definì la valenza del processo di riduzione dei nitrati per confronto del loro gradino con quello del cadmio.

Benchè questo metodo sia stato applicato spesso con successo, esso può dare risultati sicuri solo quando le mobilità, delle specie poste a confronto siano molto vicine, specialmente se il processo in esame è a valenza elevata. È noto infatti che il valore della corrente di diffusione (i_d) è definita, fra l'altro, anche dal coefficiente di diffusione della sostanza elettrolizzata secondo varie equazioni tra le quali quella proposta da Ilkovic:

$$(I) \quad i_d = 0,627 nF m^{2/3} t^{1/6} D^{1/2} c$$

è la più nota.

Secondo questa equazione, dalla misura dell'altezza del gradino in esame, si può ricavare direttamente, cioè senza alcun confronto con altro gradino, il valore di n purché la corrente sia essenzialmente corrente di diffusione e sia noto il coefficiente di diffusione D , oltre alle altre grandezze, per altro facilmente misurabili.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica fisica e Centro di Polarografia del C. N. R. di Padova.

(**) Nella seduta dell'8 novembre 1952.

L'equazione non è più applicabile quando la corrente misurata sia alterata da contributi di processi estranei alla diffusione (correnti di migrazione, correnti cinetiche dovute a processi secondari) oppure se la stessa corrente di diffusione risulti alterata da fenomeni di adsorbimento o limitata nel suo sviluppo da insufficiente acidità all'elettrodo per inefficienza del tampone ⁽¹⁾ ⁽²⁾. Inoltre la difficoltà, che il più delle volte rende dubbio il risultato, dipende dalla mancanza di valori sufficientemente precisi dei coefficienti di diffusione delle sostanze in esame nel mezzo utilizzato come soluzione base. Assai raramente in pratica sono realizzate tutte le condizioni richieste e si dispone dei dati necessari per poter applicare l'equazione, cosicché il più delle volte si ottengono con questo metodo solo misure approssimate se non addirittura errate.

Sono comunemente usati anche metodi che permettono di ricavare n per via puramente polarografica ricorrendo alle equazioni rappresentative della funzione i/E , cioè mediante lo studio analitico del comune polarogramma. Il semplice spostamento del potenziale di riduzione in funzione della concentrazione, in base alla nota equazione di Haber-Tafel, può talvolta servire a determinare il valore di n , ma l'indeterminazione esistente spesso nella definizione del potenziale di riduzione e gli spostamenti assai piccoli che si hanno nei processi a valenza elevata, rendono questo metodo di applicazione molto limitato.

Trova spesso riscontro in letteratura l'uso dell'espressione di Heyrovsky e Ilkovic:

$$(2) \quad E = E_{1/2} + \frac{RT}{nF} \ln \frac{i_d - i}{i}$$

Se si portano in diagramma i valori di $\log \frac{i_d - i}{i}$ e di E si ottiene una retta, la cui pendenza è funzione di n .

Con questo metodo non si richiede la conoscenza di D e, se è rispettata la condizione di avere a che fare con correnti di pura diffusione e con processi perfettamente reversibili, si ottengono ottimi risultati.

Risulta però ogni giorno più evidente, mano a mano che si estendono le ricerche, che la reversibilità di un processo polarografico costituisce più l'eccezione che la regola, ed è questa la più grave limitazione alle vaste possibilità del metodo, e non tanto per la valutazione di n e della natura dei processi elettrolitici, per i quali problemi esistono altre vie di soluzione, quanto per uno studio energetico-quantitativo atto a dare un significato termodinamico ai potenziali polarografici.

Confrontando i due metodi polarografici fondamentali per la determinazione di n , basati rispettivamente sulle equazioni di Ilkovic (1) e Heyrovsky (2), si può osservare che il primo è di uso più generale in quanto resta

(1) L. RICCOBONI, P. LANZA e P. FAVERO. *Il comportamento polarografico dell'ossido di azoto*. «Mem. Acad. Naz. Lincei», Classe Sci. Fis. Mat. e Nat. (VIII), 3, 1-28 (1950).

(2) P. LANZA, *Il comportamento polarografico delle soluzioni-tampone*. «Suppl. alla Ricerca sci.», 27-42 (1952).

applicabile anche a processi irreversibili, purchè restino rispettivamente le condizioni citate e soprattutto la corrente i_d misurata sia pura corrente di diffusione.

Il procedimento che il più delle volte riesce a risolvere il problema della determinazione di n è stato introdotto in polarografia da J. Lingane sotto il nome di analisi coulombometrica. Il metodo è una diretta applicazione della legge di Faraday e consiste nella misura della quantità di corrente richiesta dalla riduzione (o dalla ossidazione) di una nota quantità di sostanza.

L'elettrolisi avviene su elettrodi di mercurio a larga superficie mantenuti a un potenziale costante ed opportunamente scelto in base alle caratteristiche presentate dal polarogramma della soluzione analizzata.

La superficie del mercurio e il liquido in esame (del volume di 50 ÷ 100 cc) vanno tenuti sotto costante agitazione.

Il potenziale catodico viene controllato potenziometricamente riferendolo all'elettrodo a calomelano standard.

La costanza del potenziale dell'elettrodo interessato nel processo in esame è mantenuta regolando la tensione applicata alla cella manualmente o con opportuni potenziostati, di cui esistono in commercio vari tipi sia a funzionamento meccanico che elettronico.

Come anodo si impiega abitualmente un elettrodo Ag/AgCl, collegato alla soluzione mediante un ponte salino ad agar-agar. Nel caso che la soluzione contenga ioni alogenidrici, l'anodo è costituito semplicemente da un filo d'argento immerso direttamente nel liquido in esame.

La quantità di corrente che passa nella cella è misurata generalmente con un coulombometro a gas tonante⁽³⁾. Per misure di piccole quantità di corrente si propongono microcoulombometri a gas tonante⁽⁴⁾, o una registrazione galvanometrica della curva corrente-tempo⁽¹⁾, o dispositivi elettronici⁽⁵⁾.

La misura coulombometrica non conosce tutte le limitazioni che rendono spesso inservibili gli altri metodi proposti al fine di calcolare la n .

Condizione necessaria e sufficiente, affinché il dato coulombometrico abbia pieno significato, è che il processo studiato segua realmente le leggi di Faraday, e non sia quindi un processo di natura catalitica o alterato nel suo andamento cinetico da processi secondari, per cui si abbiano reazioni chimiche fra sostanza di partenza e prodotti di riduzione, o i prodotti primari di riduzione non diano origine a sostanze a loro volta elettroliticamente attive al potenziale conferito all'elettrodo.

Data la sua vasta applicabilità, il procedimento di Lingane ha suscitato il più grande interesse nei ricercatori ed è apparsa una serie numerosa di

(3) J. J. LINGANE, *Coulometric analysis*. « J. Am. Chem. Soc. », 67, 1916-22 (1945).

(4) P. LANZA, *Un microcoulombometro a gas tonante*. « Suppl. alla Ricerca sci. », 77-9 (1952).

(5) S. BOGAN, L. MEITES, E. PETERS e J. M. STURTEVANT, *Millicoulometry. - I. Construction and Operation of an Apparatus for the Determination of Polarographic n -Values*. « J. Am. Chem. Soc. », 73, 1584 (1951).

lavori allo scopo di proporre perfezionamenti nelle varie tecniche richieste dalla misura (dispositivi potenziostatici e coulombometrici, celle, ecc.). Di particolare interesse sembrano le ricerche nel campo della microcoulombometria, tendenti a riportare nelle condizioni polarografiche il processo elettrolitico che nell'analisi coulombometrica avviene su grandi superfici di mercurio. L'eccessivo allontanamento dalle condizioni polarografiche è infatti l'obiezione più grave che la critica può sollevare al metodo originario di Lingane.

Costruendo diagrammi corrente-tensione con l'apparato coulombometrico di Lingane, non si ottengono, nelle usuali condizioni sperimentali gradini di diffusione, ma incrementi di corrente indefiniti una volta conferito all'elettrodo sufficiente tensione. Viene meno allora ogni possibilità di scorgere gradini di diffusione più o meno distinti e si passa così insensibilmente da un processo al successivo.

Ritenendo giustificata anche in queste condizioni l'ammissione che ad ogni potenziale definito e costante dell'elettrodo intervengano processi ben determinati, appare evidente l'impossibilità di un'analisi dettagliata dei singoli processi corrispondenti ai vari gradini non sempre decisamente sviluppati, a meno che non si disponga di un apparato potenziostatico di grande precisione.

Un altro aspetto fondamentale e assai spesso ignorato, che differenzia sostanzialmente l'elettrolisi coulombometrica realizzata su elettrodi a larga superficie e l'elettrolisi polarografica, è la modalità di agitazione: mentre in polarografia è affidata al moto lento e regolare della stessa goccia di mercurio, in coulombometria si usano agitatori meccanici che possono alterare profondamente il processo elettrolitico, trascinando via dall'elettrodo i prodotti intermedi all'elettrolisi.

Sorge quindi spontanea l'obiezione se sia sempre giustificato paragonare processi elettrochimici in atto sulla superficie del catodo a goccia di mercurio, piccolo, di forma regolare e simmetrica, completamente polarizzabile e continuamente rinnovata, con quelli che possono avvenire su superfici estese, non rinnovabili, anche se agitate, incompletamente polarizzabili, con superfici irregolarissime e quindi con densità di corrente variabile rapidamente da punto a punto.

La microcoulombometria polarografica risolve il problema, mettendosi quindi al riparo da queste obiezioni, attuando l'elettrolisi su elettrodi a goccia in condizioni assolutamente polarografiche, compensando l'esiguità della riduzione con l'uso di piccoli volumi di soluzione, in modo che la trasformazione di piccole quantità di sostanza porti a sensibili variazioni di concentrazione ⁽⁶⁾.

In queste condizioni la cella è alimentata direttamente dal polarografo al potenziale opportuno, non richiede quindi l'uso di potenziostati di sorta.

(6) E. VECCHI, *Determinazione delle grandezze polarografiche n e D mediante microcoulombometria parziale*. «Atti Ist. Veneto sci.», parte 2, 107, 11 (1949).

e la quantità di corrente può essere registrata direttamente dallo stesso polarografo con diagrammi corrente/tempo eliminando così anche la necessità di speciali microcoulombometri.

Con il procedimento microcoulombometrico il problema della valutazione di n si può ritenere risolto per la maggioranza dei casi con una tecnica elegante e precisa ed una grande semplicità di mezzi.

Tutti i metodi citati, per la determinazione coulombometrica di n in un processo di riduzione polarografico, sono basati sulla misura della quantità di corrente necessaria alla riduzione di una definita quantità di sostanza. Il metodo da noi utilizzato, già proposto da G. A. Gilbert e E. K. Rideal⁽⁷⁾, prende in esame invece la velocità di variazione dell'altezza di un gradino polarografico nel corso di una riduzione elettrolitica a potenziale controllato.

Il numero di mole ridotte con un processo a valenza n da una corrente i nel tempo dt è dato da:

$$dq = \frac{i}{nF} dt.$$

Se v è il volume della soluzione elettrolitica, la corrispondente variazione di concentrazione dc , essendo $dq = -vdc$, sarà dato da:

$$dc = -\frac{i}{nvF} dt.$$

In condizioni di corrente di diffusione $i = i_d = kc$; possiamo quindi scrivere:

$$dc = -\frac{kc}{vnF} dt,$$

e, con successive trasformazioni:

$$(3) \quad \frac{di_d}{k} = -\frac{i_d}{vnF} dt \quad , \quad d \ln i_d = -\frac{k}{nvF} dt$$

da cui

$$(4) \quad n = -\frac{k}{vF} \frac{dt}{d \ln i_d} = -\frac{i_d}{2,303 c F v} \frac{dt}{d \log i_d}.$$

Conglobando in una le costanti ed esprimendo il volume in cm^3 si ottiene l'equazione di uso pratico:

$$(5) \quad n = -\frac{i_d}{2,303 \cdot 96500 \cdot 10^{-3} \cdot c \cdot v} \frac{dt}{d \lg i_d} = -\frac{i_d}{222 \cdot c \cdot v} \frac{dt}{d \lg i_d}^{(8)},$$

in cui t è espresso in secondi, c in mol./litro.

(7) G. A. GILBERT e E. K. RIDEAL, *Direct Estimation of the Electrons involved in Polarographic Reduction*. «Trans.», 47, 396 (1951).

(8) i_d è naturalmente l'intensità della corrente di diffusione in Ampères corrispondente alla concentrazione c mol./litro.

Essendo nota la concentrazione della soluzione esaminata, si introduce in (5) il valore della corrente al tempo $t = 0$.

È importante ricordare che la i_d misurata nel diagramma sperimentale deve essere corretta per il valore della concentrazione i_r , che può essere anche notevole con capillari a più goccie. La i_r si ottiene da un polarogramma della soluzione base, usando lo stesso capillare a parità di ogni altra condizione sperimentale.

Secondo gli Autori sopra citati il metodo può essere impiegato solo nel caso che la sostanza non venga riossidata nel corso dell'elettrolisi al composto originale e che i prodotti di riduzione non reagiscano con quelli iniziali o diano a loro volta gradini polarografici a potenziali meno negativi di quelli ai quali si effettua la coulombometria.

Scopo di questo lavoro è appunto quello di indicare un procedimento col quale si possa determinare la n anche in sistemi che presentano queste anomalie.

Dalla integrazione della (3) risulta che $\ln i_d$ e t sono collegati da una relazione lineare; se però subentrano le complicazioni sopra indicate, dovute all'alterazione della cinetica del processo, a causa del prodotto dell'elettrolisi, si osserva una graduale variazione di k e si ha corrispondentemente una diversa relazione tra $\ln i_d$ e t . Di conseguenza nel diagramma $\lg i_d/t$ si otterranno curve anziché rette, ma sarà comunque facile per estrapolazione grafica risalire al valore di $dt/d \lg i_d$ per $t = 0$. In tale momento i prodotti di riduzione non possono influire, in quanto assenti, e sarà quindi possibile determinare la valenza del processo polarografico sostituendo nella (5) i valori della derivata calcolata al tempo zero.

Mediante questo procedimento grafico, è possibile riferire il calcolo di n ad una elettrolisi ideale, svolgentesi in una soluzione costantemente esente da prodotti di riduzione, capaci di alterare il bilancio coulombometrico del processo.

In queste condizioni, l'elettrolisi coulombometrica si potrà confrontare con maggior tranquillità con l'elettrolisi polarografica, che non è caratterizzata solo dalle particolari caratteristiche geometriche degli elettrodi e dalle modalità dell'agitazione, ma anche, ed in modo essenziale, dal fatto che in polarografia l'elettrodo a goccia agisce sempre in una soluzione fresca e, normalmente, non si riscontrano fenomeni dovuti all'accumulo di prodotti di elettrolisi attivi.

Concludendo, la coulombometria sarà in grado di fornire il valore di n del processo corrispondente al gradino polarografico con tanta maggiore approssimazione quanto più essa si svolgerà in condizioni polarografiche. Per lo studio di processi non complicati da effetti secondari dovuti all'arricchimento di prodotti elettrolitici attivi, sarà generalmente sufficiente riportarsi alle condizioni geometriche e meccaniche polarografiche, altrimenti influirà come fattore determinante il parametro tempo e sarà necessario ricorrere a opportuni artifici di estrapolazione grafica.

In una prossima Nota si illustreranno alcune applicazioni del metodo proposto.

Fisiologia. — *Effetti della nicotinamide sul decorso del beriberi sperimentale del Colombo* ^(*). Nota di MARIA NOBILE e GIUSEPPE ALIBRANDI, presentata ^(**) dal Socio C. CIACCIO.

Si ammette comunemente che tra le varie vitamine del gruppo B esistono rapporti di equilibrio sì che all'eccessiva somministrazione di uno di questi fattori possano seguire fenomeni di carenza di uno o più altri di essi.

Nell'Uomo Malaguzzi-Valeri e Conese hanno stabilito come ad una eccessiva somministrazione di nicotinamide segua una maggiore eliminazione urinaria di tiamina ⁽¹⁾.

Si potrebbe pensare che la nicotinamide si comporti, ad alte dosi, e almeno in alcuni organismi, come una vera e propria antivitamina nei riguardi della tiamina. Di questo fatto però pare che manchi una chiara prova sperimentale. Questa prova abbiamo appunto cercato di dare con le ricerche di cui qui riassumiamo i risultati.

Come « test » biologico abbiamo scelto il Colombo per la sua nota grande sensibilità alla avitaminosi B¹. Si cercò dapprima di determinare un beriberi acutissimo mediante dosi elevatissime di nicotinamide. Per tale via si riuscì a provocare negli animali gravissimi disturbi neuromuscolari ed anche la morte, ma questi fenomeni non potevano essere attribuiti ad una acuta detiaminizzazione in quanto la tiamina non riusciva a modificarli in senso utile.

Successivamente si cominciò a saggiare l'azione di elevate dosi di nicotinamide per via orale in piccioni sottoposti ad esclusiva alimentazione oriziana. Questo secondo gruppo di esperienze dimostrò che la nicotinamide, a dosi assai elevate, ma incapaci di provocare *per os* effetti tossici acuti, non accelerava la comparsa dei sintomi del beriberi oriziano che si manifestarono praticamente dopo un eguale lasso di tempo tanto negli animali nicotinamizzati che nei controlli. Anche questo secondo gruppo di esperienze faceva pensare che nel Colombo la nicotinamide non svolge azione antitiaminica; però erano da tenere presenti alcune recenti osservazioni di Feigelson e collaboratori ⁽²⁾ che dimostrano come, almeno *in vitro*, la nicotinamide a dosi elevate è capace di opporsi all'azione enzimatica del D.P.N. Il blocco di un importante sistema enzimatico ingranante nel metabolismo dei glicidi potrebbe, riducendo la utilizzazione di questi, ridurre anche il fabbisogno di tiamina e falsare pertanto il significato dei risultati ora esposti.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia generale dell'Università di Messina.

(**) Nella seduta del 13 dicembre 1952.

(1) C. MALAGUZZI-VALERI e G. CONESE, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », 20, 613 (1945).

(2) FEIGELSON e collaboratori, « Biol. Chem. », 189, 361 (1951).

Un terzo gruppo di esperienze si credette perciò necessario condurre allo scopo di escludere questa possibile causa di errore. Colombi vennero alimentati con riso brillato a cui venivano aggiunte dosi relativamente basse di nicotinamide (da 5 a 10 mg) ma tali da rappresentare sempre quantità fortissime nei riguardi della tiamina, assente praticamente del tutto in tale tipo di alimentazione.

Questo ultimo gruppo di esperienze dimostrò chiaramente che neanche in queste condizioni la nicotinamide è capace di svolgere azione antitiaminica poiché anche questa volta i fenomeni beriberici insorsero quasi nello stesso tempo tanto negli animali trattati che nei controlli.

Possiamo pertanto concludere che nel colombo la nicotinamide non è capace di svolgere azione antitiaminica.

Fisiologia. — *Ulteriori osservazioni sugli effetti della deionizzazione del calcio a livello dei centri sensitivo-motori della corteccia cerebrale del cane*^(*). Nota di GIUSEPPE ALIBRANDI e VITTORIO ROVATI, presentata^(**) dal Socio C. CIACCIO.

È noto come un adeguato grado di deionizzazione del calcio sia capace di prolungare la durata della scarica di impulsi cellulifughi a livello dei neuroni centrali⁽¹⁾ ⁽²⁾. Conseguenza diretta di tale abnorme prolungamento sono da considerarsi gli effetti che l'applicazione locale di alcune sostanze chimiche in corrispondenza dei centri sensitivo-motori della corteccia cerebrale del cane è capace di produrre.

Sabbatani⁽³⁾ ha dimostrato l'effetto epilettogeno di varie sostanze deionizzanti il calcio.

Bonnet e Monnier⁽⁴⁾ studiando l'azione dei «decalcificanti» sulla autoritmicità dei neuroni spinali hanno osservato notevoli differenze tra gli effetti prodotti dai fosfati e quelli prodotti dal citrato e dall'ossalato di sodio.

Il Beccari⁽²⁾ sostiene che i fosfati di sodio, pure agendo essenzialmente come sostanze «decalcificanti», producono anche effetti che non dipendono dalla «decalcificazione» in quanto non sono soppressi dalla aggiunta di un sale di calcio assai ionizzabile quale il cloruro.

Nel 1949 A. Alibrandi⁽⁴⁾, mediante l'impiego di adeguate soluzioni di fosfati, ha ottenuto dei risultati che facevano concludere che il noto feno-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia generale dell'Università di Messina.

(**) Nella seduta del 13 dicembre 1952.

(1) BONNET, MONNIER, «Arch. Int. Physiol.», 55, 27 (1947).

(2) E. BECCARI, «Boll. Soc. it. Biol. Sper.», 24, 141 (1948).

(3) L. SABBATANI, «Mem. R. Ac. Sc. Torino», 54, 477 (1903).

(4) A. ALIBRANDI, «Arch. Fisiol.», 49, 105 (1949).

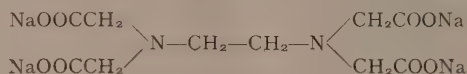
meno della disposizione verso la epilessia sperimentale riflessa dipenda essenzialmente da una aumentata durata della scarica degli impulsi cellulifughi a livello dei neuroni centrali.

Questi risultati non escludevano però del tutto che l'aumentata concentrazione di questi fisiologici componenti dell'organismo agisse pure attraverso qualche altro meccanismo.

Volendo tener conto delle osservazioni del Beccari sugli effetti dei fosfati sul midollo spinale della rana, ci sembrò opportuno ripetere le esperienze condotte da A. Alibrandi sostituendo ai fosfati un nuovo reattivo « decalcificante » che a differenza dei fosfati non fosse fisiologicamente presente nei liquidi organici e nei tessuti e non rappresentasse comunque una sostanza metabolizzabile.

A tale scopo abbiamo scelto come calcio-deionizzante il sale sodico dell'acido etilendiaminotetracetico ⁽⁵⁾ ⁽⁶⁾.

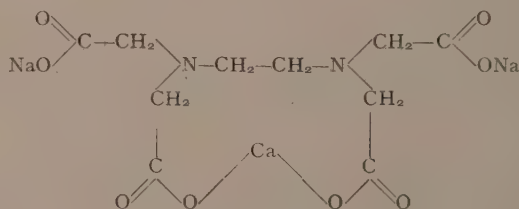
La struttura chimica di questo composto può così rappresentarsi:



Esso è assai solubile e ionizzabile, ed è capace di reagire, entro valori di pH compresi in una larga zona, con numerosi metalli formando ioni complessi solubili.

Per questa sua proprietà di mascherare ioni metallici il sale sodico dell'acido etilendiaminotetracetico trova ormai da parecchi anni applicazioni sempre più vaste.

Tra i metalli che questa sostanza è capace di deionizzare, a un valore di pH compreso fra 6,5 e 8,65, formando composti ciononostante solubili, vi è anche il calcio



A questa reazione col calcio vanno soprattutto riferiti tanto gli effetti fisiologici quanto la sua tossicità che si manifesta appunto con i caratteristici sintomi di una tetania ipocalcémica ⁽⁷⁾ ⁽⁸⁾.

(5) G. SCHWARZENBACH, H. ACHERMAN, « *Helv. Chem. Act.* », 30, 1798 (1949).

(6) A. MARTELL, R. PLUMB, F. BERSWORTH, « *Bull. of Bersworth Chem. Co. Framingham* », 1949.

(7) M. RUBIN, Comunicazione personale.

(8) Che la tossicità sia legata alla sua capacità di legarsi agli ioni calcio è dimostrato dal fatto che la somministrazione del composto calcico preformato è praticamente

La dose letale per somministrazione endovenosa si aggira nel coniglio intorno ai 100 mg/Kg. Se la somministrazione è fatta in maniera assai lenta, gli animali possono trovare un fisiologico antidoto a questo farmaco, mobilitando la loro riserva di calcio e dimostrarsi così capaci di tollerarne altissime dosi totali senza manifestazioni tossiche.

Con questa sostanza è stato già possibile ottenere alcuni dati interessanti per il fisiologo. S'è visto, ad esempio, che le varie specie animali mobilitano il calcio con una rapidità che può essere diversa da specie a specie.

TECNICA SPERIMENTALE E RISULTATI. — Abbiamo adoperato la stessa tecnica sperimentale descritta nel succitato lavoro di A. Alibrandi.

La sostanza venne applicata, sia come tale sia sotto forma di soluzioni isotoniche e isoidrogenioniche, sui centri sensitivo-motori del cane previamente identificati mediante stimolazione faradica unipolare.

La soluzione veniva applicata facendo uso di batuffolini di ovatta e la applicazione ripetuta circa ogni 5'. Dopo un tempo mai inferiore ai 45' si notava dapprima la comparsa di iperestesia a livello della zona cutanea riflessogena corrispondente al centro così trattato, successivamente insorgevano contrazioni tonico-cloniche da principio localizzate al gruppo muscolare corrispondente al centro trattato e quindi generalizzate a tutta la muscolatura dell'animale, con la consueta progressione ai gruppi muscolari vicini dapprima di un lato e poi dell'altro.

Lasciando agire le soluzioni isotoniche e isoidrogenioniche del sale sodico dell'acido etilendiaminotetracetico per un tempo minore sulla corteccia di cani spontaneamente non predisposti verso l'epilessia sperimentale riflessa si poteva osservare, analogamente a quanto avviene per le soluzioni isotoniche ed isoidrogenioniche di fosfati di sodio, la comparsa di un artificiale stato di disposizione.

Si potevano ottenere in tal guisa, adoperando la classica tecnica di Aman-tea, accessi epilettiformi in via riflessa.

Riportiamo due dei nostri protocolli sperimentali riferentisi rispettivamente ad un cane predisposto e ad uno non predisposto verso l'epilessia sperimentale riflessa.

Cane maschio del peso di Kg. 15. — Operato di craniectomia sinistra in una precedente seduta e risultato nettamente predisposto verso l'epilessia riflessa. Si scopre la zona sigmoidea dell'emisfero destro. Si localizza il centro corrispondente al muscolo orbicolare palpebrale sinistro.

priva di tossicità. Il sale calcico dell'acido etilendiaminotetracetico è ben solubile, a differenza di quanto generalmente accade coi prodotti di reazione dei comuni agenti «decalcificanti». Questa grande solubilità del sale calcico dell'acido etilendiaminotetracetico costituisce uno dei motivi determinanti la scelta dell'agente calcio-deionizzante adoperato nelle presenti ricerche.

Dieci minuti dopo l'ultima applicazione di corrente faradica sulla corteccia si comincia ad applicare la soluzione di sale sodico dell'acido etilendiaminotetracetico a mezzo di batuffolini di ovatta rinnovati ogni 5'.

Le applicazioni vengono protratte per 55' mentre si procede periodicamente alla stimolazione della zona riflessogena del centro.

Dopo 10 applicazioni appare clono del M. orbicolare seguito da un accesso generalizzato e completo della durata circa di 3'.

Dopo 9' comparsa di un secondo accesso epilettiforme con partenza sempre dal muscolo orbicolare. Si susseguono violenti attacchi apparentemente spontanei con partenza sempre dal muscolo orbicolare sul cui centro era stato applicato il sale sodico dell'acido etilendiaminotetracetico.

Cane maschio del peso di 19 Kg. - Operato di craniectomia sinistra in una precedente seduta ed esplorato in corrispondenza del centro del muscolo orbicolare palpebrale e risultato chiaramente non predisposto verso la epilessia sperimentale riflessa. Si scopre la zona sigmoidea destra e si identifica il centro dei muscoli estensori delle dita dell'arto anteriore sinistro. Dopo 5' dall'ultima stimolazione faradica si applica la soluzione di sale sodico dell'acido etilendiaminotetracetico a mezzo di batuffolini di ovatta.

L'applicazione si rinnova ogni 5' e viene ripetuta cinque volte.

Si toglie l'ultimo batuffolino con acido etilendiaminotetracetico e si stricninizza il centro per mezzo di un dischetto di carta bibula di 2 mm di diametro previamente immerso in una soluzione di stricnina (nitrato) all'1 %.

Si stimola la zona riflessogena con le punte di una pinza anatomica.

Dopo 3' comparsa del clono dei muscoli estensori delle dita dell'arto anteriore sinistro. Le scosse tendono a fondersi e con l'insistere della stimolazione cutanea sfociano in un accesso epilettiforme generalizzato e completo della durata di 2'. Seguono ad intervalli sempre più ravvicinati attacchi spontanei di epilessia.

I risultati delle presenti ricerche fanno concludere che una sostanza tipicamente «decalcificante» quale il sale sodico dell'acido etilendiaminotetracetico si comporta a livello dei centri sensitivo-motori della corteccia cerebrale del cane esattamente come i fosfati e che quindi l'azione epilettogena di questi è dovuta, appunto come già aveva sostenuto il Sabbatani, esclusivamente alla loro azione «decalcificante».

Pertanto, secondo quanto già aveva affermato A. Alibrandi, è da concludere che l'attività epilettogena dei fosfati è in dipendenza della aumentata intensità dell'effetto postumo degli eccitamenti afferenti e che nessuna sensibile azione epilettogena è svolta dai fosfati in quanto essenziali fattori del metabolismo dei neuroni centrali.

Biologia (Biochimica). — *Sulla presenza di acido citrico nelle strutture animali calcificate* (*). Nota di PAOLO BUFFA, presentata (**)
dal Socio G. VERNONI.

A quanto ci risulta l'acido citrico è stato trovato in tutte le strutture animali calcificate finora analizzate. Nella tabella I sono riassunti i dati da noi trovati in letteratura ed alcuni risultati in nostro possesso [6], ma non pubblicati.

TABELLA I.

Struttura calcificata	Acido citrico µg/g di materiale	Riferimenti bibliografici
Tessuto osseo:		
<i>Mammiferi</i>		
Uomo	8900-18800	[3]
Cane, Gatto, Bue, Pecora, Ratto	2720-14200	[1], [2], [4], [5]
<i>Uccelli</i>		
<i>Larus ridibundus</i>	1570-26700	[3]
<i>Anfibi</i>		
Rana	820-2900	[3], [6]
<i>Pesci</i>		
Teleostei	16000-52500	[3]
Selaci	378	[6]
Guscio dell'uovo di uccelli	300-1500	[2], [7], [6]
Pelle del pescecane	970	[6]
Carapace di <i>Carcinus</i>	381	[6]
Gastroliti del gambero	8100	[8]
Conchiglia interna della sepià	1230	[8]
Conchiglia interna del calamaro	455	[6]
Calcificazioni patologiche umane	1530-10530	[9]

(*) Dal Centro di Studio per la Fisiopatologia del C.N.R. presso l'Istituto di Patologia Generale dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta del 13 dicembre 1952.

TABELLA II.

MATERIALE	Acido citrico µg/g di materiale
PORIFERI	
Spugna calcarea (specie non identificata):	
Frammenti di colonie [1]	55 *
CELEENTERATI	
<i>Corallium rubrum</i>	
Alcuni rametti [1]	Zero
<i>Astroides calycularis</i>	
Materiale di raschiamento della colonia [1]	38 *
ANELLIDI	
<i>Protula tubularia</i>	
Frammento di tubo calcareo [1]	15 *
ARTROPODI	
Crostacei cirripedi:	
<i>Balanus</i>	
Piastre calcificate provenienti da diversi individui [3] . . .	20 *
Crostacei decapodi:	
<i>Maja verrucosa</i>	
Carapace [3]	31
MOLLUSCHI	
Gasteropodi:	
<i>Columbella rustica</i>	
Conchiglia [3]	25
<i>Murex trunculus</i>	
Conchiglia [3]	Tracce ?
Lamellibranchi:	
<i>Mytilus gallo-provincialis</i>	
Valve di diversi individui [3]	Tracce ?
ECHINODERMI	
<i>Sphaerechinus granularis</i>	
Aculei [3]	37
Scheletro [3]	22 *
Lanterna di Aristotele [3]	20 *
VERTEBRATI	
Pesci, Selaci:	
<i>Scylliorhinus caniculus</i>	
Pelle [1]	1170
Scheletro cranico [1]	74
<i>Torpedo marmorata</i>	
Tessuto cartilagineo scheletrico [1]	496
<i>Torpedo ocellata</i>	
Tessuto cartilagineo scheletrico [1]	840
Teleostei:	
<i>Blennius sanguinolentus</i>	
Scheletro cranico di due animali [1]	4000

Tra parentesi quadre: numero di campioni analizzati. I valori seguiti da asterisco sono stati ottenuti al limite di sensibilità del metodo e l'errore può essere elevato.

Da questi dati appare, tra l'altro, 1° che il materiale studiato è assai disparato e che comprende strutture di significato biologico molto diverso, come il tessuto osseo, il guscio dell'uovo degli uccelli, i gastroliti del gambero ecc.; 2° che il contenuto di acido citrico oscilla entro limiti molto ampi non solo tra i vari materiali, ma anche nelle strutture del medesimo tipo provenienti da individui diversi; 3° che non è stata fatta ancora un'indagine sistematica su materiale proveniente da individui rappresentanti i vari Tipi animali. Noi abbiamo voluto portare un contributo in questo senso e nella presente Nota si comunicano i risultati dell'analisi di un certo numero di strutture calcificate di vario significato provenienti da specie marine rappresentative di diversi gruppi della scala zoologica.

MATERIALE E TECNICA. — Il materiale è stato raccolto alla Stazione Zoologica di Napoli. Le strutture calcificate, provenienti da animali vivi, erano liberate per quanto possibile dai tessuti molli, parzialmente asciugate all'aria o in termostato a 37° C, pesate e macinate con sabbia e acido tricloroacetico in mortaio. L'ac. tricloroacetico era all'8 %, ma quando il calcio era molto abbondante si usava più concentrato fino al 20 % (p/v). Il peso dei campioni era compreso tra 0,3 e 3 g. Per il resto della titolazione dell'ac. citrico si è seguita la tecnica descritta in [9]. I risultati sono espressi in μg di ac. citrico anidro per g di materiale.

RISULTATI. — I risultati sono raggruppati nella tabella II.

Questi risultati si dividono in due categorie: mentre le strutture provenienti da Invertebrati contengono piccolissime quantità di ac. citrico e in un caso, nel *Corallium rubrum*, esso manca totalmente, quelle provenienti da Vertebrati ne contengono quantità notevoli. Tra questi ultimi risultati quelli sul pescecane e sul *Blennius sanguinolentus* confermano i risultati già noti o comunque riportati nella tabella I; quelli sul tessuto cartilagineo scheletrico delle torpedini invece sono nuovi e presentano un certo interesse poiché si trattava di cartilagine contenente una notevole quantità di calcio e che, all'esame istologico, presentava modificazioni paragonabili a quelle che in altri animali preludono alla ossificazione.

I bassissimi valori ottenuti sulle strutture provenienti da Invertebrati richiedono qualche commento. Il fatto che altre formazioni calcificate di Invertebrati, come i gastroliti del gambero, la conchiglia interna della seppia ecc. (ved. la tabella I) contengano notevoli quantità di ac. citrico, porta ad escludere una associazione tra il basso contenuto di questo acido e la posizione nella scala zoologica degli animali da cui proviene il materiale analizzato. Crediamo che possa anche escludersi un rapporto tra il contenuto di ac. citrico della struttura calcificata ed il contatto di questa con l'acqua; infatti la pelle del pescecane, il carapace del granchio, la conchiglia di gastropodi ecc. pur essendo a continuo contatto con l'acqua contengono quantità di ac. citrico molto diverse. E anche è da escludersi un rapporto tra la quantità del calcio nella formazione calcificata e quello dell'ac. citrico, mentre occorrono ulteriori studi per decidere se esista una relazione tra la concentrazione di questo acido e quella del fosfato inorganico, nonché con la quan-

tità di materiale proteico. Quest'ultimo punto è di particolare interesse dato che nei Crostacei è stato trovato che l'entità della calcificazione dell'esoscheletro è in proporzione inversa al contenuto proteico della cuticola (M. Lafon, citato da Gleen Richards [10]). In rapporto a questo fatto assumono speciale significato i risultati ottenuti sul carapace di *Carcinus* (381 $\mu\text{g/g}$) e quello di *Maja verrucosa* (31 $\mu\text{g/g}$) che, negli esemplari da noi analizzati, erano rispettivamente poco e molto calcificati.

Il fatto che nelle strutture calcificate si trovi ac. citrico è meno sorprendente di quanto si potrebbe pensare quando si ricordi che tale acido è uno dei componenti del ciclo degli acidi tricarbossilici [11] e che questo meccanismo biochimico cellulare fondamentale è universalmente distribuito nei tessuti animali, come hanno dimostrato gli studi recenti [12]. Pertanto il problema consiste nello stabilire se l'ac. citrico partecipi attivamente al processo della calcificazione oppure se esso sia un costituente accidentale delle strutture calcificate.

Per le strutture ad alto contenuto di ac. citrico, come ad esempio il tessuto osseo, rimane difficile ammettere che esso non intervenga attivamente nella calcificazione. Infatti certi studi sul rachitismo nel ratto [5] e sul metabolismo dell'ac. citrico nell'osso [13] indicano che questo acido organico partecipa al complesso fenomeno della calcificazione. Invece i bassi valori da noi trovati in un certo numero di strutture calcificate di Invertebrati a nostro avviso indicano che, almeno nei casi studiati, è assai probabile che l'ac. citrico sia un costituente accidentale, a meno che addirittura esso si trovi non nel materiale calcificato, ma in quello organico ad esso costantemente commisto. La totale assenza di ac. citrico in *Corallium rubrum*, in cui il residuo insolubile in ac. tricloroacetico era praticamente nullo, è a questo riguardo significativa.

Ringrazio vivamente il prof. R. Dohrn. Direttore della Stazione Zoologica di Napoli per la gentile ospitalità accordatami. Sono anche molto grato al prof. G. Bacci ed al dott. B. Battaglia per la collaborazione e l'aiuto.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] F. DICKENS, «Chem. and Ind.», 59, 135 (1940).
- [2] F. DICKENS, «Biochem. J.», 35, 1011 (1941).
- [3] T. THUNBERG, «Acta physiol. scand.», 15, 38 (1948).
- [4] R. N. CLASS e A. H. SMITH, «J. biol. Chem.», 151, 363 (1943).
- [5] R. NICOLAYSEN e R. NORDBØ, «Acta physiol. scand.», 5, 212 (1943).
- [6] P. BUFFA e R. A. PETERS, esperimenti eseguiti al Marine Biological Laboratory, Plymouth (Gran Bretagna), nel 1949 e non pubblicati.
- [7] T. THUNBERG, «Acta physiol. scand.», 17, 83 (1949).
- [8] T. THUNBERG, «Acta physiol. scand.», 18, 157 (1949).
- [9] P. BUFFA, «Rend. Acc. Naz. Lincei», vol. XII, fasc. 3, p. 356 (1952).

- [10] GLEEN RICHARDS, *The Integument of Arthropods*, p. 100, Minneapolis 1951.
- [11] Inoltre è probabilmente significativo il fatto che dei tre più noti acidi tricarbossilici del ciclo, l'ac. citrico, il *cis*-aconitico e l'*iso*-citrico (l'ac. ossalosuccinico è ancora relativamente poco conosciuto), il primo è quello che di gran lunga prevale su gli altri. Infatti all'equilibrio, regolato dall'enzima aconitasi,



questi tre acidi si trovano nella proporzione rispettivamente dell'89,2 %, 3,1 % e 7,7 % [C. MARTIUS e H. LEONHARDT, «Z. physiol. Chem.», 278, 208 (1943)] e pertanto qualsiasi inibizione del ciclo a livello dell'aconitasi o del successivo enzima, la isocitrico-deidrogenasi, causa un accumulo di acido citrico.

- [12] Vedi il *Symposium sur le Cycle Tricarboxylique*, II^e Congrès International de Biochimie, Paris 1952.
- [13] T. F. DIXON e H. R. PERKINS, «Biochem. J.», 52, 260 (1952).

CONGRESSI

Congressi internazionali. — *Relazione^(*) sul colloquio scientifico internazionale tenuto a Madrid dal 14 al 20 novembre 1952 in occasione del 1° centenario della nascita di Santiago Ramon y Cajal del Socio GIUSEPPE LEVI.*

«L'Accademia dei Lincei, alla quale Ramon y Cajal appartenne quale Socio straniero per quasi un trentennio, era stata invitata ad aderire a questa solenne manifestazione. Il nostro Presidente delegò il collega Nello Beccari e me a rappresentare l'Accademia, anche per la considerazione che eravamo stati invitati a partecipare con relazioni scientifiche al colloquio. Il prof. Beccari trattenuto in Italia da altri impegni non poté intervenire. Presentarono relazioni vari eminenti cultori di fisiologia, di istologia normale e patologica del sistema nervoso. Ricorderò tra gli intervenuti E. D. Adrian, Presidente della Royal Society, Heymans di Gand (l'uno e l'altro premi Nobel per la Fisiologia), R. Granit delegato dall'Accademia delle Scienze di Svezia, Bremer di Bruxelles, J. Boeke dell'Accademia delle Scienze di Amsterdam, Celestino da Costa di Lisbona, Monnier e Fessard di Parigi. Di italiani era presente il prof. Gozzano di Roma.

Il comitato organizzatore del colloquio era presieduto dal Rettore della Università di Madrid Pedro Lain Entralgo, ne facevano parte varie personalità accademiche; l'organizzazione scientifica si deve agli allievi di Cajal, tra i quali vanno ricordati particolarmente il prof. Fernando De Castro e Francisco Tello.

Il comitato si era proposto di onorare la memoria di Ramon y Cajal nel modo più nobile, col porre in luce quale profonda traccia abbia lasciato

(*) Svolta nella seduta del 13 dicembre 1952.

in tutti i rami della Neurologia la teoria del neurone, la quale è opera essenzialmente di Cajal.

Il giorno 18 si tenne una riunione solenne della Reale Accademia delle Scienze di Madrid, sotto la presidenza di J. Cesares Gil, alla quale i rappresentanti delle varie Accademie e istituzioni scientifiche ricordarono brevemente l'influenza che l'opera scientifica di Cajal ebbe sul progresso della Neurologia ».

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente comunica alla Classe la dolorosa notizia della morte dei Soci Nazionali proff. Gino Fano, Gaetano Rovereto e Francesco Vercelli, deceduti rispettivamente l'8, il 23 e il 24 novembre del corrente anno e ricorda che Gino Fano, della Categoria I, Sezione Matematica, Professore emerito dell'Università di Torino, fu allievo del compianto Presidente Guido Castelnuovo ed era stato incaricato dal Consiglio di Presidenza di tenere la commemorazione del Presidente stesso. Egli accettò l'incarico al quale si dedicò con il più grande entusiasmo e predispose il testo della commemorazione che terminò e rilesse due volte ad alta voce, per regolarsi circa il tempo necessario, proprio nello stesso giorno nel quale doveva coglierlo la morte. Il prof. Giordani invia quindi un reverente pensiero alla Sua memoria e a quella dei Colleghi Gaetano Rovereto, della Categoria IV, Sezione Geologia e Paleontologia, già esimio professore di Geologia nell'Università di Genova e Francesco Vercelli, della Categoria II, Sezione Geodesia e Geofisica, Direttore dell'Istituto Talassografico di Trieste, i cui alti meriti furono pari alla grande modestia. I predetti Soci saranno commemorati nelle prossime sedute dell'Accademia.

Il Presidente informa i Colleghi che, oltre al Socio Straniero Chain che spesso partecipa alle sedute della Classe, sono presenti oggi anche i Soci Stranieri proff. von Karman e Pérès e il prof. Roy, che si trovano a Roma per la Seconda Sessione dell'Advisory Group For Aeronautical Research and Development.

È anche presente il Premio Nobel prof. Blackett, che si tratterrà a Roma per qualche tempo per collaborare con i Fisici di questa Università.

A tutti gli illustri ospiti il prof. Giordani porge un caldo saluto che estende anche al Collega Luigi Crocco, presente alla seduta, reduce da Princeton, ove presto ritornerà per attendere alle sue importanti ricerche.

PLICHI SUGGELLATI

Il Presidente presenta un plico suggellato della sig.na Amabilia Baldantoni, pervenuto all'Accademia in data 9 dicembre 1952 e un altro del sig. Domenico Frascatani, pervenuto all'Accademia il 12 dello stesso mese. La Classe, constatata l'integrità dei sigilli, delibera che i due plichi siano tenuti, a disposizione degli interessati, nell'archivio accademico.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente, riferendosi all'iniziativa presa dal Consiglio Nazionale delle Ricerche, d'intesa con il Ministero della Pubblica Istruzione, per rendere possibile a un certo numero di professori universitari di dedicarsi interamente allo studio e alla ricerca, liberandoli almeno temporaneamente, da una parte delle loro funzioni didattiche, previa designazione da parte dell'Accademia, e per essa della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, di una terna di candidati, per ogni triennio e per ciascun comando, comunica che il Consiglio Nazionale delle Ricerche, dopo la prima realizzazione di tale iniziativa con la designazione del prof. Gilberto Bernardini, ha richiesto all'Accademia di designare una terna di candidati tra i quali sarà prescelto il professore da comandare per la ricerca scientifica sull'argomento: « Il fenomeno della turbolenza nei moti fluidi ipersonici ».

Il Presidente ha ritenuto opportuno pregare i Colleghi della Sezione Meccanica, particolarmente interessata, di studiare la questione e di presentare alla Classe proposte in merito. Chiede pertanto alla Classe se voglia ascoltare tali proposte o se preferisca rinviare la questione alla prossima seduta. Poichè la Classe, ad unanimità, decide di esaminare subito l'argomento, il prof. Giordani invita il Collega Panetti a comunicare le proposte formulate dalla Sezione.

Il predetto Collega dà lettura di una relazione con la quale si propone la seguente terna, composta di due soli nomi:

- 1) CARLO FERRARI.
- 2) LUIGI CROCCO.
- 3)

Messa ai voti, la terna è approvata all'unanimità.

Il Presidente informa che l'Accademia è stata invitata dall'Azienda Autonoma per la Stazione di Turismo di Siracusa a designare suoi rappresentanti in seno alla Commissione giudicatrice dei Premi Siracusa per il 1952 che comprendono: il Premio Internazionale delle Scienze Archimede di 2.000.000 e il Premio delle Scienze Eurialo di L. 500.000, destinato questo ultimo a un siciliano.

Il Presidente, dopo aver ricordato che anche nell'anno 1951-52 l'Accademia fu invitata a designare rappresentanti nella giuria del Premio Siracusa 1951 di L. 500.000 e che aderì a tale richiesta designando i Soci Signorini, Bompiani e Carrelli, mentre la presidenza della Commissione fu assunta dal compianto Senatore Castelnovo, mette in evidenza che il Premio non fu assegnato, non essendo stata giudicata degna del Premio stesso alcuna delle poche opere che parteciparono al concorso.

Il prof. Giordani ricorda ancora che la Presidenza dell'Accademia ha richiesto insistentemente all'Ente organizzatore dei Premi per il 1952 che l'Accademia disponesse nella giuria di un numero di rappresentanti adeguato al suo carattere nazionale e alle responsabilità che essa si assume nel-

l'assegnazione del Premio, intervenendo ufficialmente nella giuria. Come conclusione di tali trattative è stato proposto all'Accademia di designare due Soci Nazionali e due studiosi stranieri che possono anche essere Soci Stranieri.

Il Presidente invita la Classe a decidere se l'Accademia debba accettare l'invito alle condizioni sopra descritte.

Dopo lunga discussione, alla quale partecipano i Soci Armellini, Dore, Signorini, Meneghetti, Cassinis, Panichi, M. G. Levi, Bompiani e dopo altri chiarimenti dati dal Presidente che interviene nella discussione, la Classe, a grande maggioranza, delibera che l'Accademia possa accettare l'invito a designare per la giuria dei Premi Siracusa 1952 due Soci Nazionali e due Soci Stranieri, purché questi ultimi, in caso di impossibilità di partecipare alle riunioni della giuria stessa, abbiano la facoltà di delegare a sostituirli due Soci Nazionali.

Il prof. Giordani informa quindi i Colleghi che il Ministero della Pubblica Istruzione ha disposto che sabato 20 dicembre abbia luogo presso venti Accademie, tra le quali è compresa quella dei Lincei, l'elezione di un nuovo membro nel Consiglio Superiore delle Accademie e Biblioteche, in sostituzione del compianto Presidente Castelnuovo.

La Presidenza pertanto ha già provveduto a convocare, per la data sopra indicata, i Soci Nazionali con l'avvertenza che i Soci residenti fuori di Roma, che siano membri ordinari di altri Istituti compresi tra i venti indicati dal Ministero della Pubblica Istruzione, potranno, per loro comodità, votare, anziché presso questa Accademia, presso uno degli Istituti ai quali appartengono, la cui sede sia nel luogo della loro residenza.

Il Presidente comunica ai Colleghi che è uscito il Quaderno n. 28 dei « Problemi attuali di scienza e di cultura », dal titolo « Accrescimento degli organismi » che contiene le relazioni e la discussione del relativo Convegno, svoltosi nel febbraio del corrente anno e che fu organizzato e diretto con grandissima competenza dal Socio G. Levi al quale il Presidente rinnova i più vivi ringraziamenti.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Semerano offre in omaggio il volume « Contributi teorici e sperimentali di Polarografia », edito a cura del Centro di Studio per la Polarografia del Consiglio Nazionale delle Ricerche, contenente alcune memorie che rappresentano i contributi teorici e sperimentali per l'anno 1951 del citato Centro.

Il Socio Armellini presenta il suo trattato su « I Fondamenti scientifici dell'Astrofisica » che costituisce, per così dire, la continuazione od il complemento dell'altro suo lavoro sopra « I Fondamenti scientifici dell'Astronomia » e, dopo aver ricordato che l'Astrofisica è dedicata allo studio della natura fisica dei corpi che compongono l'universo sidereo, mette in rilievo

il fatto che sia per l'Astronomia generale o posizionale od Astrometria, sia per l'Astrofisica, vi sono vasti trattati dedicati agli astronomi di professione e numerosi libri di divulgazione popolare, mentre difettano lavori particolarmente adatti agli studenti, lavori cioè che trattino tutta la vasta materia senza omettere nessun argomento importante e nello stesso tempo senza entrare in minuti dettagli. Le due opere del Socio Armellini, nelle quali l'Autore si è sforzato di esporre con chiarezza e brevità, con rigore scientifico e con i necessari sussidi del calcolo, i difficili problemi dell'Astronomia e dell'Astrofisica tendono appunto a colmare tale lacuna.

Il Socio Bompiani presenta il suo volume dal titolo «Metriche non euclidee» che contiene le lezioni da lui tenute nel corso di Geometria differenziale nell'anno accademico 1951-52.

Il Presidente ringrazia i Colleghi che hanno offerto e illustrato le citate opere e presenta poi le pubblicazioni pervenute in omaggio all'Accademia, mettendo in particolare evidenza il volume «The Planets - Their Origin and Development» di Harold C. Urey, una pubblicazione di Vittorio Dal Borgo intitolata «Studio fisico dell'aorta normale e patologica», pubblicata nella collezione degli «Scripta varia» della Pontificia Accademia delle Scienze, il volume «Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen», inviato in omaggio dal Presidente dei Ministri del «Landes Nordrhein-Westfalen», una pubblicazione del Centro Nazionale di Documentazione scientifico-tecnica del Consiglio Nazionale delle Ricerche su «La Documentazione in Italia», uno studio su «Il Piave e la sua utilizzazione» della Società Adriatica di Elettricità.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti i Soci Pérès, Sansone, Semerano, Panichi, Abetti, Carobbi, Nobile, Boaga, Armellini, Cotronei, Bompiani (che dedica la sua Nota alla memoria del compianto Presidente Castelnuovo), Remotti, Signorini, Segre (che dedica anch'egli il suo lavoro alla memoria del Senatore Castelnuovo), Cambi, Quilico, Califano, Pensa e L. Crocco.

Il Segretario Accademico dà lettura delle Note pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

CROCCO L. - Impedenza trasversale di ugelli supercritici.

BAFFONI G. M. - Azione dell'ormone tiroideo sul neurone di Mauthner.

Nota II: esperienze su Anfibi Urodeli (pres. dal Socio G. COTRONEI).

BALCONI M. - Di un nuovo metodo di calcolo delle analisi delle rocce e di alcune notevoli conseguenze (pres. dal Socio U. PANICHI).

BERNARD M. J. - Sur une distribution composée des vitesses d'agitation moléculaire (pres. dal Socio Straniero J. PÉRÈS).

BOSSOLASCO M. - Caratteristiche e genesi del moto ondoso del mare nel Golfo di Genova (pres. dal Socio C. SOMIGLIANA).

CANONICA L., MARTINOLLI M. e ALNERI E. - Sull'ossidazione dei composti etilenici con acqua ossigenata. Nota I (pres. dal Socio L. CAMBI).

CHIERICI L. e PASSERINI R. - Spettri u.v. di alcuni fenil-seleniuri e del difenil-selenio (pres. dal Socio G. B. BONINO).

CIMINO M. - Sulla variazione del profilo di alcune righe spettrali dal centro al lembo del Sole. Nota III (pres. dal Socio G. ARMELLINI).

COSSU A. - Alcune osservazioni sul confronto tra connessioni affini e metriche riemanniane (pres. dal Socio E. BOMPIANI).

DANUSSO F. e FADIGATI E. - Velocità ultrasonora e proprietà termodinamiche adiabatiche di composti organici liquidi (pres. dal Corrisp. G. NATTA).

DEMANGEOT J. - Sulla struttura della regione della Laga (Abruzzi) (pres. dal Socio R. FABIANI).

FORNASARI E., SCARPA M. e LANZA P. - Sul comportamento polarografico di alcuni derivati dello iodio positivo (pres. dal Corrisp. G. SEMERANO).

GAGLIARDO E. e KÖRNER M. - Titolazione amperometrica del rame con etilxantato di potassio (pres. dal Corrisp. G. SEMERANO).

MARCHETTI L. - Determinazione del campo di velocità di una corrente subsonica piana (pres. dal Corrisp. B. FINZI).

MERLI L. - Il fenomeno di Gibbs nell'interpolazione delle funzioni discontinue. Nota I (pres. dal Corrisp. G. SANSONE).

MUGNAINI E. e GRÜNANGER P. - Sintesi eterocicliche con l'alcool propargilico e il butindiole (pres. dal Corrisp. A. QUILICO).

PALUMBI G. - Valutazione di alcune strutture ritenute nervose sensitive (pres. dal Socio A. PENSA).

RICCI G. - Nuovo metodo per le ricerche cronologiche dei calendari (pres. dal Socio G. ABETTI).

SIMONETTA M. e FAVINI G. - Sulla cinetica della reazione tra 1-cloro-2-nitroetano ed acqua. Nota I (pres. dal Socio L. CAMBI).

TONANI F. - La ripartizione degli elementi fra fase silicata e metallica nelle meteoriti ed il calore di formazione degli ossidi. II: Forma della relazione fra $\log K$ e I_0 (pres. dal Socio G. CAROBBI).

URBANI E. e DE CESARIS-COROMALDI L. - Osservazioni sulla vita latente. II° Studio delle proteinasi di *Artemia salina* L. (pres. dal Socio G. COTRONEI).

VACCARO G. - Esame di singolarità superficiali. Nota II: Massimo numero di punti $(n-2)$ -pli inflessionali di una superficie algebrica d'ordine n (pres. dal Socio E. BOMPIANI).

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 13 dicembre 1952

- ALBERTI Giuseppe. — *Per una nuova fisiologia sociale dell'alimentazione*. Roma, Istituto di Medicina Sociale, 1952. Pp. 148, in-8° (Collana di Studi sui Problemi Medico-Sociali, 18). Con due allegati: 1) *De frumento*. Estr. da «De Bononiensi Scientiarum et Artium Instituto atque Accademia Commentarii», Tomo V, par. I. 2) *La fisiologia e la questione sociale* (Prof. Pietro Albertoni).
- Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen. Band I. Köln und Opladen, Westdeutscher Verlag, 1951, in-8°.
- ARMELLINI Giuseppe. — *I fondamenti scientifici della Astrofisica*. Milano, Hoepli, 1953. Pp. XIX-462, in-8°, con figg.
- BELLINCIONI Giovanni. — *Leonardo da Vinci fondatore della scienza idraulica*. Firenze, C.O.S.P.I.T., 1952. Pp. 130, in-16°.
- BENIOFF Hugo and GUTENBERG Beno. — *The Response of Strain and Pendulum Seismographs to Surface Waves*. Estr. da «Bulletin of the Seismological Society of America», vol. XLIII, 1952, n. 3.
- BENIOFF Hugo, BUWALDA John P., GUTENBERG Beno etc. — *The Aroin Earthquake of July 21, 1952*. Estr. da «Mineral Information Service», vol. V, 1952, n. 9.
- BOFFA Giuseppe. — *Le «Quantizzazioni» come legge di natura*. Roma, Scuola Salesiana del libro, 1952. Pp. 8, in 8°.
- BOMPIANI ENRICO. — *Metriche non euclidee*. Dispense universitarie del corso 1951-1952.
- BUWALDA John P. — Vedi: BENIOFF Hugo, BUWALDA John P., GUTENBERG Beno, etc.
- COMITÉ POUR L'ÉTUDE DE LA PHYSIQUE DE L'INTÉRIEUR DE LA TERRE. — *Comptes Rendus des Séances tenues à Bruxelles du 16 au 29 août 1951*. Paris, 1952. Pp. 21, in-8°.
- CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE. — *Contributi teorici e sperimentali di polarografia*. Supplemento a «La Ricerca Scientifica», a. XXII, 1952. Pp. 366, in-8°, con figg. e tavv.
- CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE. CENTRO NAZ. DI DOCUMENTAZIONE SCIENTIFICO-TECNICA. — *La Documentazione in Italia*. Atti del Congresso mondiale di Documentazione - XVIII Conferenza Internazionale - Roma 15-21 settembre 1952 - riferiti alla partecipazione italiana. Roma, 1952. Pp. 226, in-4°.
- DAL BORGO Vittorio. — *Studio fisico dell'aorta normale e patologica*. Ex aedibus academicis in Civitate Vaticana, 1952 (Pont. Acad. Scientiarum Scripta Savia, 10).
- DEHLINGER Peter. — *Shear-Wave Vibrational Directions and Related Fault Movements in Southern California Earthquakes*. Estr. da «Bulletin of the Seismological Society of America», vol. XLII, 1952, n. 2.
- DENSON M. E. — *Longitudinal Waves through the Earth's Core*. Estr. da «Bulletin of the Seismological Society of America», volume XL, 1952, n. 2.
- D'ERASMO Geremia. — *Nuovi ittioliti cretacei del Carso Triestino*. Estr. da «Atti del Museo Civico di Storia Naturale Trieste», vol. XVIII, 1952, fasc. 4.
- *Revisione degli ittioliti miocenici di Bra studiati da Oronzio Gabriele Costa*. Estr. da «Rendiconti dell'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche della Società Nazionale di Scienze, Lettere e Arti in Napoli», s. 4^a, vol. XIX, 1952.
- GUTENBERG Beno. — *Sv and Sh*. Estr. da «Transactions of the American Geophysical Union», vol. XXXIII, 1952, n. 4.
- *Wave Velocities in the Outer Part of the Earth's Mantle*. Estr. da «Nature», volume CLXX, 1952.
- *Waves from Blasts recorded in Southern California*. Estr. da «Transactions of the American Geophysical Union», vol. XXXIII, 1952, n. 3.
- GUTENBERG Beno. — Vedi: BENIOFF Hugo and GUTENBERG Beno.

- GUTENBERG Beno. — Vedi: BENIOFF Hugo
BUWALDA John P., GUTENBERG Beno etc.
MORPURGO Enrico. — *Gli orologi da petto
prima di Henlein*. (Gli sviluppi di una pole-
mica). Estr. da « La Clessidra », 1952, n. 8.
SOCIETÀ ADRIATICA DI ELETTRICITÀ. — *II
Piave e la sua utilizzazione*. Venezia, 1952.
Pp. 118, in-4°, con tavv.
- TROPEANO Giuseppe. — *Primi fondamenti
di Medicina Sociale*. Roma, Istituto di
Medicina Sociale, 1952. Pp. 119, in-8°
(Collana di Studi sui Problemi Medico-
Sociali, 17).
UREY Harold C. — *The Planets. Their Origin
and Development*. New Haven, Yale Uni-
versity Press, 1952. Pp. xvii-245, in-8°.

D. DE BLASI e U. AMALDI.

INDICI DEL VOLUME

INDICE PER AUTORI

A

- ABETTI G., Relazione sull' XI Convegno Volta (14-19 settembre 1952), 308.
- AGENO M., CORTELLESA G. e QUERZOLI R., Misure di sezione d'urto totale per neutroni di 14 MeV, 253.
- AGOSTINELLI C., Sulla risoluzione mediante integrali definiti del problema delle vibrazioni di una piastra, 396.
- ALIBRANDI G., vedi NOBILE M.
- e ROVATI V., Ulteriori osservazioni sugli effetti della deionizzazione del calcio a livello dei centri sensitivo-motori della corteccia cerebrale del cane, 413.
- ANDREATTA C., Sulla rigenerazione di soluzioni metallifere e di magmi, 215.
- e FORNI I., Ricerche roentgenografiche sul componente minerale dell'osso umano naturale non polverizzato e sull'osso demineralizzato, 14.
- ANDRISANO R. e TUNDO A., Spettri U. V. di alcuni derivati furil-etilenici, 158.
- ARUFFO G., Sul differenziale generalizzato delle forme differenziali esterne, 367.

B

- BACCHETTI T., vedi CANONICA L.
- BAFFONI G. M., Trapianti di midollo spinale di larve in embrioni di Anfibi anuri, 176.
- Effetti del digiuno sul sistema nervoso ed in particolare sul neurone di Mauthner di Anfibi Anuri, 281.
- BASSAROV I., vedi CARDANI C.
- BOMPIANI E., Sulle coordinate di Grassmann, 329.
- BONETTI D., vedi REMOTTI E.
- BORDONI P. G., Nocciolo di sicurezza di una figura piana convessa, 242.
- BUFFA P., Sulla presenza di acido citrico nelle strutture animali calcificate, 417.

C

- CACCIOPPOLI R., Equazioni differenziali ordinarie negli spazi astratti; osservazioni su una Nota del prof. B. Ferretti, 95.

- CACCIOPPOLI R., Fondamenti per una teoria generale delle funzioni pseudo-analitiche di una variabile complessa. Nota I, 197.
- Fondamenti per una teoria generale delle funzioni pseudo-analitiche di una variabile complessa. Nota II, 321.

CAMPANELLI L., vedi LIVREA G.

CAMPEDELLI L., Sulle singolarità delle curve algebriche, 234.

CANONICA L., MARTINOLLI M. e BACCHETTI T., Sintesi di α - ω diacetilparaffine. Nota III, 61.

CARDANI C., BASSAROV I. e PIOZZI F., Sopra alcuni acidi piridin-policarbossilici, 257.

CECCARELLI M., DALLAPORTA N., MERLIN M. e ROSTAGNI A., Un nuovo esemplare di mesone τ , 9.

CIMINO M., La spedizione scientifica dell'Osservatorio Astronomico di Roma a Khartoum (Sudan) per l'eclisse totale di Sole del 25 febbraio 1952. Risultati generali delle osservazioni, 26.

— Sulla variazione del profilo di alcune righe spettrali dal centro al lembo del Sole. Nota II, 120.

CLAUSER E., Trasformazioni nello spazio-tempo pseudoeuclideo che lasciano la metrica in forma statica, 116.

CORBELLINI A., vedi LANZA P.

CORTELLESA G., vedi AGENO M.

COTRONEI G., Risultati sperimentali e problemi sui trapianti, espianti, parabiosi xenoplastiche negli Anfibi, 223.

D

DALLAPORTA N., vedi CECCARELLI M.

DAL MONTE D., vedi MANGINI A.

DANUSSO F., Velocità ultrasonora e compressibilità adiabatica di miscele di idrocarburi, 131.

DE STEFANO F., vedi LIVREA G.

E

EMILIANI F., I minerali del Gruppo dell'Ortler. — VI. Biotite di Val di Bresimo e sua solubilità, 173.

F

- FALCONE G. e PONTIERI G., Sulla liberazione di nucleotidi da cellule batteriche per azione degli alcoli, 89.
- FERRO R., Sulle leghe dell'Uranio coll'Antimonio. Nota I, 53.
- Sulle leghe dell'Uranio coll'Antimonio. Nota II, 151.
- Sulle leghe dell'Uranio col Bismuto. Nota I, 401.
- FINZI B., Sopra una estensione dei campi elettromagnetici, 211.
- FORNI I., vedi ANDREATTA C.

G

- GALLARATI D., Alcune osservazioni sulle curve sferiche ed una nuova caratterizzazione della sfera, 238.
- GENNARO I., Determinazione di gravità relativa tra l'Istituto Idrografico della Marina in Genova ed il vertice di 1° Ordine Monte Colma di Mombarone, 391.
- GIACOMELLI R., Un'erronea spiegazione del ventennale ritardo con cui Newton enunciò la legge di gravitazione universale, 386.
- GIANNUZZI M. A., Orbita di δ Cygni, 33.
- Relazione tra l'umidità atmosferica assoluta ed il coefficiente di trasmissione della radiazione solare, secondo le misure eseguite all'Osservatorio di Roma dal 1935 al 1950, 380.

I

- IANDELLI A., Sugli arseniuri di Uranio. Nota I, 138.
- Sugli arseniuri di Uranio. - II. La struttura cristallina di UAs_2 ed UP_2 . Nota II, 144.
- Le leghe fra Cerio e Manganese, 265.
- ISSEL S., vedi REMOTTI E.

K

- KRZYŹAŃSKI M., Sur la solution élémentaire de l'équation de la chaleur. Note complémentaire, 24.

L

- LANZA P. e CORBELLINI A., Sulla determinazione di n nell'elettrolisi polarografica

accompagnata da processi secondari. Nota I, 406.

- LEONARDI P., Resti fossili di «Sivachoeurus» del giacimento di Sahabi in Cirenaica (Africa Settentrionale). Notizie preliminari, 166.
- LEVI G., Relazione sul colloquio scientifico internazionale tenuto a Madrid dal 14 al 20 novembre 1952 in occasione del 1° centenario della nascita di Santiago Ramon y Cayal, 421.
- LIVREA G., Nuove osservazioni circa gli effetti del sale sodico dell'acido p-amino-salicilico sulla secrezione gastrica del cane, 182.
- LIVREA G., CAMPANELLI L., DE STEFANO F. e MAFFEI G., Circa gli effetti del sale sodico dell'acido p-amino-salicilico sulla secrezione gastrica istaminica dell'uomo, 188.

M

- MAFFEI G., vedi LIVREA G.
- MAJORANA Q., Considerazioni sulle forze nucleari, 97.
- MALATESTA L. e SACCO A., Composti nitrosilcarbamilminici di ferro e cobalto. Nota preliminare, 264.
- MANGINI A. e DAL MONTE D., Ricerche sui pirazoli, 46.
- MARTINOLLI M., vedi CANONICA L.
- MARZIANI M., Sulla propagazione del fronte d'onda nei mezzi dispersivi eterogenei, 127.
- MERLIN M., vedi CECCARELLI M.
- MUCCINI F., vedi SPERONI G.

N

- NOBILE M. e ALIBRANDI G., Effetti della nicotinamide sul decorso del beriberi sperimentale del Colombo, 412.
- NOBILE V., Sulla opportunità di direttive generali nella ricerca di leggi di coordinamento fra i moti stellari. Nota I, 3.
- Sulla opportunità di direttive generali nella ricerca di leggi di coordinamento fra i moti stellari. Nota II, 341.

P

- PERRI T., La regione sacrale degli Anfibi Anuri. (Ricerche sperimentali), 288.

PINO P., vedi SPERONI G.

PIOZZI F., vedi CARDANI C.

PIRANI R., I minerali del gruppo dell'Ortler. — IV. Antofillite e actinolite di Val di Bresimo. Solubilità di questa actinolite, 83.

— I minerali del Gruppo dell'Ortler. — V. Antofillite di Alpe di Brez, 170.

PISTOLESI E., Confronto fra due metodi di calcolo della portanza in corrente supersonica, 205.

PONTIERI G., vedi FALCONE G.

PUCCI C., Teoremi di esistenza e di unicità per il problema di Cauchy nella teoria delle equazioni lineari a derivate parziali. Nota I, 18.

— Teoremi di esistenza e di unicità per il problema di Cauchy nella teoria delle equazioni lineari a derivate parziali. Nota II, 111.

— Maggiorazione della soluzione di un problema al contorno, di tipo misto, relativo a una equazione a derivate parziali, lineare, del secondo ordine, 360.

Q

QUERZOLI R., vedi AGENO M.

R

RAUNICH L., Variazioni dell'attività fosfatase alcalina durante lo sviluppo di *Rana esculenta*, 276.

REMOTTI E. e BONETTI D., Fattori umorali nel ciclo del sacco vitellino degli Uccelli, 349.

— e ISSEL S., Nuovo contributo all'ipotesi di una componente vasale nella correlazione antagonista epitelio-vasi, 356.

ROGNONE L., vedi URBANI E.

ROSTAGNI A., vedi CECCARELLI M.

ROVATI V., vedi ALIBRANDI G.

RUSSO A., Fenomeni sessuali nei Metazoi ed in un Protozoo («*Cryptochilum echini*» Maupas). (Bisessualità nel gamete femminile del Ciliato e nell'ovo dei Metazoi. Funzione originaria di attivatore del gamete maschile del Ciliato e dello spermio in alcuni Metazoi), 104.

— Carattere femminile dei tessuti somatici e loro indipendenza in relazione all'origine dei tumori, 347.

RUSSO S., vedi URBANI E.

S

SEGRE B., Sui corpi risolvibili delle equazioni algebriche, 335.

SERGI S., Relazione sul Congresso internazionale di Scienze Antropologiche ed Etnologiche a Vienna, 310.

SIGNORINI A., Relazione sull'VIII Congresso internazionale di Meccanica teorica ed applicata, 311.

SPERONI G., Momento elettrico degli isomeri basso fondenti degli acidi isossazolcarbossilici di Betti, 75.

— e MUCCINI F., Sistemi binari di acidi isossazolcarbossilici isomeri, 69.

— e PINO P., Momenti elettrici di acidi isossazolcarbossilici. Nota II, 39.

STEFANELLI A., Involuzione sperimentale delle cellule di Mauthner nei Tritoni adulti («*Triton cristatus*»), 294.

T

TOMBA A. M., I minerali del gruppo dell'Ortler. — III. Staurolite, granato e biotite di Val Peder, 79.

TONANI F., La ripartizione degli elementi tra fase silicata e metallica nelle meteoriti ed il calore di formazione degli ossidi. I. Le affinità geochimiche, 269.

TRUESDELL C., La velocità massima nel moto di Gromeka-Beltrami, 378.

TUNDO A., vedi ANDRISANO R.

U

UDESCHINI P., Sopra un campo estendente quello elettromagnetico, 246.

URBANI E., ROGNONE L. e RUSSO S., Osservazioni sulla vita latente. — I. Studio delle dipeptidasi di «*Artemia salina*», L. 300.

V

VACCA M. T., Sulle derivate delle funzioni di Bessel rispetto all'ordine, nel caso in cui questo è la metà di un intero dispari, 229.

VACCARO G., Esame di singolarità superficiali. — I. Superficie algebriche d'ordine n con punti $(n-2)$ -pli inflessionali, 373.

INDICE PER MATERIE

A

Analisi matematica. — Equazioni differenziali ordinarie negli spazi astratti; osservazioni su una Nota del prof. B. Ferretti. CACCIOPOLI R., 95.

— Fondamenti per una teoria generale delle funzioni pseudo-analitiche di una variabile complessa. Nota I. CACCIOPOLI R., 197.

— Fondamenti per una teoria generale delle funzioni pseudo-analitiche di una variabile complessa. Nota II. CACCIOPOLI R., 321.

— Sur la solution élémentaire de l'équation de la chaleur. Note complémentaire. KRZYŻANSKI M., 24.

— Teoremi di esistenza e di unicità per il problema di Cauchy nella teoria delle equazioni lineari a derivate parziali. Nota I. PUCCI C., 18.

— Teoremi di esistenza e di unicità per il problema di Cauchy nella teoria delle equazioni lineari a derivate parziali. Nota II. PUCCI C., 111.

— Maggiorazione della soluzione di un problema al contorno, di tipo misto, relativo a una equazione a derivate parziali, lineare, del secondo ordine. PUCCI C., 360.

— Sulle derivate delle funzioni di Bessel rispetto all'ordine, nel caso in cui questo è la metà di un intero dispari. VACCA M. T., 229.

Astrofisica. — Relazione tra l'umidità atmosferica assoluta ed il coefficiente di trasmissione della radiazione solare, secondo le misure eseguite all'Osservatorio di Roma dal 1935 al 1950. GIANNUZZI M. A., 380.

Astronomia. — La spedizione scientifica dell'Osservatorio Astronomico di Roma a Khartoum (Sudan) per l'eclisse totale di Sole del 25 febbraio 1952. Risultati generali delle osservazioni. CIMINO M., 26.

— Sulla variazione del profilo di alcune righe spettrali dal centro al lembo del Sole. Nota II. CIMINO M., 120.

— Orbita di δ Cygni. GIANNUZZI M. A., 33.

— Sulla opportunità di direttive generali nella ricerca di leggi di coordinamento fra i moti stellari. Nota I. NOBILE V., 3.

— Sulla opportunità di direttive generali nella ricerca di leggi di coordinamento fra i moti stellari. Nota II. NOBILE V., 341.

B

Biologia. — Ricerche roentgenografiche sul componente minerale dell'osso umano naturale non polverizzato e sull'osso demineralizzato. ANDREATTA C. e FORNI I., 14.

— Trapianti di midollo spinale di larve in embrioni di Anfibi anuri. BAFFONI G. M., 176.

— Effetti del digiuno sul sistema nervoso ed in particolare sul neurone di Mauthner di Anfibi Anuri. BAFFONI G. M., 281.

— Sulla presenza di acido citrico nelle strutture animali calcificate. BUFFA P., 417.

— Risultati sperimentali e problemi sui trapianti, espianti, parabiosi xenoplastiche negli Anfibi. COTRONEI G., 223.

— La regione sacrale degli Anfibi Anuri. (Ricerche sperimentali). PERRI T., 288.

— Variazioni dell'attività fosfatase alcalina durante lo sviluppo di *Rana esculenta*. RAUNICH L., 276.

— Fattori umorali nel ciclo del sacco vitellino degli Uccelli. REMOTTI E. e BONETTI D., 349.

— Fenomeni sessuali nei Metazoi ed in un Protozoo («Cryptochilum echini» Maupas). (Bisessualità nel gamete femminile del Ciliato e nell'ovo dei Metazoi. Funzione originaria di attivatore del gamete maschile del Ciliato e dello spermio in alcuni Metazoi). RUSSO A., 104.

- Carattere femminile dei tessuti somatici e loro indipendenza in relazione all'origine dei tumori. RUSSO A., 347.
- Involuzione sperimentale delle cellule di Mauthner nei Tritoni adulti (« Triton cristatus »). STEFANELLI A., 294.
- Osservazioni sulla vita latente. — I. Studio delle dipeptidasi di « Artemia salina » L. URBANI E., ROGNONE L. e RUSSO S., 300.

C

Chimica. — Spettri U. V. di alcuni derivati furil-etilenici. ANDRISANO R. e TUNDO A., 158.

- Sugli arseniuri di Uranio. Nota I. IANDELLI A., 138.
- Sugli arseniuri di Uranio. — II. La struttura cristallina di UAs_2 ed UP_2 . Nota II. IANDELLI A., 144.

— Ricerche sui pirazoli. MANGINI A. e DAL MONTE D., 46.

— Momento elettrico degli isomeri basso fondenti degli acidi isossazolcarbossilici di Betti. SPERONI G., 75.

— Sistemi binari di acidi isossazolcarbossilici isomeri. SPERONI G. e MUCCINI F., 69.

— Momenti elettrici di acidi isossazolcarbossilici. Nota II. SPERONI G. e PINO P., 39.

Chimica fisica. — Velocità ultrasonora e compressibilità adiabatica di miscele di idrocarburi. DANUSSO F., 131.

Chimica inorganica. — Sulle leghe dell'Uranio coll'Antimonio. Nota I. FERRO R., 53.

— Sulle leghe dell'Uranio coll'Antimonio. Nota II. FERRO R., 151.

— Sulle leghe dell'Uranio col Bismuto. Nota I. FERRO R., 401.

— Le leghe fra Cerio e Manganese. IANDELLI A., 265.

— Composti nitrosilcarbamilminici di ferro e cobalto. Nota preliminare. MALATESTA L. e SACCO A., 264.

Chimica organica. — Sintesi di α - ω diacetilparaffine. Nota III. CANONICA L., MARTINOLLI M. e BACCHETTI T., 61.

— Sopra alcuni acidi piridin-policarbossilici. CARDANI C., BASSAROV I. e PIOZZI F., 257.

Comunicazioni varie, 313, 423.

Congressi internazionali. — Relazione sull'XI Convegno Volta (14-19 settembre 1952). ABETTI G., 308.

— Relazione sul colloquio scientifico internazionale tenuto a Madrid dal 14° al 20 novembre 1952 in occasione del I° centenario della nascita di Santiago Ramon y Cajal. LEVI G., 421.

— Relazione sul Congresso internazionale di Scienze Antropologiche ed Etnologiche a Vienna. SERGI S., 310.

— Relazione sull'VIII Congresso internazionale di Meccanica teorica ed applicata. SIGNORINI A., 311.

E

Embriologia. — Nuovo contributo all'ipotesi di una componente vasale nella correlazione antagonista epitelio-vasi. REMOTTI E. e ISSEL S., 356.

F

Fisica. — Misure di sezione d'urto totale per neutroni di 14 MeV. AGENO M., CORTELLESA G. e QUERZOLI R., 253.

— Un nuovo esemplare di mesone τ . CECCARELLI M., DALLAPORTA N., MERLIN M. e ROSTAGNI A., 9.

— Considerazioni sulle forze nucleari. MAJORANA Q., 97.

Fisica matematica. — Sulla risoluzione mediante integrali definiti del problema delle vibrazioni di una piastra. AGOSTINELLI C., 396.

— Sopra una estensione dei campi elettromagnetici. FINZI B., 211.

— Sulla propagazione del fronte d'onda nei mezzi dispersivi eterogenei. MARZIANI M., 127.

— Sopra un campo estendente quello elettromagnetico. UDESCHINI P., 246.

Fisiologia. — Ulteriori osservazioni sugli effetti della deionizzazione del calcio a livello dei centri sensitivo-motori della corteccia cerebrale del cane. ALIBRANDI G. e ROVATI V., 413.

— Nuove osservazioni circa gli effetti del sale sodico dell'acido p-aminosalicilico sulla secrezione gastrica del cane. LIVREA G., 182.

— Circa gli effetti del sale sodico dell'acido p-aminosalicilico sulla secrezione gastrica istaminica dell'uomo. LIVREA G., CAMPANELLI L., DE STEFANO F. e MAFFEI G., 188.

— Effetti della nicotinamide sul decorso del beriberi sperimentale del Colombo. NOBILE M. e ALIBRANDI G., 412.

G

Geochimica. — La ripartizione degli elementi tra fase silicata e metallica nelle meteoriti ed il calore di formazione degli ossidi. — I. Le affinità geochimiche. TONANI F., 269.

Geodesia. — Determinazione di gravità relativa tra l'Istituto Idrografico della Marina in Genova ed il vertice di 1° Ordine Monte Colma di Mombarone. GENNARO I., 391.

Geologia. — Resti fossili di « Sivachoërus » del giacimento di Sahabi in Cirenaica (Africa Settentrionale). Notizie preliminari. LEONARDI P., 166.

Geometria. — Sulle coordinate di Grassmann. BOMPIANI E., 329.

— Alcune osservazioni sulle curve sferiche ed una nuova caratterizzazione della sfera. GALLARATI D., 238.

— Esame di singolarità superficiali. Nota I: Superficie algebriche d'ordine n con punti ($n-2$)-pli inflessionali. VACCARO G., 373.

Geometria algebrica. — Sulle singolarità delle curve algebriche. CAMPEDELLI L., 234.

Geometria aritmetica. — Sui corpi risolvibili delle equazioni algebriche. SEGRE B., 335.

Giacimenti minerari. — Sulla rigenerazione di soluzioni metallifere e di magmi. ANDREATTA C., 215.

M

Matematica. — Sul differenziale generalizzato delle forme differenziali esterne. ARUFFO G., 367.

Meccanica. — Nocciolo di sicurezza di una figura piana convessa. BORDONI P. G., 242.

— Trasformazioni nello spazio-tempo pseudo-euclideo che lasciano la metrica in forma statica. CLAUSER E., 116.

— Confronto fra due metodi di calcolo della portanza in corrente supersonica. PISTOLESI E., 205.

Meccanica dei fluidi. — La velocità massima nel moto di Gromeka-Beltrami. TRUESDELL C., 378.

Microcoulombometria. — Sulla determinazione di n nell'elettrolisi polarografica accompagnata da processi secondari. Nota I. LANZA P. e CORBELLINI A., 406.

Mineralogia. — I minerali del Gruppo dell'Ortler. — VI. Biotite di Val di Bresimo e sua solubilità. EMILIANI F., 173.

— I minerali del gruppo dell'Ortler. — IV. Antofillite e actinolite di Val di Bresimo. Solubilità di questa actinolite. PIRANI R., 83.

— I minerali del Gruppo dell'Ortler. — V. Antofillite di Alpe di Brez. PIRANI R., 170.

— I minerali del gruppo dell'Ortler. — III. Staurolite, granato e biotite di Val Peder. TOMBA A. M., 79.

O

Opere pervenute in dono all'Accademia, 317, 427.

P

Patologia. — Sulla liberazione di nucleotidi da cellule batteriche per azione degli alcoli. FALCONE G. e PONTIERI G., 89.

Personale accademico, 312, 422.

Plichi suggellati, 314, 422.

Presentazione di libri, 314, 424.

Presentazione di Note e Memorie, 316, 425.

S

Storia dell'Astronomia. — Un'erronea spiegazione del ventennale ritardo con cui Newton enunciò la legge di gravitazione universale. GIACOMELLI R., 386.

INDICI DEI FASCICOLI

FASCICOLO 1-2.

LUGLIO-AGOSTO 1952.

NOTE DI SOCI

NOBILE V., Sulla opportunità di direttive generali nella ricerca di leggi di coordinamento fra i moti stellari. Nota I	Pag. 3
CECCARELLI M., DALLAPORTA N., MERLIN M. e ROSTAGNI A., Un nuovo esemplare di mesone τ (pres. dal Corrisp. <i>A. Rostagni</i>)	9
ANDREATTA C. e FORNI I., Ricerche roentgenografiche sul componente minerale dell'osso umano naturale non polverizzato e sull'osso demineralizzato (pres. dal Corrisp. <i>C. Andreatta</i>)	14

NOTE PRESENTATE DA SOCI

PUCCI C., Teoremi di esistenza e di unicità per il problema di Cauchy nella teoria delle equazioni lineari a derivate parziali. Nota I (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>)	18
MIROSLAW KRZYŻANSKI, Sur la solution élémentaire de l'équation de la chaleur. Note complémentaire (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>)	24
CIMINO M., La spedizione scientifica dell'Osservatorio Astronomico di Roma a Khartoum (Sudan) per l'eclisse totale di Sole del 25 febbraio 1952. Risultati generali delle osservazioni (pres. dal Socio <i>G. Armellini</i>)	26
GIANNUZZI M. A., Orbita di δ Cygni (pres. dal Socio <i>G. Armellini</i>)	33
SPERONI G. e PINO P., Momenti elettrici di acidi isossazolcarbossilici. Nota II (pres. dal Corrisp. <i>A. Quilico</i>)	39
MANGINI A. e DAL MONTE D., Ricerche sui pirazoli (pres. dal Socio <i>G. B. Bonino</i>)	46
FERRO R., Sulle leghe dell'Uranio coll'Antimonio. Nota I (pres. dal Socio <i>L. Rolla</i>)	53
CANONICA L., MARTINOLLI M. e BACCHETTI T., Sintesi di α - ω diacetilparaffine. Nota III (pres. dal Socio <i>L. Cambi</i>)	61
SPERONI G. e MUCCINI F., Sistemi binari di acidi isossazolcarbossilici isomeri (pres. dal Corrisp. <i>A. Quilico</i>)	69
SPERONI G., Momento elettrico degli isomeri basso fondenti degli acidi isossazolcarbossilici di Betti (pres. dal Corrisp. <i>A. Quilico</i>)	75
TOMBA A. M., I minerali del gruppo dell'Ortler. - III. Staurolite, granato e biotite di Val Peder (pres. dal Corrisp. <i>C. Andreatta</i>)	79
PIRANI R., I minerali del gruppo dell'Ortler. - IV. Antofillite e actinolite di Val di Bresimo. Solubilità di questa actinolite (pres. dal Corrisp. <i>C. Andreatta</i>)	83
FALCONE G. e PONTIERI G., Sulla liberazione di nucleotidi da cellule batteriche per azione degli alcoli (pres. dal Corrisp. <i>L. Califano</i>)	89

FASCICOLO 3-4

SETTEMBRE-OTTOBRE 1952.

NOTE DI SOCI

CACCIOPPOLI R., Equazioni differenziali ordinarie negli spazi astratti; osservazioni su una Nota del prof. B. Ferretti	Pag. 95
MAJORANA Q., Considerazioni sulle forze nucleari	97
RUSSO A., Fenomeni sessuali nei Metazoi ed in un Protozoo (« <i>Cryptochilum echini</i> » Maupas). (Bisessualità nel gamete femminile del Ciliato e nell'ovo dei Metazoi. Funzione originaria di attivatore del gamete maschile del Ciliato e dello spermio in alcuni Metazoi)	104

NOTE PRESENTATE DA SOCI

PUCCI C., Teoremi di esistenza e di unicità per il problema di Cauchy nella teoria delle equazioni lineari a derivate parziali. Nota II (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>)	Pag. 111
CLAUSER E., Trasformazioni nello spazio-tempo pseudoeuclideo che lasciano la metrica in forma statica (pres. dal Corrisp. <i>B. Finzi</i>)	116
CIMINO M., Sulla variazione del profilo di alcune righe spettrali dal centro al lembo del Sole. Nota II (pres. dal Socio <i>G. Armellini</i>)	120
MARZIANI M., Sulla propagazione del fronte d'onda nei mezzi dispersivi eterogenei (pres. dal Corrisp. <i>B. Finzi</i>)	127
DANUSO F., Velocità ultrasonora e compressibilità adiabatica di miscele di idrocarburi (pres. dal Corrisp. <i>G. Natta</i>)	131
IANDELLI A., Sugli arseniuri di Uranio. Nota I (pres. dal Socio <i>L. Rolla</i>)	138
IANDELLI A., Sugli arseniuri di Uranio. - II. La struttura cristallina di UAs_2 ed UP_2 . Nota II (pres. dal Socio <i>L. Rolla</i>)	144
FERRO R., Sulle leghe dell'Uranio coll'Antimonio. Nota II (pres. dal Socio <i>L. Rolla</i>)	151
ANDRISANO R. e TUNDO A., Spettri U. V. di alcuni derivati furil-etilenici (pres. dal Socio <i>G. B. Bonino</i>)	158
LEONARDI P., Resti fossili di « <i>Sivachoerus</i> » del giacimento di Sahabi in Cirenaica (Africa Settentrionale). Notizie preliminari (pres. dal Socio <i>R. Fabiani</i>)	166
PIRANI R., I minerali del Gruppo dell'Ortler. - V. Antofillite di Alpe di Brez (pres. dal Corrisp. <i>C. Andreatta</i>)	170
EMILIANI F., I minerali del Gruppo dell'Ortler. - VI. Biotite di Val di Bresimo e sua solubilità (pres. dal Corrisp. <i>C. Andreatta</i>)	173
BAFFONI G. M., Trapianti di midollo spinale di larve in embrioni di Anfibi Anuri (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i>)	176
LIVREA G., Nuove osservazioni circa gli effetti del sale sodico dell'acido p-aminosalicilico sulla secrezione gastrica del cane (pres. dal Socio <i>G. Amantea</i>)	182
LIVREA G., CAMPANELLI L., DE STEFANO F. e MAFFEI G., Circa gli effetti del sale sodico dell'acido p-aminosalicilico sulla secrezione gastrica istaminica dell'uomo (pres. dal Socio <i>G. Amantea</i>)	188

FASCICOLO 5.

NOVEMBRE 1952.

NOTE DI SOCI

CACCIOPOLI R., Fondamenti per una teoria generale delle funzioni pseudo-analitiche di una variabile complessa. Nota I	Pag. 197
PISTOLESI E., Confronto fra due metodi di calcolo della portanza in corrente supersonica	205
FINZI B., Sopra una estensione dei campi elettromagnetici	211
ANDREATTA C., Sulla rigenerazione di soluzioni metallifere e di magmi	215
COTRONEI G., Risultati sperimentali e problemi sui trapianti, espianti, parabiosi xenoplastiche negli Anfibi	223

NOTE PRESENTATE DA SOCI

VACCA M. T., Sulle derivate delle funzioni di Bessel rispetto all'ordine, nel caso in cui questo è la metà di un intero dispari (pres. dal Corrisp. <i>F. G. Tricomi</i>)	Pag. 229
CAMPEDELLI L., Sulle singolarità delle curve algebriche (pres. dal Socio <i>U. Amaldi</i>)	234
GALLARATI D., Alcune osservazioni sulle curve sferiche ed una nuova caratterizzazione della sfera (pres. dal Corrisp. <i>B. Segre</i>)	238
BORDONI P. G., Nocciolo di sicurezza di una figura piana convessa (pres. dal Socio <i>A. Signorini</i>)	242
UDESCHINI P., Sopra un campo estendente quello elettromagnetico (pres. dal Corrisp. <i>B. Finzi</i>)	246
AGENO M., CORTELLESA G. e QUERZOLI R., Misure di sezione d'urto totale per neutroni di 14 MeV (pres. dal Socio <i>G. C. Trabacchi</i>)	253
CARDANI C., BASSAROV I. e PIOZZI F., Sopra alcuni acidi piridin-policarbossilici (pres. dal Corrisp. <i>A. Quilico</i>)	257
MALATESTA L. e SACCO A., Composti nitrosilcarbamilamminici di ferro e cobalto. Nota preliminare (pres. dal Socio <i>L. Cambi</i>)	264
IANDELLI A., Le leghe fra Cerio e Manganese (pres. dal Socio <i>L. Rolla</i>)	265
TONANI F., La ripartizione degli elementi tra fase silicata e metallica nelle meteoriti ed il calore di formazione degli ossidi. - I. Le affinità geochimiche (pres dal Socio <i>G. Carobbi</i>)	269
RAUNICH L., Variazioni dell'attività fosfatasica alcalina durante lo sviluppo di <i>Rana esculenta</i> (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i>)	276
BAFFONI G. M., Effetti del digiuno sul sistema nervoso ed in particolare sul neurone di Mauthner di Anfibi Anuri (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i>)	281
PERRI T., La regione sacrale degli Anfibi Anuri. (Ricerche sperimentali) (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i>)	288
STEFANELLI AL. Involuzione sperimentale delle cellule di Mauthner nei Tritoni adulti («Triton cristatus») (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i>)	294
URBANI E., ROGNONE L. e RUSSO S., Osservazioni sulla vita latente. - I. Studio delle dipeptidasi di « <i>Artemia salina</i> » L. (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i>)	300

CONGRESSI

Relazione sull'XI Convegno Volta (14-19 settembre 1952) del Socio G. ABETTI	Pag. 308
Relazione sul Congresso internazionale di Scienze Antropologiche ed Etnologiche a Vienna del Socio S. SERGI	310
Relazione sull'VIII Congresso internazionale di Meccanica teorica ed applicata del Socio A. SIGNORINI	311
Personale accademico	312
Comunicazioni varie	313
Plichi suggellati	314
Presentazione di libri	314
Presentazione di Note e Memorie	316
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta dell'8 novembre 1952	317

FASCICOLO 6.

DICEMBRE 1952.

NOTE DI SOCI

CACCIOPOLI R., Fondamenti per una teoria generale delle funzioni pseudo-analitiche di una variabile complessa. Nota II	Pag. 321
BOMPIANI E., Sulle coordinate di Grassmann	329
SEGRE B., Sui corpi risolvibili delle equazioni algebriche	335
NOBILE V., Sulla opportunità di direttive generali nella ricerca di leggi di coordinamento fra i moti stellari. Nota II	341
RUSSO A., Carattere femminile dei tessuti somatici e loro indipendenza in relazione all'origine dei tumori	347
REMOTTI E., BONETTI D., Fattori umorali nel ciclo del sacco vitellino degli Uccelli (pres. dal Corrisp. E. Remotti)	349
REMOTTI E. e ISSEL S., Nuovo contributo all'ipotesi di una componente vasale nella correlazione antagonista epitelio-vasi (pres. dal Corrisp. E. Remotti)	356

NOTE PRESENTATE DA SOCI

PUCCI C., Maggiorazione della soluzione di un problema al contorno, di tipo misto, relativo a una equazione a derivate parziali, lineare, del secondo ordine (pres. dal Socio M. Picone)	Pag. 360
ARUFFO G., Sul differenziale generalizzato delle forme differenziali esterne (pres. dal Corrisp. B. Segre)	367
VACCARO G., Esame di singolarità superficiali. - I. Superficie algebriche d'ordine n con punti $(n-2)$ -pli inflessionali (pres. dal Socio E. Bompiani)	373
TRUESDELL C., La velocità massima nel moto di Gromeka-Beltrami (pres. dal Socio M. Picone)	378
GIANNUZZI M. A., Relazione tra l'umidità atmosferica assoluta ed il coefficiente di trasmissione della radiazione solare, secondo le misure eseguite all'Osservatorio di Roma dal 1935 al 1950 (pres. dal Socio G. Armellini)	380

GIACOMELLI R., Un'erronea spiegazione del ventennale ritardo con cui Newton enunciò la legge di gravitazione universale (pres. dal Socio <i>G. Armellini</i>)	Pag. 386
GENNARO I., Determinazione di gravità relativa tra l'Istituto Idrografico della Marina in Genova ed il vertice di 1° Ordine Monte Colma di Mombarone (pres dal Corrisp. <i>G. Boaga</i>)	391
AGOSTINELLI C., Sulla risoluzione mediante integrali definiti del problema delle vibrazioni di una piastra (pres. dal Socio <i>A. Signorini</i>)	396
FERRO R., Sulle leghe dell'Uranio col Bismuto. Nota I (pres. dal Socio <i>L. Rolla</i>)	401
LANZA P. e CORBELLINI A., Sulla determinazione di n nell'elettrolisi polarografica accompagnata da processi secondari. Nota I (pres. dal Corrisp. <i>G. Semerano</i>)	406
NOBILE M. e ALIBRANDI G., Effetti della nicotinamide sul decorso del beriberi sperimentale del colombo (pres. dal Socio <i>C. Ciaccio</i>)	412
ALIBRANDI G. e ROVATI V., Ulteriori osservazioni sugli effetti della deionizzazione del calcio a livello dei centri sensitivo-motori della corteccia cerebrale del cane (pres. dal Socio <i>C. Ciaccio</i>)	413
BUFFA P., Sulla presenza di acido citrico nelle strutture animali calcificate (pres. dal Socio <i>G. Vernoni</i>)	417

CONGRESSI

Relazione sul Colloquio scientifico internazionale tenuto a Madrid dal 14 al 20 novembre 1952 in occasione del 1° centenario della nascita di Santiago Ramon y Cajal del Socio GIUSEPPE LEVI	Pag. 421
Personale accademico	422
Plichi suggellati	422
Comunicazioni varie	423
Presentazione di libri	424
Presentazione di Note e Memorie	425
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 13 dicembre 1952	427
Indice per Autori	431
Indice per Materie	434
Indici dei fascicoli	437

